Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 309–320

УДК 517.9

О приближенном решении автономных периодических краевых задач с запаздыванием методом наименьших квадратов[1]

С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, П. В. Кулиш

Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск 84116. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. На основе техники наименьших квадратов построена новая итерационная схема для нахождения решений автономной слабо нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в критическом случае. Задача о нахождении периодических решений автономной краевой задачи с запаздыванием в критическом случае существенно отличается от аналогичной задачи для неавтономной системы, поскольку период искомого решения не известен и является функцией малого параметра.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, итерационная схема, автономная краевая задача с запаздыванием.

1. Постановка задачи

Исследована задача о построении приближений к $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодическому решению

$$z(t,\varepsilon):\; z(\cdot,\varepsilon)\in C^1[0,\mathfrak{T}(\varepsilon)],\;\; \mathfrak{T}(0)=T,\;\; \Delta\in\mathbb{R}^1,\;\; z(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$$

системы дифференциальных уравнений с запаздыванием [5, 6, 13]

$$dz(t)/dt = Az(t) + Bz(t-\Delta) + \varepsilon Z(z(t), z(t-\Delta),\varepsilon). \tag{1}$$

Решения периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности T-периодического решения $z_0(\tau):\; z_0(\cdot)\in C^1[0,T]$ порождающей системы

$$dz_0/d\tau = Az_0(\tau) + Bz_0(\tau-\Delta), \quad A,\; B\in\mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2}$$

Здесь A, B — постоянные $(n\times n)$-мерные матрицы, $Z(z(t), z(t-\Delta),\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестным $z(t)$ и $z(t-\Delta)$ в малой окрестности решения порождающей T-периодической задачи для системы (2), а также непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. В критическом случае [4, с. 33], при наличии чисто мнимых корней $\lambda_j = \pm ik_jT,\; i=\sqrt{-1},\; j\in\mathbb{Z}$ характеристического уравнения $\det[A + Be^{-\lambda\Delta} - \lambda I_n] = 0$, система (2) имеет семейство T-периодических решений $z_0(\tau, c_r) = X_r(\tau)c_r,\; c_r\in\mathbb{R}^r$. Здесь $X_r(\tau)$ — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно-независимых T-периодических решений системы (2). В критическом случае сопряженная система

$$dy(\tau)/dt = -A^*y(\tau) - B^*y(\tau+\Delta)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

имеет семейство T-периодических решений вида [4, с. 30] $y(\tau, c_r) = H_r(\tau)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$. Здесь $H_r(\tau)$ — $(n\times r)$-матрица, составленная из r-линейно-независимых T-периодических решений сопряженной системы. Заметим, что пространство решений порождающей системы (2) — конечномерно [11]. Существенным отличием автономной $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодической задачи (1) от аналогичной неавтономной периодической задачи также является тот факт, что любое решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (1) существует наряду с целой серией решений $z(t+h,\varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Этот факт позволяет [3, 9, 10, 12] зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей T-периодической задачи (2) стало $r-1$-параметричным

$$z_0(\tau, c_{r-1}) = X_{r-1}(\tau)c_{r-1}, \quad c_{r-1} \in \mathbb{R}^{r-1}.$$

Задача о нахождении периодических решений автономной системы (1) в критическом случае существенно отличается от аналогичной задачи для неавтономной системы, поскольку период $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ искомого решения задачи (1) неизвестен и является функцией малого параметра; представим его $\mathfrak{T}(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$ через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$. Величины

$$\beta(\varepsilon), \quad \beta(0) := \beta^*, \quad \Omega(\varepsilon) := \frac{\Delta}{1+\varepsilon\beta(\varepsilon)}$$

подлежат определению в процессе нахождения искомого решения. Совершая в системе (1) замену независимой переменной [3, 9, 10, 12] $t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$, приходим к задаче о нахождении T-периодических решений системы

$$dz(\tau)/d\tau = Az(\tau) + Bz(\tau-\Omega(\varepsilon)) + \\ + \varepsilon\beta(\varepsilon)[Az(\tau) + Bz(\tau-\Omega(\varepsilon))] + \varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z(\tau), z(\tau-\Omega(\varepsilon)), \varepsilon). \quad (3)$$

2. Необходимое условие разрешимости

Обозначая

$$f_0(\tau, c^*) = \beta^*[Az_0(\tau, c^*_{r-1}) + Bz_0(\tau-\Delta, c^*_{r-1})] + Z(z_0(\tau, c^*_r), z_0(\tau-\Delta, c^*_{r-1}), 0),$$

аналогично [3, 9, 10, 12] приходим к необходимому условию существования искомого $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодического решения системы (1).

Теорема 1. *Если $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ периодическая задача для автономной системы* (1) *в критическом случае имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t,0) = z_0(t, c^*_{r-1})$, то вектор $c^* = \mathrm{col}\ (c^*_{r-1},\ \beta^*) \in \mathbb{R}^r$ удовлетворяет уравнению [3]*

$$F(c^*) := \int_0^T H_r^*(s) f_0(s, c^*)\, ds = 0. \quad (4)$$

Корни уравнения (4) определяют порождающее решение $z_0(\tau, c^*_{r-1})$, в малой окрестности которого в критическом случае могут существовать искомые решения T-периодической задачи для уравнения (1). Если же уравнение (4) не имеет действительных решений, то поставленная T-периодическая задача для уравнения (1) неразрешима.

Предположим, что уравнение (4) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (4), приходим к задаче об отыскании $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодических решений автономной системы (3) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z(\tau,0) = z_0(\tau, c^*_{r-1})$. Для нахождения T-периодического возмущения $x(\tau,\varepsilon): \ x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \ x(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \ x(\tau,0) \equiv 0$ порождающего решения $z_0(\tau, c^*_{r-1})$ используем T-периодическую задачу для уравнения

$$\begin{gathered} dx(\tau,\varepsilon)/dt = Ax(\tau,\varepsilon) + Bx(\tau-\Delta,\varepsilon) + \\ + B[z(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon) - z(\tau-\Delta,\varepsilon)] + \varepsilon\beta(\varepsilon)[Az(\tau,\varepsilon) + Bz(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon)] + \\ + \varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega(\varepsilon),c^*_{r-1}) + x(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon). \quad (5) \end{gathered}$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость по первым двум аргументам вектор-функции

$$Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega(\varepsilon),c^*_{r-1}) + x(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $z_0(\tau, c^*_{r-1})$ и непрерывную дифференцируемость по малому параметру, разлагаем эту функцию в малой окрестности точек $x(\tau) = 0$, $x(\tau-\Omega(\varepsilon)) = 0$ и $\varepsilon = 0$

$$\begin{gathered} Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x(\tau), z_0(\tau-\Omega(\varepsilon),c^*_{r-1}) + x(\tau-\Omega(\varepsilon)),\varepsilon) = \\ = Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0) + A_{\Delta 1}(\tau)x(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau) + \\ + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + R(z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega(\varepsilon),c^*_{r-1}) + x(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\tau,\varepsilon), \quad (6) \end{gathered}$$

где

$$A_1(\tau) = Z'_{z(\tau,\varepsilon)}(z_0(\tau,c^*_{r-1})z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0),$$
$$A_2(\tau) = Z'_{z(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon)}(z_0(\tau,c^*_{r-1})z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0),$$
$$A_3(\tau) = Z'_{\varepsilon}(z_0(\tau,c^*_{r-1})z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0).$$

Остаток

$$R(z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega(\varepsilon),c^*_{r-1}) + x(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$$

разложения более высокого порядка малости по $x(\tau,\varepsilon)$, $x(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon)$ и ε в окрестности точек $x(\tau,\varepsilon) = 0$, $x(\tau-\Omega(\varepsilon),\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первые четыре члена разложения (6). Обозначим $(r \times r)$-матрицу

$$\begin{gathered} B_0 = \int_0^T H^*_r(s)\{[\beta^* A + A_1(s)]X_{r-1}(s) + \\ + [\beta^* B + A_{\Delta 1}(s)]X_{r-1}(s-\Delta); [AX_{r-1}(s) + BX_{r-1}(s-\Delta)] \cdot c^*_{r-1}\}\, ds, \end{gathered}$$

являющуюся производной левой части уравнения (4) для порождающих амплитуд

$$B_0 = \frac{\partial F(c_{r-1},\beta)}{\partial(c_{r-1},\beta)}\Bigg|_{\substack{c_{r-1} = c^*_{r-1}, \\ \beta = \beta^*}}.$$

Условия разрешимости периодической задачи для системы (5) в критическом случае приведены в статье [3].

Теорема 2. *В критическом случае для каждого простого* ($\det B_0 \neq 0$) *корня уравнения* (4) *для порождающих амплитуд* $c^* = \mathrm{col}\,(c^*_{r-1},\ \beta^*) \in \mathbb{R}^r$ *уравнение* (3) *имеет единственное T-периодическое решение* $x(\tau,\varepsilon):\ x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T],\ \ x(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$. *Система* (1) *имеет при этом единственное* $\mathfrak{T}(\varepsilon)$*-периодическое решение*

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,\mathfrak{T}(\varepsilon)],\ z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(\tau, c^*_{r-1})$.

Условия приведенной теоремы, в отличие от результатов статьи [3], предполагают известными только базис T-периодических решений $X_r(\tau)$ порождающей системы (2) и базис T-периодических решений $H_r(\tau)$ сопряженной системы.

3. Частный критический случай

Согласно традиционной классификации краевых задач [3, 13] случай простоты корней уравнения для порождающих амплитуд (4) назван критическим случаем первого порядка. Менее изученным является случай кратных ($\det B_0 = 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (4); при этом согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) не может быть отнесена к критическому случаю второго или более высокого порядка [3], а также к особому критическому случаю, поскольку уравнение для порождающих амплитуд не обращается в тождество [15]. При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (4), оставляя только линейно-независимые строки уравнения (4), получаем эквивалентное условие разрешимости исходной задачи (1)

$$F_\rho(c^*) := \int_0^T H^*_\rho(s) f_0(s,c^*)\, ds = 0; \tag{7}$$

здесь $H_\rho(t)$ — $(\rho \times r)$-мерная матрица, составленная из ρ -линейно-независимых строк матрицы $H_r(\tau)$.

Следствие. *Если* $\mathfrak{T}(\varepsilon)$*-периодическая задача для автономной системы* (1) *в критическом случае имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t, c^*_{r-1})$, *то вектор* $c^* = \mathrm{col}\,(c^*_{r-1},\ \beta^*) \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению* (7).

Оставляя только линейно-независимые строки в условии разрешимости T-периодической задачи для автономной системы (3), с учетом равенства (7), получаем эквивалентное условие разрешимости исходной задачи $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодической задачи для автономной системы (1)

$$\int_0^{2\pi} H^*_\rho(s)\{\varepsilon\beta^*\{[AX_{r-1}(s) + BX_{r-1}(s-\Delta)]\cdot c^*_{r-1} +$$
$$+ r(z_0(s,c^*_{r-1}) + x(s,\varepsilon), z_0(s-\Omega(\varepsilon), c^*_{r-1}) + x(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\}\, ds = 0;$$

здесь

$$\begin{aligned}
&r(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),z_0(s-\Omega(\varepsilon),c^*_{r-1})+x(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon):=\\
&\qquad=B[z(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon)-z(s-\Delta,\varepsilon)]+\varepsilon\beta^*\{Ax(s,\varepsilon)+B[z_0(s-\Omega(\varepsilon),c^*_{r-1})-\\
&\qquad\qquad-z_0(s-\Delta),c^*_{r-1})+x(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon)]\}+\varepsilon[A_1(s)x(s,\varepsilon)+\\
&\qquad\qquad+A_{\Delta 1}(s)x(s-\Delta,\varepsilon)+\varepsilon A_2(s)+R(z(s,\varepsilon),z(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),s,\varepsilon)]+\\
&\qquad\qquad+\varepsilon\bar\beta(\varepsilon)\{Ax(s,\varepsilon)+B[z(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon)-z_0(s-\Delta),c^*_{r-1})]\}+\\
&\qquad\qquad\qquad+\varepsilon^2\beta(\varepsilon)Z(z(s,\varepsilon),z(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),s,\varepsilon).
\end{aligned}$$

В случае кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (4) матрица B_0 вырождена. Обозначим $(\rho\times 1)$-мерную матрицу

$$\mathfrak{B}_0=\int_0^T H^*_\rho(s)\{[AX_{r-1}(s)+BX_{r-1}(s-\Delta)]\cdot c^*_{r-1}\}\,ds,$$

являющуюся производной левой части модифицированного уравнения (7) для порождающих амплитуд

$$\mathfrak{B}_0=\left.\frac{\partial F(c_{r-1},\beta)}{\partial\beta}\right|_{\substack{c_{r-1}=c^*_{r-1},\\ \beta=\beta^*}}.$$

Условие разрешимости $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодической задачи для автономной системы (1)

$$\varepsilon\bar\beta(\varepsilon)=-\mathfrak{B}_0^+\cdot\int_0^{2\pi}H^*_\rho(s)\cdot r((z(s,\varepsilon)z(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon))\,ds,$$

устанавливает зависимость между функцией $\beta(\varepsilon):=\beta^*+\bar\beta(\varepsilon),\ \bar\beta(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0],\ \beta(0)=0$, малым параметром ε и амплитудой c^*_{r-1} порождающего решения $z_0(\tau,c^*_{r-1})$. Последнее уравнение при условии $P_{\mathfrak{B}^*_0}=0$ имеет по меньшей мере одно решение, при этом T-периодическая задача для автономной системы (3) в окрестности порождающего решения $z_0(\tau,c^*_{r-1})$ имеет по меньшей мере одно решение, представимое операторной системой

$$z(\tau,\varepsilon)=z_0(\tau,c^*_{r-1})+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon,\quad \bar\beta(\varepsilon)=-\mathfrak{B}_0^+\cdot\int_0^{2\pi}H^*_\rho(s)\cdot r((z(s,\varepsilon),z(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon))\,ds,$$

$$\begin{aligned}
x(\tau,\varepsilon)=\varepsilon G\{B[z(s-\Omega(\varepsilon),\varepsilon)-z(s-\Delta,\varepsilon)]+\varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\times\\
\times Z(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,c^*_{r-1})+x(s-\Delta,\varepsilon),\varepsilon)\}(\tau).
\end{aligned}\tag{8}$$

При условии $P_{B^*_0}\neq 0,\ P_{\mathfrak{B}^*_0}=0$ будем говорить, что для T-периодической задачи для автономной системы (1) имеет место частный критический случай. Принципиальное отличие операторной системы (8) в частном критическом случае от аналогичной операторной системы в критическом случае первого порядка [3] состоит в том, что искомое решение периодической задачи для автономной системы (1) является функцией не только малого параметра ε, но и произвольной амплитуды c^*_{r-1} порождающего решения $z_0(\tau,c^*_{r-1})$. В свою очередь максимальное значение величины амплитуды c^*_{r-1} порождающего решения $z_0(\tau,c^*_{r-1})$ определяется, например, из условия сжимаемости оператора, определяемого операторной системой (8).

Для построения приближенного решения операторной системы (8) в частном критическом случае применим метод простых итераций; для его использования можно воспользоваться конструкцией обобщенного оператора Грина $G[f(s)](\tau)$ периодической задачи для дифференциальной системы с запаздыванием в критическом случае [3, 13]. В данной статье для построения приближений к решению операторной системы (8) аналогично [8, 9, 10, 14, 17, 16] будет использован метод наименьших квадратов. Предположим выполненным условие $P_{\mathfrak{B}_0^*} = 0$ и пусть

$$\{\varphi^{(j)}(\tau)\}_{j=1}^{\infty} = \varphi^{(1)}(\tau),\ \varphi^{(2)}(\tau),\ \ldots,\ \varphi^{(k)}(\tau),\ \ldots$$

— система линейно-независимых непрерывно-дифференцируемых T-периодических n-мерных вектор-функций. Решение T-периодической задачи для уравнения (3) ищем в малой порождающего решения $z_0(\tau, c^*_{r-1})$. Первое приближение $x_1(\tau,\varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (5) ищем, как T-периодическое решение системы

$$\begin{gathered} dx_1(\tau,\varepsilon)/dt = Ax_1(\tau,\varepsilon) + Bx_1(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon\beta^*\{A[z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x_1(\tau,\varepsilon)]+ \\ + B[z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}) + x_1(\tau-\Delta,\varepsilon)]\} + \varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)\times \\ \times \{Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0) + A_1(\tau)x_1(\tau,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(\tau)x_1(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)\}. \quad (9) \end{gathered}$$

Обозначим $(n \times k_1)$-матрицу

$$\varphi_1(\tau) = [\varphi_1^{(1)}(\tau)\ \ \varphi_1^{(2)}(\tau)\ \ \ldots\ \ \varphi_1^{(k_1)}(\tau)],$$

составленную из k_1 элементов системы функций $\{\varphi^{(j)}(\tau)\}_{j=1}^{\infty}$. Приближение к решению T-периодической задачи для системы (9) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon) := \xi_1(\tau,\varepsilon) \approx \varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}.$$

В общем случае первое приближение $\xi_1(t,\varepsilon)$ не является точным решением T периодической задачи для системы (9), поэтому потребуем

$$\begin{gathered} F(c_1(\varepsilon)) = ||(1+\varepsilon\beta^*)\{[A+\varepsilon A_1(\tau)]\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\beta^*[Az_0(\tau,c^*_{r-1})+ \\ + Bz_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1})] + \varepsilon Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0)+ \\ + [B+\varepsilon A_{\Delta 1}(\tau)]\xi_1(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(\tau)\} - \xi_1'(\tau,\varepsilon)||_{L^2[0,T]} \to \min \end{gathered}$$

при фиксированной матрице $\varphi_1(\tau)$. Функция

$$\begin{gathered} F(c_1(\varepsilon)) = \int_0^T \{(1+\varepsilon\beta^*)\{[A+\varepsilon A_1(\tau)]\xi_1(\tau,\varepsilon)+ \\ + \varepsilon Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0)+ \\ + [B+\varepsilon A_{\Delta 1}(\tau)]\xi_1(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(\tau)\} + \varepsilon\beta^*[Az_0(\tau,c^*_{r-1})+ \\ + Bz_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1})] - \xi_1'(\tau,\varepsilon)\}^*\times \\ \times \{(1+\varepsilon\beta^*)\{[A+\varepsilon A_1(\tau)]\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0)+ \\ + [B+\varepsilon A_{\Delta 1}(\tau)]\xi_1(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(\tau)\} + \varepsilon\beta^*[Az_0(\tau,c^*_{r-1})+ \\ + Bz_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1})] - \xi_1'(\tau,\varepsilon)\}d\tau \end{gathered}$$

представима в виде

$$F(c_1(\varepsilon)) = ||\Phi_1(\tau,\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)\{Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0)+ \\ + \varepsilon A_2(\tau)\} + \varepsilon\beta^*[Az_0(\tau,c^*_{r-1}) + Bz_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1})]||_{L^2[0,T]},$$

где

$$\Phi_1(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta^*)\{[A+\varepsilon A_1(\tau)]\varphi_1(\tau) + [B+\varepsilon A_{\Delta 1}(\tau)]\varphi_1(\tau-\Delta)\} - \varphi_1'(\tau).$$

Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)\cdot c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\int_0^T \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\{\beta^*[Az_0(\tau,c^*_{r-1})+ \\ + Bz_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1})] + (1+\varepsilon\beta^*)[Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0) + \varepsilon A_2(\tau)]\}d\tau,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{k_1}$ при условии невырожденности $(k_1\times k_1)$-матрицы Грама [1]

$$\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon) = \int_0^T \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_1(\tau,\varepsilon)\;d\tau.$$

Таким образом, при условии $\det[\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)]\neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot[\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)]^{-1}\cdot\int_0^T \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\{\beta^*[Az_0(\tau,c^*_{r-1})+ \\ + Bz_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1})] + (1+\varepsilon\beta^*)\{Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0) + \varepsilon A_2(\tau)\}\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) первое приближение к решению T-периодической задачи для уравнения (5) $x_1(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) \approx \varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon)$. Из условия разрешимости периодической задачи для автономной системы (1) в случае $P_{\mathfrak{B}_0^*}=0$ находим первое приближение

$$\bar\beta_1(\varepsilon) = -\mathfrak{B}_0^+\cdot\int_0^T H_\rho^*(s)\times r(z_0(s,c^*_{r-1}) + \xi_1(s,\varepsilon), z_0(s-\Delta,c^*_{r-1}) + \xi_1(s-\Delta,\varepsilon),\varepsilon)\;ds,$$

которое устанавливает зависимость между функцией $\beta_1(\varepsilon) := \beta^* + \bar\beta_1(\varepsilon)$, малым параметром ε и амплитудой c^*_{r-1} порождающего решения $z_0(\tau,c^*_{r-1})$. Здесь

$$r(z_0(s,c^*_{r-1}) + \xi_1(s,\varepsilon), z_0(s-\Delta,c^*_{r-1}) + \xi_1(s-\Delta,\varepsilon),\varepsilon) := \\ = [\beta^*A + A_1(s)]\xi_1(s,\varepsilon) + [\beta^*B + A_{\Delta 1}(s)]\xi_1(s-\Delta,\varepsilon)+ \\ + \varepsilon\beta^* Z(z_0(s,c^*_{r-1}) + \xi_1(s,\varepsilon), z_0(s-\Delta,c^*_{r-1}) + \xi_1(s-\Delta,\varepsilon),\varepsilon).$$

Первое приближение $\beta_1(\varepsilon)$ определяет первое приближение $\mathfrak{T}_1(\varepsilon) = T(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))$ к искомому периоду $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ решения задачи (1). Второе приближение $x_2(\tau,\varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (5) ищем, как T периодическое решение системы

$$dx_2(\tau,\varepsilon)/dt = Ax_2(\tau,\varepsilon) + Bx_2(\tau-\Delta,\varepsilon)+ \\ + B\{[z_0(\tau-\Omega_1(\varepsilon),c^*_{r-1}) + x_1(\tau-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon)] - [z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}) + x_1(\tau-\Delta,\varepsilon)]\}+ \\ + \varepsilon\beta_1(\varepsilon)\{A[z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x_2(\tau,\varepsilon)] + B[z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}) + x_2(\tau-\Delta,\varepsilon)]\}+ \\ + \varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))\{Z(z_0(\tau,c^*_{r-1}), z_0(\tau-\Delta,c^*_{r-1}),0) + A_1(\tau)x_2(\tau,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(\tau)x_2(\tau-\Delta,\varepsilon)+ \\ + \varepsilon A_2(\tau) + R(z_0(\tau,c^*_{r-1}) + x_1(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega_1(\varepsilon),c^*_{r-1}) + x_1(\tau-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}; \quad (10)$$

здесь

$$\Omega_1(\varepsilon) := \frac{\Delta}{1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)}.$$

Обозначим $(n \times k_2)$-матрицу

$$\varphi_2(\tau) = [\varphi_2^{(1)}(\tau) \ \ \varphi_2^{(2)}(\tau) \ \ \ldots \ \ \varphi_2^{(k_2)}(\tau)].$$

Приближение к решению T-периодической задачи для системы (10) ищем в виде

$$x_2(\tau,\varepsilon) := \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), \quad \xi_2(\tau,\varepsilon) \approx \varphi_2(\tau)c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}.$$

При условии невырожденности $\det[\Gamma(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)] \neq 0$ матрицы Грама

$$\Gamma(\varphi_2(\cdot),\varepsilon) = \int_0^T \Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_2(\tau,\varepsilon)\, d\tau$$

находим вектор

$$\begin{aligned} c_2(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot[\Gamma(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)]^{-1}\cdot\int_0^T \Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\times \\ \times\, \varrho(z_0(\tau,c_{r-1}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega_1(\varepsilon),c_{r-1}^*)+\xi_1(\tau-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau, \end{aligned}$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) второе приближение к решению T-периодической задачи для уравнения (5). Здесь

$$\Phi_2(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))\{[A+\varepsilon A_1(\tau)]\varphi_2(\tau) + [B+\varepsilon A_{\Delta 1}(\tau)]\varphi_2(\tau-\Delta)\} - \varphi_2'(\tau)$$

— $(n \times k_2)$-матрица,

$$\begin{aligned} &\varrho(z_0(\tau,c_{r-1}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega_1(\varepsilon),c_{r-1}^*)+\xi_1(\tau-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon) := \\ &\quad = B\{[z_0(\tau-\Omega_1(\varepsilon),c_{r-1}^*)+x_1(\tau-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon)] - [z_0(\tau-\Delta,c_{r-1}^*)+x_1(\tau-\Delta,\varepsilon)]\}+ \\ &\quad\quad + \varepsilon\bar\beta_1(\varepsilon)\{A[z_0(\tau,c_{r-1}^*)+x_1(\tau,\varepsilon)] + B[z_0(\tau-\Delta,c_{r-1}^*)+x_1(\tau-\Delta,\varepsilon)]\}+ \\ &\quad + \varepsilon^2\bar\beta_1(\varepsilon)\{Z(z_0(\tau,c_{r-1}^*), z_0(\tau-\Delta,c_{r-1}^*),0) + A_1(\tau)\xi_1(\tau,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(\tau)\xi_1(\tau-\Delta,\varepsilon)+ \\ &\quad\quad + \varepsilon A_2(\tau) + R(z_0(\tau,c_{r-1}^*)+x_1(\tau,\varepsilon), z_0(\tau-\Omega_1(\varepsilon),c_{r-1}^*)+x_1(\tau-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Из условия разрешимости периодической задачи для автономной системы (1) в случае $P_{\mathfrak{B}_0^*} = 0$ находим второе приближение

$$\bar\beta_2(\varepsilon) = -\mathfrak{B}_0^+\cdot\int_0^T H_\rho^*(s)\cdot r(z_2(s,\varepsilon), z_2(s-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\, ds,$$

которое устанавливает зависимость между функцией $\beta_2(\varepsilon) := \beta^* + \bar\beta_2(\varepsilon)$, малым параметром ε и амплитудой c_{r-1}^* порождающего решения $z_0(\tau,c_{r-1}^*)$. Функция $\beta_2(\varepsilon)$ определяет второе приближение $\mathfrak{T}_2(\varepsilon) = T(1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon))$ к искомому периоду $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ решения задачи (1), а также замену независимой переменной $t_2 = \tau(1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon))$. Продолжая рассуждения, предположим, что найдено приближение

$$x_{j+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \ldots \ + \xi_{j+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{j+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi_j(\tau)c_j(\varepsilon), \quad c_j(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_{j+1}}$$

к решению T-периодической задачи для уравнения (5) и приближение $\beta_j(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$; здесь

$$\varphi_{j+1}(\tau) = [\varphi_{j+1}^{(1)}(\tau) \ \ \varphi_{j+1}^{(1)}(\tau) \ \ \ldots \ \ \varphi_{j+1}^{(k_{j+1})}(\tau)], \quad j = 1, 2, \ \ldots$$

— $(1 \times k_{j+1})$-матрица. Следующее приближение к решению T-периодической задачи для уравнения (5) ищем в виде

$$x_{j+2}(\tau, \varepsilon) \approx \xi_1(\tau, \varepsilon) + \ \ldots \ + \xi_{j+2}(\tau, \varepsilon), \quad \xi_{j+2}(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau) c_{j+2}(\varepsilon), \quad c_{j+2}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_{j+2}};$$

здесь

$$\varphi_{j+2}(\tau) = [\varphi_{j+2}^{(1)}(\tau) \ \ \varphi_{j+2}^{(1)}(\tau) \ \ \ldots \ \ \varphi_{j+2}^{(\mu_1)}(\tau)]$$

— $(1 \times \mu_{j+2})$-матрица. Предположим, что приближение $z_{j+1}(\tau, \varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Z(z(\tau, \varepsilon), z(\tau - \Omega(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$ и не является искомым решением задачи (3). При условии невырожденности $(k_{j+2} \times k_{j+2})$-матрицы Грама

$$\Gamma(\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon) = \int_0^T \Phi_{j+2}^*(\tau, \varepsilon) \cdot \Phi_{j+2}(\tau, \varepsilon) \, d\tau$$

находим вектор

$$\begin{aligned} c_{j+2}(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot [\Gamma(\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon)]^{-1} \cdot \int_0^T \Phi_{j+2}^*(\tau, \varepsilon) \times \\ \times \{\varrho(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x_{j+1}(\tau, \varepsilon), z_0(\tau - \Omega_{j+1}(\varepsilon), c_{r-1}^*) + x_{j+1}(\tau - \Omega_{j+1}(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) - \\ - \varrho(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x_j(\tau, \varepsilon), z_0(\tau - \Omega_j(\varepsilon), c_{r-1}^*) + x_j(\tau - \Omega_j(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)\} \, d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{j+2}(\tau, \varepsilon) = (1 + \varepsilon \beta_{j+1}(\varepsilon))\{[A + \varepsilon A_1(\tau)]\varphi_{j+2}(\tau) + \\ + [B + \varepsilon A_{\Delta 1}(\tau)]\varphi_{j+2}(\tau - \Delta)\} - \varphi_{j+2}'(\tau) \end{aligned}$$

— $(n \times k_{j+2})$-матрица. Из условия разрешимости периодической задачи для автономной системы (1) в случае $P_{\mathfrak{B}_0^*} = 0$ находим приближение

$$\bar{\beta}_{j+2}(\varepsilon) = -\mathfrak{B}_0^+ \cdot \int_0^T H_\rho^*(s) \cdot r(z_{j+2}(s, \varepsilon), z_{j+2}(s - \Omega_{j+1}(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) \, ds,$$

которое устанавливает зависимость между функцией $\beta_{j+2}(\varepsilon) := \beta^* + \bar{\beta}_{j+2}(\varepsilon)$, малым параметром ε и амплитудой c_{r-1}^* порождающего решения $z_0(\tau, c_{r-1}^*)$. Продолжая рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *При наличии кратных* ($\det B_0 = 0$) *корней уравнения для порождающих амплитуд* (4) *при условии* $P_{\mathfrak{B}_0^*} = 0$ *критическая* T*-периодическая задача для автономной системы* (3) *имеет по меньшей мере одно решение, представимое операторной системой* (8) $x(\tau, \varepsilon) : \ x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[0, T], \ \ x(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \ \ x(\tau, 0) \equiv 0$ *и при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z_0(\tau, c_{r-1}^*)$. *Система* (1) *имеет при этом по меньшей мере одно* $\mathfrak{T}(\varepsilon)$*-периодическое решение* $z(t, \varepsilon) : \ z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[0, \mathfrak{T}(\varepsilon)], \ z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(\tau, c_{r-1}^*)$. *Для построения решения* T*-периодической задачи для автономной системы* (3) *при условии*

$$\det[\Gamma(\varphi_j(\cdot), \varepsilon)] \neq 0, \quad j \in \mathbb{N}$$

применима итерационная схема

$$x_1(\tau,\varepsilon)=\xi_1(\tau,\varepsilon)\approx\varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot[\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)]^{-1}\cdot\int_0^T\Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\{\beta^*[Az_0(\tau,c_{r-1}^*)+$$
$$+Bz_0(\tau-\Delta,c_{r-1}^*)]+(1+\varepsilon\beta^*)\{Z(z_0(\tau,c_{r-1}^*),z_0(\tau-\Delta,c_{r-1}^*),0)+\varepsilon A_2(\tau)\}\}d\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon)=\beta^*+\bar\beta_1(\varepsilon),\quad \bar\beta_1(\varepsilon)=-\mathfrak{B}_0^+\cdot\int_0^T H_\rho^*(s)\times$$
$$\times\, r(z_0(s,c_{r-1}^*)+\xi_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,c_{r-1}^*)+\xi_1(s-\Delta,\varepsilon),\varepsilon)\;ds;$$
$$x_2(\tau,\varepsilon)=\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\quad \xi_2(\tau,\varepsilon)\approx\varphi_2(\tau)c_2(\varepsilon),\quad c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{k_2},$$

$$c_2(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot[\Gamma(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)]^{-1}\cdot\int_0^T\Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\times$$
$$\times\,\varrho(z_0(\tau,c_{r-1}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),z_0(\tau-\Omega_1(\varepsilon),c_{r-1}^*)+\xi_1(\tau-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\;d\tau, \quad (11)$$
$$\bar\beta_2(\varepsilon)=-\mathfrak{B}_0^+\cdot\int_0^T H_\rho^*(s)\cdot r(z_2(s,\varepsilon),z_2(s-\Omega_1(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\;ds,\;\dots\;;$$
$$x_{j+2}(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)+\;\dots\;+\xi_{j+2}(\tau,\varepsilon),\quad \xi_{j+2}(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_{j+2}(\varepsilon),\quad c_{j+2}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{k_{j+2}},$$

$$c_{j+2}(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot[\Gamma(\varphi_{j+2}(\cdot),\varepsilon)]^{-1}\cdot\int_0^T\Phi_{j+2}^*(\tau,\varepsilon)\times$$
$$\times\,\{\varrho(z_0(\tau,c_{r-1}^*)+x_{j+1}(\tau,\varepsilon),z_0(\tau-\Omega_{j+1}(\varepsilon),c_{r-1}^*)+x_{j+1}(\tau-\Omega_{j+1}(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\,\varrho(z_0(\tau,c_{r-1}^*)+x_j(\tau,\varepsilon),z_0(\tau-\Omega_j(\varepsilon),c_{r-1}^*)+x_j(\tau-\Omega_j(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\}\;d\tau,$$
$$\bar\beta_{j+2}(\varepsilon)=-\mathfrak{B}_0^+\cdot\int_0^T H_\rho^*(s)\cdot r(z_{j+2}(s,\varepsilon),z_{j+2}(s-\Omega_{j+1}(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\;ds,$$
$$\beta_{j+2}(\varepsilon):=\beta^*+\bar\beta_{j+2}(\varepsilon),\quad \Omega_{j+2}(\varepsilon):=\frac{\Delta}{1+\varepsilon\beta_{j+2}(\varepsilon)},\;\dots\;.$$

С учетом замен независимой переменной $t_{j+2}=\tau(1+\varepsilon\beta_{j+2}(\varepsilon))$ итерационная схема (11) определяет последовательность $\mathfrak{T}_{j+2}(\varepsilon)$-периодических приближений

$$z_{j+2}(t,\varepsilon)=z_0(t,c_{r-1}^*)+x_{j+2}(t,\varepsilon),\quad \mathfrak{T}_{j+2}(\varepsilon)=T(1+\varepsilon\beta_{j+2}(\varepsilon))$$

к решению решения $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодической задачи для автономной системы (1).

Пример. Исследуем задачу о построении $\mathfrak{T}(\varepsilon)$-периодического решения

$$y(\cdot,\varepsilon)\in C^1[0,\mathfrak{T}(\varepsilon)],\quad y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\quad \mathfrak{T}(0)=2\pi$$

уравнения типа Дюффинга с запаздыванием

$$z'(t,\varepsilon)+z\left(t-\frac{\pi}{2},\varepsilon\right)=\varepsilon\cdot z^3(t,\varepsilon) \quad (12)$$

в малой окрестности периодического решения порождающего уравнения

$$z_0'(\tau,\varepsilon) + z_0\left(\tau - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) = 0.$$

Характеристическое уравнение порождающей системы имеет простые чисто мнимые корни $\lambda = \pm i$, определяющие общее решение

$$y(\tau, c_r) = H_r(\tau)c_r, \quad H_r(\tau) = \left[\begin{array}{cc} \cos\tau & \sin\tau \end{array}\right], \quad c_r \in \mathbb{R}^2.$$

2π-периодической задачи для сопряженного уравнения. Общее 2π-периодическое решение порождающего уравнения

$$z_0(\tau, c_r) = X_r(\tau)c_r, \quad c_r := (c_r^{(1)}, c_r^{(2)}) \in \mathbb{R}^2, \quad X_r(\tau) = \left[\begin{array}{cc} \cos\tau & \sin\tau \end{array}\right]$$

фиксацией начала отсчета независимой переменной приводится к виду $z_0(\tau, c_{r-1}) = c_{r-1} \cdot \cos\tau$. Оставляя только одну линейно-независимую строку уравнения для порождающих амплитуд (4), получаем эквивалентное выражение

$$F_\rho(c_{r-1}, \beta) = \frac{\pi c_{r-1}}{4}(3c_{r-1}^2 - 4\beta) = 0,$$

имеющее кроме нулевого ($c_{r-1}^* = 0 \in \mathbb{R}^1$) бесконечное множество нетривиальных решений, например,

$$c_{r-1}^* = \frac{1}{10}, \quad \beta^* = \frac{3}{400}.$$

Этому корню соответствует вырожденная матрица B_0 и невырожденная матрица

$$\mathfrak{B}_0 = -\frac{\pi}{10} \neq 0,$$

следовательно в задаче о построении периодического решения уравнения (12) типа Дюффинга с запаздыванием имеет место частный критический случай. Для первого шага итерационной схемы (11) положим $\varphi_1(\tau) = [\cos 3\tau \quad \cos 5\tau \quad]$. Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $z_0(\tau, c_{r-1}^*) = c_{r-1}^* \cdot \cos\tau$ невырождена, при этом

$$\xi_1(\tau,\varepsilon) \approx \varepsilon \cdot \{(-\frac{1}{16\ 000} - \frac{3\varepsilon}{5\ 120\ 000} + \frac{\varepsilon^2}{4\ 551\ 111\ 111}) \cdot \cos 3\tau + \\ + (\frac{3\varepsilon}{25\ 600\ 000} + \frac{\varepsilon^2}{568\ 888\ 888}) \cdot \cos 5\tau\}.$$

Первое приближение $\beta_1(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определяет итерационная схема (11)

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta^* + \bar\beta_1(\varepsilon), \quad \bar\beta_1(\varepsilon) \approx \frac{3\varepsilon}{40} \cdot (\frac{13}{16\ 000} + \frac{27\varepsilon}{25\ 600\ 000} + \\ + \frac{\varepsilon^2}{210\ 051\ 282} + \frac{\varepsilon^3}{121\ 362\ 962\ 963} + \frac{\varepsilon^4}{44\ 810\ 940\ 222\ 847}).$$

Таким образом, найдено $\mathfrak{T}_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))$-периодическое первое приближение к решению уравнения Дюффинга с запаздыванием

$$z_1(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x_1(\tau,\varepsilon), \quad x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon).$$

Для оценки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения Дюффинга с запаздыванием определим невязки нулевого

$$\Delta_0(\varepsilon) := ||z_0'(\tau, c_{r-1}^*) + z_0(\tau - \Delta, c_{r-1}^*) - \varepsilon \cdot (z_0(\tau - \Delta, c_{r-1}^*))^3||_{C[0;2\pi]}$$

и первых приближений

$$\Delta_1(\varepsilon) := ||z_1'(\tau, \varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta^*)\{z_1(\tau - \Delta, \varepsilon) - \varepsilon \cdot (z_1(\tau - \Delta, \varepsilon))^3\}||_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_{1\beta}(\varepsilon) := ||z_1'(\tau, \varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))\{z_1(\tau - \Delta, \varepsilon) - \varepsilon \cdot (z_1(\tau - \Delta, \varepsilon))^3\}||_{C[0;2\pi]}.$$

Положив $\varepsilon = 0,1$, имеем

$$\Delta_0(\varepsilon) \approx 0,0001, \quad \Delta_1(\varepsilon) \approx 6,09\;571 \cdot 10^{-8}, \quad \Delta_{1\beta}(\varepsilon) \approx 6,88\;689 \cdot 10^{-11}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки имеют вид

$$\Delta_0(\varepsilon) \approx 0,00\;001, \quad \Delta_1(\varepsilon) \approx 6,09\;395 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_{1\beta}(\varepsilon) \approx 6,88\;674 \cdot 10^{-14}.$$

Список цитируемых источников

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М. Наука., 1965. — 408 с.
2. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М. Мир., 1967. — 548 с.
3. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН Украины. 1991 № 9. С. 9 — 13.
4. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. — К.: Изд-во Киев. ун-та, 1969. — 309 с.
5. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. — М.: Гостехиздат, 1951. — 256 с.
6. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М. Мир., 1984. — 424 с.
8. *Чуйко С.М., Чуйко Ан.С.* О приближенном решении периодических краевых задач с запаздыванием методом наименьших квадратов // Динамические системы.– 2010.– **28**, С. 133-140.
9. *Чуйко С.М., Чуйко Ан.С.* О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом наименьших квадратов // Динамические системы. — 2011. — **29**, С. 103 — 111.
10. *Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко Ан.С.* Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае // Комп. исследов. и моделирование. — 2011.— **3**. — №4. — С. 337 — 357.
11. *Эльсгольц Л.Э.* Некоторые свойства периодических решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами. — Вестник МГУ. Сер. матем., мех., астроном., физ., химия. № 5. – 1959. – 229 – 234.
12. *Boichuk A., Chuiko S.* Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases // Differential Equations. – 1992.– № 10, P. 1353 – 1358.
13. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
14. *Chuiko S.M.* On approximate solution of boundary value problems by the least square method. // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — **11**. — 2008. № 4, P. 585 — 604.
15. *Chuiko S.M.* A weakly nonlinear boundary value problem in a particular critical case // Ukr. Math. Zh. 2009. — **61**. — № 4. — P. 548 — 562.
16. *Chuiko S.M., Chuiko A.S.* On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — **14**. — 2012. № 3. C. 445 — 460.
17. *Chuiko S.M., Starkova O.V.* On the approximate solution of autonomous boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations.– **12**.– 2009. № 4. C. 556 – 573.

Получена 04.11.2013