Динамические системы, вып. 23 (2007), 95–98

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.432

Спектральное представление самосопряженной дилатации одного класса операторов

Ю. Л. Кудряшов

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007.

Аннотация. В статье приводится явное построение спектрального представления самосопряженной дилатации операторов, которые являются правильными расширениями симметрического оператора с индексами дефекта $(1,1)$. При этом непосредственно вычисляются дефектные операторы и квадратные корни из них. Такого класса операторами являются, например, операторы Штурма-Лиувилля, заданные определенным образом. Полученные результаты могут быть использованы для построения функциональной модели и обобщенных собственных функций.

1. Введение

При исследовании неограниченных операторов в гильбертовом пространстве применяется понятие характеристической функции и дилатации оператора. С их помощью строится функциональная модель оператора [1, 2].

Для построения характеристической функции и дилатации используются дефектные операторы, характеризующие степень отклонения данного оператора от самосопряженного.

А.В. Кужель ввел понятие правильного расширения эрмитова оператора. Для правильных расширений симметрического оператора с индексами $(1,1)$ и строятся дефектные операторы. В этом случае для одного класса операторов оказалось возможным их вычисление, а в дальнейшем и построение функциональной модели.

Пусть A_0 – симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и

$$\dim \mathcal{N}_\lambda = \dim \mathcal{N}_{\bar\lambda} = 1, \quad g_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda, \quad g_{\bar\lambda} \in \mathcal{N}_{\bar\lambda}, \quad \lambda \neq \bar\lambda,$$

где $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{H} \ominus \overline{(A_0 - \alpha I)D(A_0)}$ – дефектное подпространство оператора A_0, отвечающее числу α.

Пусть $\lambda = i$ и зафиксируем векторы g_i и g_{-i}. Рассмотрим расширение A оператора A_0 с областью определения:

$$D(A) = \{f \in \mathcal{H} | f = f_0 + \alpha(a g_i + b g_{-i})\},$$

где $f_0 \in D(A_0)$, $\{a, b, \alpha\} \subset \mathbb{C}$, a и b – постоянные, $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$ и

$$Af := A_0 f_0 + \alpha \cdot i(bg_{-i} - ag_i).$$

Определение 1. Оператор F называют правильным расширением эрмитова оператора H, если $H \subset G_F$, где G_F – эрмитова часть оператора F [3].

2. Свойства оператора A

Легко видеть, что A – правильное расширение оператора A_0, так как

$$G_A = D(A_0).$$

Утверждение 1. *Оператор A является диссипативным, если $|a| \cdot ||g_i|| \leq |b| \cdot ||g_{-i}||$.*

Доказательство. Пусть $f \in D(A)$, тогда

$$\begin{aligned}&\Im(Af, f) = \Im(A_0 f_0 + \alpha i(bg_{-i} - ag_i), f_0 + \alpha(ag_i + bg_{-i})) = \Im(A_0 f_0, f_0) +\\ &\Im[\bar{\alpha}(A_0 f_0, ag_i + bg_{-i}) + \alpha i(bg_{-i} - ag_i, f_0) + |\alpha|^2 i(bg_{-i} - ag_i, ag_i + bg_{-i})],\end{aligned}$$

так как $A_0^* g_{\pm i} = \pm i g_{\pm i}$, $\Im(A_0 f_0, f_0) = 0$ и $(g_{-i}, g_{-i}) = 0$, то

$$\Im(Af, f) = |\alpha|^2(|b|^2 \cdot ||g_{-i}||^2 - |a|^2 \cdot ||g_i||^2) \geq 0.$$

□

Утверждение 2. *$-i \in \rho(A)$.*

Доказательство. Так как A – диссипативный, то $-i$ – точка регулярного типа. Покажем, что $(A + iI)D(A) = \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}&(A + iI)f = A_0 f_0 + \alpha i(bg_{-i} - ag_i) + if_0 + \alpha i(ag_i + bg_{-i}) =\\ &(A_0 + iI)f_0 + 2\alpha i b g_{-i} = (A_0 + iI)f_0 + \beta g_{-i}.\end{aligned}$$

□

Утверждение 3. *Рассмотрим операторы:*

$$\begin{aligned}B &= iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^* R_{-i}\\ \tilde{B} &= iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i} R_{-i}^*,\end{aligned}$$

где $R_{-i} = (A + iI)^{-1}$, тогда

$$Bg_{-i} = \kappa g_{-i}, \quad \tilde{B} g_i = \kappa g_i, \quad \kappa = \frac{1}{2}(1 - |\frac{a}{b}|^2 \cdot \frac{||g_i||^2}{||g_{-i}||^2}).$$

Доказательство. Так как $B : \mathcal{H} \to \mathcal{N}_{-i}$ и $Bf = 0$ ($\forall f \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{N}_{-i}$), то $Bg_{-i} = \frac{1}{2}\kappa g_{-i}$, $\kappa > 0$. Для вычисления κ воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} R_{-i}g_{-i} &= \tfrac{1}{2}iC_1(i)g_i - \tfrac{1}{2}ig_{-i}, \\ R^*_{-i}g_{-i} &= \tfrac{1}{2}ig_i - \tfrac{1}{2}iC_2(i)g_{-i}, \end{aligned}$$

которые доказаны в [6]. Тогда $Bg_{-i} = \frac{1}{2}(1 - C_1(i)C_2(i))g_{-i}$.

Поскольку $A_0 \subset A \subset A_0^*$, то

$$D(A^*) = \{\varphi \in \mathcal{H} | \varphi = \varphi_0 + \beta(a^*g_i + b^*g_{-i})\},$$

где $\varphi_0 \in D(A_0^*)$, $\{a^*, b^*, \beta\} \subset \mathbb{C}$, a^* и b^* – постоянные, $|a^*|^2 + |b^*|^2 \neq 0$.

Числа a^* и b^* найдем из равенства

$$(Af, \varphi) = (f, A^*\varphi) \quad (\forall f \in D(A) \text{ и } \varphi \in D(A^*)),$$

где

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \alpha(ag_i + bg_{-i}), \\ \varphi &= \varphi_0 + \beta(a^*g_i + b^*g_{-i}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} Af &= A_0f_0 + \alpha i(bg_{-i} - ag_i), \\ A^*\varphi &= A_0\varphi_0 + \beta i(b^*g_{-i} - a^*g_i). \end{aligned}$$

$$(Af, \varphi) - (f, A^*\varphi) = 2\alpha ib\bar{\beta}\bar{b}^*||g_{-i}|| - 2\alpha ia\bar{\beta}\bar{a}^*||g_i||^2 = 0.$$

$$b\bar{b}^*||g_{-i}||^2 = a\bar{a}^*||g_i||^2.$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя

$$a^* = \frac{\bar{b}}{||g_i||^2}, \quad b^* = \frac{\bar{a}}{||g_{-i}||^2}.$$

Как показано в [4] $C_1(i)C_2(i) = \dfrac{ab^*}{ba^*}$, тогда $Bg_{-i} = 0,5\kappa g_{-i}$. Аналогично доказывается, что $\tilde{B}g_i = 0,5\kappa g_i$. □

3. Структура самосопряженной дилатации

Построим оператор S, который является (как доказано в [5]) самосопряженной дилатацией оператора A. Оператор S будет действовать в пространстве

$$H_- \oplus \mathcal{H} \oplus H_+, \text{ где } H_- = L_2(-\infty, 0; \mathcal{N}_i), \quad H_+ = L_2(0, \infty; \mathcal{N}_{-i}).$$

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} \in D(S)$, тогда и только тогда, когда

1) $h_-(t) = C_-(t)g_i$, $h_+(t) = C_+(t)g_{-i}$, $C_-(t) \in W_2^1(-\infty,0;\mathbb{C})$, $C_+(t) \in W_2^1(0,\infty;\mathbb{C})$;

2) $\varphi = h_0 + C_-(0)\sqrt{\frac{\kappa}{2}}g_i \in D(A)$;

3) $(C_+(0) + \frac{b^*}{a^*}g_{-i}) = (A+iI)[\sqrt{\kappa}h_0 + \sqrt{\frac{\kappa}{2}}g_iC_-(0)]$.

$$Sh = S\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{dC_-(t)}{dt}g_i \\ -ih_0 + (A+iI)\varphi \\ i\frac{dC_+(t)}{dt}g_{-i} \end{pmatrix}.$$

Список цитируемых источников

1. *Золотарев В.А.* Аналитические методы спектральных представлениий несамосопряженных и неунитарных операторов. — Харьков: ХНУ. — 2003. — 342 с.
2. *Золотарев В.А.* Функциональная модель ограниченного оператора //Мат. физика, анализ, геометрия. — 2001. — Т.2, Вып.2. — С. 158–174.
3. *Кужель А.В.* Правильные расширения эрмитовых операторов // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 1. — С. 30–33.
4. *Чернова Г.И.* Об одном случае вычисления характеристических функций линейных операторов // Динамические системы. — 1983. — Вып. 2. — С. 122–129.
5. *Кудряшов Ю.Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов // Теория функций, функц. анализ и их прил.. — 1982. — Вып. 37. — С. 51–54.
6. *Кужель А.В.*Аналог формулы М.Г.Крейна для резольвенты несамосопряженных расширений эрмитова оператора // Теория функций, функц. анализ и их прил.. — 1982. — Вып. 36. — С. 49–55.

Получена 13.11.2007