Динамические системы, вып. 22 (2007), 109–114

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9

Модифицированный метод простых итераций для некритической краевой задачи[1]

С.М. Чуйко

Славянский государственный педагогический университет,
Славянск 84112. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Для построения решений слабонелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в некритическом случае предложен модифицированный метод простых итераций.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о нахождении решения $z(t,\varepsilon) \in C^1[a;b]$, $C[0;\varepsilon_0]$ краевой задачи

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{1}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение $z_0(t) \in C^1[a;b]$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^n. \tag{2}$$

Здесь $A(t)-$ $(n \times n)-$ мерная матрица и $f(t)-$ $n-$ мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a;b]$ действительные функции, $Z(z,t,\varepsilon)-$ нелинейная вектор-функция, непрерывно-дифференцируемая по z в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по t на отрезке $[a;b]$ и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0;\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)-$ линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$ нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b] \to R^n$, причем второй функционал непрерывно-дифференцируем (в смысле Фреше) по неизвестной z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируем по малому параметру ε на отрезке $[0;\varepsilon_0]$.

В некритическом случае, когда $P_{Q^*} = 0$ порождающая задача (2) имеет единственное решение $z_0(t) = G[f(s);\alpha](t)$. Здесь $X(t)-$ нормальная $(X(0) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (2), $Q = \ell X(\cdot)-$ $(n \times n)-$ матрица, $P_{Q^*} : R^n \to N(Q^*)-$ $(n \times n)-$ мерная матрица-ортопроектор,

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) = K\Big[f(s)\Big](t) - X(t)Q^+\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований (код 2201020)

© *С.М. ЧУЙКО*

обобщенный оператор Грина [1]; $K\Big[f(s)\Big](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds-$ оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (2), Q^+- псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [4]. В некритическом случае задача (2) разрешима для любых нелинейностей $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ краевой задачи (1); искомое решение этой задачи $z(t,\varepsilon) = z_0(t) + x(t,\varepsilon)$ ищем в окрестности порождающего решения $z_0(t)$. Для нахождения возмущения $x(t,\varepsilon) \in C^1[a;b], C[0;\varepsilon_0]$ получаем задачу

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \quad \ell\, x(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{3}$$

Решение задачи (3) представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z,t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0:$

$$Z(z_0(t) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = Z(z_0(t), t, 0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon);$$

здесь

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\, =\, z_0(t),\\ \varepsilon\, =\, 0}}, \quad A_2(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\, =\, z_0(t),\\ \varepsilon\, =\, 0}}.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому и второму аргументу аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, выделяем линейную $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ часть этого функционала по x и линейную $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot))$ часть этого функционала по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0:$

$$J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot), 0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot)) + J_1(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Оператор

$$\Phi_0 x(t,\varepsilon) = \varepsilon X(t)Q^+\Bigg\{J(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[Z(z_0(s) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\} + \varepsilon K\Big[Z(z_0(s) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](t)$$

действует из пространства непрерывных на отрезках $[a;b]$ и $[0;\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций $x(t,\varepsilon) \in C^1[a;b], C[0;\varepsilon_0]$ в это же пространство. Операторная система $x(t,\varepsilon) = \Phi_0 x(t,\varepsilon)$ в некритическом случае эквивалентна задаче (3) на множестве функций $x(t,\varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$, причем для построения решений этой операторной системы применим [1, 2] метод простых итераций. На основании этого метода получаем итерационную процедуру

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \Phi_0 x_k(t,\varepsilon),\ x_0(t,\varepsilon) \equiv 0,\ k = 0, 1,\ \dots\ . \tag{4}$$

Для метода простых итераций характерна простота и численная устойчивость, однако при вычислении последовательных итераций в правой части равенства (4) на каждом шаге приходится вычислять одни и те же слагаемые, что приводит к последовательному накоплению ошибок и увеличению объема вычислений. Целью данной статьи является построение модифицированной схемы последовательных итераций, в рамках которой искомое приближение к решению задачи (1) представимо в виде ряда, каждый член которого определяется при помощи трехшаговой итерационной процедуры.

2. Итерационная процедура. Первое приближение $x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon)$ к решению задачи (3) ищем, как решение краевой задачи первого приближения

$$dx_1/dt = A(t)x_1 + \varepsilon Z(z_0(t), t, 0), \quad \ell\ x_1(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot), 0)$$

в виде

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s), s, 0); J(z_0(\cdot), 0)\Big](t).$$

Второе приближение $x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ к решению задачи (3) ищем, как решение задачи второго приближения

$$dx_2/dt = A(t)x_2 + \varepsilon\Big\{Z(z_0(t), t, 0) + A_1(t)x_1 + \varepsilon A_2(t)\Big\},$$

$$\ell\ x_2(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Big\{J(z_0(\cdot), 0) + \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot))\Big\}.$$

Для нахождения вектора $\xi_2(t,\varepsilon)$, с учетом задачи первого приближения, приходим к системе

$$d\xi_2/dt = A(t)\xi_2 + \varepsilon\Big\{A_1(t)\xi_1 + \varepsilon A_2(t)\Big\},\ \ell\ \xi_2(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Big\{\ell_1\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot))\Big\},$$

решение которой представимо в виде

$$\xi_2(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)\xi_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s);\ \ell_1\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot))\Big](t).$$

Третье приближение $x_3(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon)$ к решению задачи (3) определяет система

$$d\xi_3/dt = A(t)\xi_3 + \varepsilon\Big\{A_1(t)\xi_2 + R_1(z_0(t) + x_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big\},$$

$$\ell\xi_3(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Big\{\ell_1\xi_2(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot) + x_1(\cdot,\ \varepsilon), \varepsilon)\Big\},$$

решение которой представимо в виде

$$\xi_3(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)\xi_2(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s) + x_1(s,\varepsilon), t, \varepsilon); \ell_1\xi_2(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot) + x_1(\cdot,\ \varepsilon), \varepsilon)\Big](t).$$

Четвертое приближение $x_4(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon) + \xi_4(t,\varepsilon)$ к решению задачи (3) определяет система

$$d\xi_4/dt = A(t)\xi_4 + \varepsilon\Big\{A_1(t)\xi_3 + R_1(z_0 + x_2, t, \varepsilon) - R_1(z_0 + x_1, t, \varepsilon)\Big\},$$

$$\ell\xi_4(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Big\{\ell_1\xi_3(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot) + x_2(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot) + x_1(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\Big\},$$

решение которой представимо в виде

$$\xi_4(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)\xi_3(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s) + x_2(s,\varepsilon), s, \varepsilon) - R_1(z_0(s) + x_1(s,\varepsilon), s, \varepsilon);$$

$$\ell_1\xi_3(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot) + x_2(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot) + x_1(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\Big](t).$$

Последовательность приближений $\{x_k(t,\varepsilon)\}$ $k = 1, 2, 3,\ \ldots$ представляет традиционный метод простых итераций, поэтому для оценки длины отрезка $[0;\varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \le \varepsilon_0$, на котором сохраняется сходимость полученной итерационной процедуры к искомому решению задачи (3) можно воспользоваться формулой [5] или мажорирующими уравнениями Ляпунова [6]. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *В некритическом случае ($P_{Q^*} = 0$) порождающая задача (2) разрешима при любых неоднородностях дифференциальной системы и краевого условия (2) и имеет единственное решение $z_0(t) = G\Big[f(s);\alpha\Big](t)$. Задача (1) при этом разрешима для любых нелинейностей дифференциальной системы $Z(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ и краевого условия $J(z(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)$ и имеет единственное решение $z(t,\varepsilon) \in C^1[a;b]$, $C[0;\varepsilon^*]$, для построения которого (с учетом замены $z(t,\varepsilon) = z_0(t) + x(t,\varepsilon)$) применима сходящаяся при $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*]$ итерационная процедура*

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s), s, 0); J(z_0(\cdot), 0)\Big](t);\ x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),$$

$$\xi_2(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)\xi_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s);\ \ell_1\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot))\Big](t).$$

$$x_3(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon), \tag{5}$$

$$\xi_3(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)\xi_2(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s) + x_1(s,\varepsilon), t, \varepsilon);$$

$$\ell_1\xi_2(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot) + x_1(\cdot,\ \varepsilon), \varepsilon)\Big](t),\ \dots\ ,$$

$$x_{k+3}(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k+3} \xi_i(t,\varepsilon), \quad k = 1, 2, 3,\ \dots\ ,$$

$$\xi_{k+3}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)\xi_{k+2}(s,\varepsilon) + R_1(z_0 + x_{k+1}, s, \varepsilon) - R_1(z_0 + x_k, s, \varepsilon);$$

$$\ell_1\xi_{k+2}(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot) + x_{k+1}(\cdot,\ \varepsilon), \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot) + x_k(\cdot,\ \varepsilon), \varepsilon)\Big](t).$$

Наличие производных $A_2(t)$ и $\ell_2(z_0(\cdot))$, отличают итерационную процедуру (5) от традиционной [1, 2]; кроме того, итерационная процедура (5) использует представление искомого решения в виде суммы последовательности возмущений

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon),\ x_2(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ x_3(t,\varepsilon) = x_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon),\ \dots\ ,$$

не является разложением искомого решения по степеням малого параметра и не предполагает разложений нелинейностей по степеням решения задачи (3). Правые части уравнений итерационной процедуры (5) в отличие от традиционной [1, 2] не содержат повторяющихся слагаемых, поэтому точность приближенных вычислений возрастает.

3. Пример построения итерационной процедуры. Докажем существование и построим первые приближения к решению $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0;T], C[0;\varepsilon_0]$ периодической задачи для уравнения

$$\frac{dz}{dt} = z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \arccos z, \tag{6}$$

Поскольку $Q = 1 - e^T \neq 0$, то имеет место некритический случай. Таким образом, согласно доказанной теореме, уравнение (6) имеет единственное периодическое решение в малой окрестности порождающего решения $z_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Первое приближение к отклонению от порождающего решения — функция $x_1(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon\pi}{4}$. Второе приближение $x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ к решению периодической задачи для уравнения (6) определяет функция $\xi_2(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2\pi}{4}\sqrt{2}$. Продолжая итерации, на десятом шаге приходим к разложению

$$z_{10}(\varepsilon) \approx 0,707\ 107 - 0,785\ 398 \cdot \varepsilon - 1,11\ 072 \cdot \varepsilon^2 - 0,953\ 946 \cdot \varepsilon^3 - 0,517\ 899 \cdot \varepsilon^4 -$$

$$-0,354\ 031 \cdot \varepsilon^5 - 0,642\ 026 \cdot \varepsilon^6 - 0,970\ 676 \cdot \varepsilon^7 - 1,05\ 107 \cdot \varepsilon^8 -$$

$$-1,24\ 534 \cdot \varepsilon^9 - 1,96\ 640 \cdot \varepsilon^{10} - 8,76\ 983 \cdot \varepsilon^{11} + 34,0\ 450 \cdot \varepsilon^{12}.$$

Длина отрезка $[0;\varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость полученной итерационной процедуры к искомому решению периодической задачи для уравнения (6) может быть оценена аналогично [5] величиной $\varepsilon_* \approx 0,1661 \leq \varepsilon^*$. Для оценки точности полученного приближения заметим, что искомое решение периодической задачи для уравнения (6) является положением равновесия этого уравнения, поэтому достаточно оценить невязку $\Delta(\varepsilon) = |z_{10}(\varepsilon) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \arccos z_{10}(\varepsilon)|$; к примеру, $\Delta(0,1) \approx 2,23\ 822 \cdot 10^{-11}$; $\Delta(0,3) \approx 1,08\ 397 \cdot 10^{-6}$. Для сравнения точности полученного десятого приближения к решению периодической задачи для уравнения (6) вычислим невязку $\Delta_1(\varepsilon)$ десятого приближения по формуле (4); к примеру, $\Delta_1(0,1) \approx 9,15\ 648 \cdot 10^{-11}$; $\Delta_1(0,3) \approx 3,19\ 807 \cdot 10^{-6}$.

Список цитируемых источников

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.; Наука, 1979. — 432 с.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.; Гостехиздат, 1956. — 491 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.; Наука, 1988. — 552 с.
5. *Чуйко С.М., Чуйко О.С.* Оцінка області збіжності ітераційного процесу для слабконелінійної крайової задачі в некритичному випадку // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. — 2005. — Т. 1, С. 22–27.
6. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. — Кишинев.; Штиница, 1974. — 292 с.

Получена 01.04.2007