Динамические системы, вып. 27 (2009), 107–114

УДК 539.3

Волновые процессы в упругой среде с цилиндрической полостью, подкреплённой цилиндрической оболочкой

В.Н. Тищенко, А.В. Пан

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007.

Аннотация. Рассмотрены собственные волновые процессы в неоднородной среде, состоящей из тонкой прямолинейной цилиндрической оболочки, разделяющей движущуюся несжимаемую жидкость и упругое пространство вне оболочки. Приведены качественные сравнительные характеристики в пространстве безразмерных параметров: отношение модулей сдвига, отношение плотностей и параметра тонкостенности, получены т. н. "прикладные" теории, которые являются основными при реальном применении в практике расчётов

Ключевые слова: волновой процесс, цилиндрическая оболочка, несжимаемая жидкость, упругое пространство, параметры неоднородности.

1.

Изучаются волновые процессы в неоднородной среде, состоящей из упругой цилиндрической оболочки толщины h и внешнего радиуса a, подкрепляющей цилиндрическую полость в упругом пространстве. Полость оболочки наполнена незжимаемой жидкостью, движущейся со скоростью V_0 вдоль оси оболочки.

Целью исследования является построение прикладной теории динамики подобного рода неоднородных сред, имеющей применение в транспортировке нефти и газа, которая описывала т. н. "длинные волны". Подобная теория известна в гидродинамике как теория "мелкой воды"[1], получившая широкое применение в практике расчёта течений несжимаемой жидкости в руслах рек.

При изучении динамики этой среды, кроме параметра тонкостенности $\epsilon = h/a$, в задаче присутствуют безразмерные параметры жёсткости $\mu = \mu_2/\mu_1$ (1 — упругая среда, 2 — среда оболочки, 3 — жидкость), плотностей $\overline{\rho}_2 = \rho_2/\rho_1$, $\overline{\rho}_3 = \rho_3/\rho_1$, скоростной характеристики $\delta = \overline{\rho}_2/\mu$. В пространстве этих параметров и будут построены прикладные теории, описывающие собственные длинноволновые процессы вдоль поверхности цилиндрической полости.

2.

Для решения осесимметричных задач движения упругой среды, оболочки и жидкости используются представления: $\overrightarrow{u}_j = \begin{pmatrix} u_{zj} \\ u_{rj} \end{pmatrix} e^{-ikz}e^{i\omega t}, (i = \sqrt{-1}, j =$

$1,2)$, $\overrightarrow{\sigma_{rj}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rzj} \\ \sigma_{rrj} \end{pmatrix} e^{-ikz} e^{i\omega t}$, так что действие f_j — перемещение + нормальное напряжение — удовлетворяет уравнению первого порядка: $\dfrac{d\overrightarrow{F}_j}{dr} = \widehat{M}_j(r)\overrightarrow{F}_j$, $\overrightarrow{f}_j = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u}_j \\ \overrightarrow{\sigma}_{rj} \end{pmatrix} = \overrightarrow{F}_j(\omega, k, r)e^{-ikz}e^{i\omega t}$. $\widehat{M}$ — матрица, которая есть следствие законов движения и Гука при исключении из них компонентов вектора $\overrightarrow{\sigma}_z$, не входящих в граничный вектор $\overrightarrow{\sigma}_r$:

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} \widehat{m}_{11} & \widehat{m}_{12} \\ \widehat{m}_{21} & \widehat{m}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{m}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ (1-2\gamma_j)ik & -\frac{1-2\gamma_j}{r} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{m}_{12} = \tfrac{1}{\mu_j}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_j \end{pmatrix},$$

$$\widehat{m}_{21} = \begin{pmatrix} 4\mu_j(1-\gamma_j)k^2 - \rho_j\omega^2 & -\frac{2(1-2\gamma_j)ik}{r}\mu_j \\ \frac{2(1-2\gamma_j)ik}{r}\mu_j & \frac{4(1-\gamma_j)\mu_j}{r^2} - \rho_j\omega^2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{m}_{22} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & -ik(1-2\gamma_j) \\ ik & -\frac{2\gamma_j}{r} \end{pmatrix},$$

$\gamma_j = \dfrac{c_{2j}^2}{c_{1j}^2}, c_{1j}^2 = \dfrac{2\mu_j + \lambda_j}{\rho_j}, c_{2j}^2 = \dfrac{\mu_j}{\rho_j}$, μ_j, λ_j — упругие параметры сред $(j = 1, 2)$.

3.

Для анализа движения идеальной несжимаемой жидкости при $0 \le r \le a - h$ вводится потенциал смещений $\Phi(r, z, t)$: $\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{\nabla}\Phi, u_{3z} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}, u_{3r} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}$, который удовлетворяет уравнению Лапласа: $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$. Напряжённое состояние определяется давлением $\overrightarrow{\sigma_{3z}} = -p\overrightarrow{r_0}$, так что $p = -\rho_3\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \rho_3 V_0\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial t}$.

Решение уравнения Лапласа $\Phi = \Phi(k, \omega, t)I_0(kr)e^{-ikz}e^{i\omega t}$, которое ограничено при $r = 0$, позволяет получить связь между давлением и радиальным смещением:

$$-\sigma_{3rr} = \overline{p} = \frac{I_0(kr)}{kI_1(kr)}\rho_3\omega^2 u_{3r} + V_0 k\omega\frac{I_0(kr)}{kI_1(kr)}\rho_3 u_{3r},$$
$$u_{3r} = kI_1(kr)\Phi_0(k, \omega, t)e^{-ikz}e^{i\omega t}.$$

Если учесть, что касательные напряжения в идеальной жидкости отсутствуют, то зависимость между смещениями и нормальными напряжениями можно записать в виде:

$$\overrightarrow{\sigma_{3r}} = \widehat{N}\overrightarrow{u_3}, \widehat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m(k)[\omega^2 - \omega k V_0] \end{pmatrix}, \qquad m(k) = \frac{I_0(kr)}{kI_1(kr)}\rho_3. \tag{3.1}$$

4.

Для получения аналогичных зависимостей между напряжениями и перемещениями на цилиндрической поверхности оболочки примем известные в теории оболочек разложения искомых величин в ряд Тейлора по $(r-a)$: $(a-h \le r \le a)$:

$$\overrightarrow{F_2}(r) = \overrightarrow{F_2}(a)\left(\widehat{E} + \widehat{M}(a)(r-a)\right)$$

или:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{u_2}(a-h) = (\widehat{e} - \widehat{m}_{11}(a)h)\,\overrightarrow{u_2}(a) - \widehat{m}_{12}(a)h\overrightarrow{\sigma_{2r}}(a), \\ \overrightarrow{\sigma_{2r}}(a-h) = -\widehat{m}_{21}(a)h\overrightarrow{u_2}(a) + (\widehat{e} - \widehat{m}_{22}(a)h)\,\overrightarrow{\sigma_{2r}}(a), \\ \widehat{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \tag{4.1}$$

5.

Наконец, можно получить [2] аналогичные (3.1), (4.1) решения краевой задачи теории упругости в области $r \ge a$:
$\widehat{A}\overrightarrow{\sigma_{1r}} = \widehat{B}\overrightarrow{u_1}$

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} 2\mu_1 ikq_1K_1(q_1r) & (2\mu_1k^2 - \rho_1\omega^2)K_1(s_1r); \\ 2\mu_1q_1^2\left(K_0(q_1r) + \dfrac{K_1(q_1r)}{q_1}\right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}\rho_1\omega^2K_0(q_1r) & \mu_1 2iK_1'(s_1r)ks_1 \end{pmatrix};$$

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} -ikK_0(q_1r) & -s_1K_0(s_1r) \\ -q_1K_1(q_1r) & ikK_1(s_1r) \end{pmatrix};$$

$$q_1 = \sqrt{k^2 - \rho_1\frac{\omega^2}{\mu_1}\gamma_1} \ge 0, s_1 = \sqrt{k^2 - \rho_1\frac{\omega^2}{\mu_1}} \ge 0. \tag{5.1}$$

В дальнейшем удобно ввести матрицу $\widehat{C} = \widehat{B}\widehat{A}^{-1}$, так что $\overrightarrow{\sigma_{1r}} = \widehat{C}\overrightarrow{u_1}$, где

$$\begin{array}{l} P = det\widehat{A} = \left(\frac{q_1}{r}Y(s_1r) - \frac{k^2}{q_1r}Y(q_1r)\right)K_1(s_1r)K_1(q_1r); \\ R = det\widehat{B} = \left(-2q_1^2\omega^2\frac{\rho_1}{\mu_1} - 4q_1^2k^2Y(s_1r) + (2k^2 - \frac{\omega^2\rho_1}{\mu_1})^2Y(q_1r)\right)\frac{1}{q_1r}K_1(s_1r)K_1(q_1r); \\ Y(x) = \dfrac{xK_0(x)}{K_1(x)} \approx \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}. \end{array} \tag{5.2}$$

Тогда при выполнении условий сцепления: $\overrightarrow{u_1}(a) = \overrightarrow{u_2}(a)$, $\overrightarrow{\sigma_{1r}}(a) = \overrightarrow{\sigma_{2r}}(a)$, $u_{2r}(a-h) = u_{3r}(a-h)$, $\sigma_{2rr}(a-h) = \sigma_{3rr}(a-h)$, $\sigma_{2rz}(a-h) = \sigma_{3rz}(a-h) = 0$
из (4.1) можно получить:

$$\left(-\widehat{m}_{21}h + (\widehat{e} - \widehat{m}_{22}h)\widehat{C} - \widehat{N}(\widehat{e} - \widehat{m}_{11}h - \widehat{m}_{12}h\widehat{C})\right)\overrightarrow{u_1}(a) = 0 \tag{5.3}$$

После введения безразмерных переменных $\epsilon = \frac{h}{a}$, $\mu = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$, $\overline{\rho}_2 = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$, $\overline{\rho}_3 = \dfrac{\rho_3}{\rho_1}$, $M = \frac{V_0\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\mu_1}}$, $\overline{k} = ka$, $\overline{\omega} = \frac{\omega a\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\mu_1}}$, $q_1a = \overline{q_1} = \sqrt{\overline{k}^2 - \gamma_1\overline{\omega}^2}$, $s_1a = \overline{s_1} = \sqrt{\overline{k}^2 - \overline{\omega}^2}$, $r = a\overline{r}$

уравнение (5.3) можно записать в виде:

$$\left(-\widehat{\widehat{m}}_{21}(1)\epsilon + (\widehat{e} - \widehat{\widehat{m}}_{22}(1)\epsilon)\widehat{\widehat{C}}(1) - \widehat{\widehat{N}}(1)\left(\widehat{e} - \epsilon\widehat{\widehat{m}}_{11}(1) - \epsilon\widehat{\widehat{m}}_{12}(1)\widehat{\widehat{C}}(1)\right)\right)\overrightarrow{u}(1) = 0 \tag{5.4}$$

Здесь $\widehat{\widehat{m}}_{ij}(1)$ $(i = 1,2,\ j = 1,2)$, $\widehat{\widehat{N}}(1)$, $\widehat{\widehat{C}}(1)$ получены из вышеприведённых формул после введения безразмерных переменных.

Для того, чтобы вычленить вхождение безразмерных параметров в общее уравнение (5.4), запишем матрицу $\widehat{\widehat{m}}_{21}$, в которую входят основные параметры задачи ρ_2,μ, в виде суммы:

$$\widehat{\widehat{m}}_{21}(1) = -\rho_2\omega^2\widehat{e} + \mu\widehat{D} \tag{5.5}$$

где

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} 4(1-\gamma_2)\overline{k}^2 & -2(1-2\gamma_2)i\overline{k} \\ 2(1-2\gamma_2)i\overline{k} & 4(1-\gamma_2) \end{pmatrix}$$

Так что окончательно уравнение для определения перемещений поверхности полости имеет вид:

$$[\epsilon\overline{\rho}_2\overline{\omega}^2\widehat{e} - \epsilon\mu\widehat{D} + (\widehat{e} - \epsilon\widehat{\widehat{m}}_{22})\widehat{C}(1) - \widehat{N}(1,\overline{\rho}_3,M)(\widehat{e} - \epsilon\widehat{\widehat{m}}_{11} - \epsilon\frac{1}{\mu}\widehat{\widehat{m}}_{12}\widehat{C})]\overrightarrow{u} = 0 \tag{5.6}$$

где

$$\widehat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$$n = \overline{\rho}_3 m(\overline{k})(\overline{\omega}^2 - M\overline{\omega}\overline{k})$$

Теперь в пространстве безразмерных параметров $\epsilon, \overline{\rho_2}, \mu, \overline{\rho_3}, M, \overline{\omega}, \overline{k}$ можно получить уравнения для определения собственных решений однородной матричной системы уравнений (5.6).

6.

Рассмотрим основные соотношения между параметрами, принимая за основной малый параметр в задаче $\epsilon \ll 1$.

6.1.

$\overline{\rho}_2 \le O(1)$, $O(\epsilon) \le \mu \le O(1)$, $(\rho_3, M) = O(1)$.

Тогда при $\epsilon \to 0$ основной член уравнения (5.6) для получения асимптотического разложения решений по степеням ϵ имеет вид:

$$(\widehat{C} - \widehat{N})\overrightarrow{u} = 0 \tag{6.1}$$

т.е. в этом приближении цилиндрическая оболочка не участвует в процессах распространения поверхностных и иных типов волн в среде "полость+оболочка+жидкость".

Для собственных решений уравнения (6.1) необходимо выполнить условие

$$det(\widehat{C}-\widehat{N})=0 \tag{6.2}$$

что определяет зависимость параметров преобразования Фурье ω и k, т. е. дисперсионные соотношения [1] $\omega=\omega(k)$, в которых основную роль играют параметры $\overline{\rho}_3$, M:

$$\widehat{C}-\widehat{N}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}-n \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

или

$$det(\widehat{C})-c_{11}n=0$$

$$det(\widehat{C})=\frac{det(\widehat{B})}{det(\widehat{A})}=\frac{R}{P}$$

$$c_{11}=\frac{-\overline{q}_1\omega^2K_1(\overline{s}_1)K_1(\overline{q}_1)}{P}$$

И уравнение (6.3) имеет вид:

$$R_0+\overline{q}_1^2\overline{\omega}^2n=0, R=\frac{R_0}{q_1}K_1(\overline{s}_1)K_1(\overline{q}_1)$$

или в развёрнутом виде:
$-2\overline{q}_1^2\overline{\omega}^2-4\overline{q}_1^2\overline{k}^2Y(\overline{s}_1)+(2\overline{k}^2-\overline{\omega}^2)^2Y(\overline{q}_1)+\overline{\rho}_3m(\overline{k})\overline{\omega}^3(\overline{\omega}-M\overline{k})=0.$
Перейдя к более удобным для анализа переменным $\overline{q}_1^2=xy$, $\overline{s}_1^2=y$, так что

$$\overline{\omega}^2=\frac{\overline{q}^2-\overline{s}^2}{1-\gamma}=y\frac{x-1}{1-\gamma_1},\overline{k}^2=\frac{\overline{q}^2-\gamma_1\overline{s}^2}{1-\gamma_1}=y\frac{x-\gamma_1}{1-\gamma_1}$$

$$-2x(x-1)-4x(x-\gamma_1)Y(\sqrt{y})+\frac{(x+1-2\gamma_1)^2}{1-\gamma_1}Y(\sqrt{xy})+\overline{\rho}_3\frac{x(x-1)^2}{x-\gamma_1}(1-M\sqrt{\frac{x-\gamma_1}{x-1}})$$

где

$$Y(\sqrt{y})=\frac{y}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}};Y(\sqrt{xy})=\frac{xy}{\sqrt{xy+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}$$

В полученном уравнении величина $m(\overline{k})$ представлена асимптотическим представлением: $m(\overline{k})=\frac{1}{\overline{k}^2}+O(1)$, и взято главное значение этого выражения для малых k. В случае малых волновых чисел $x\to 0$, $y\to 0$, $x=O(k)$ уравнения для связи $y=y(x)$ или $x=x(y)$ принимают более простой вид:

$$-2+\overline{\omega}^2+\rho_3\overline{c}^2(1-\frac{M}{c})=0,\overline{c}=\frac{\overline{\omega}}{\overline{k}} \tag{6.4}$$

так как при $y\to 0$:

$$Y(\sqrt{y})=y,Y(\sqrt{xy})=xy$$

При $M=0$ это уравнение (6.4) известно в гидравлике как уравнение Буссинеска [1] для описания длинных волн ($\overline{k}\to 0$). В явном виде его можно записать как уравнение ($u_2=w$):

$$-\rho_3\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho_3 V_0\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}+a^2\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\partial t^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}C_1^2=0,$$

которое в виде дисперсионного соотношения имеет вид: $[(\rho_3+\overline{k}^2)\overline{\omega}^2-\rho_3 M\overline{k}\overline{\omega}-2\overline{k}^2]\overline{\overline{w}}=0$. Результаты анализа вытекают из выражения (6.4), которое в плоскости $(\overline{\omega},\overline{c})$ описывает уравнение эллипса с центром в точке $(0,M/2)$ и полуосями $a^2=2+M^2/(4\rho_3)$, $b^2=(2+\frac{M^2}{4\rho_3})/\rho_3$:

$$\frac{\overline{\omega}^2}{a^2}+\frac{(\overline{c}-\frac{M}{2})^2}{b^2}=1$$

На основе этого можно утверждать следующее:
— при выполнении условий

$$\rho_3\ge\frac{2}{1+|M|},\qquad(\overline{c}_{max}=1)$$

величины $\overline{q}_1$, $\overline{s}_1$ будут действительными, т. е., волновой процесс описывается двумя типами поверхностных волн, затухающих по $\overline{r}$ при $\overline{r}\ge 1$;
— при выполнении условий

$$\frac{2\gamma_1}{1+\sqrt{\gamma_1}|M|}\le\rho_3<\frac{2}{1+|M|},\qquad(\overline{c}_{min}=\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}})$$

волновое движение содержит одну поверхностную волну ($\overline{q}_1>0$) ($\overline{c}\le\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}$) и одну глубинную ($\overline{s}_1^2<0$) ($\overline{c}\ge 1$), которая переносит энергию по типу конической (усечённый конус) волны по координатам (r,z);
— при условии

$$0<\rho_3<\frac{2\gamma_1}{1+|M|\sqrt{\gamma_1}},\qquad(\overline{c}_{min}=\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}})$$

процесс распространения собственных движений среды описывается глубинными волнами $\overline{s}_1^2,\overline{q}^2<0$ в пространстве по типу конических волн;
— при условии

$$\rho_3=0$$

собственные движения представляют собой колебания с частотой
$\overline{\omega}=\sqrt{2}$, $\omega=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}\frac{1}{a}}$ независимо от формы колебаний — зависимости процесса от z.

6.2.

Рассматривается вариант значений внешних параметров $\overline{\rho}_2, \mu$ таких, что $(\epsilon\overline{\rho}_2, \epsilon\mu) \geq O(1)$, приводящих к уравнению: $(\epsilon\rho_2\overline{\omega}^2\widehat{e} - \epsilon\mu\widehat{D})\overrightarrow{u} = 0$, т. е. в этом случае основные процессы волнообразования происходят в оболочке. Основным параметром в этом случае будет параметр $\delta = \dfrac{\overline{\rho}_2}{\mu} = \left(\dfrac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}}\right)^2$, где $c_2^{(1)} = \dfrac{\mu_1}{\rho_1}$, $c_2^{(2)} = \dfrac{\mu_2}{\rho_2}$, который определяет динамическую составляющую процесса свободных колебаний. Приравнивая определитель системы уравнений к нулю, определяем зависимость квадрата частоты от $\overline{k}^2$, которое предполагается малым ($\overline{k} \ll 1$) при рассмотрении прикладных теорий:

$$\delta\overline{\omega}^2 = \frac{3 - 4\gamma_2}{1 - \gamma_2}\overline{k}^2 + O(\overline{k}^4)$$

$$\delta\overline{\omega}^2 = 4(1 - \gamma_2) + \frac{(1 - 2\gamma_2)^2}{1 - \gamma_2}\overline{k}^2 + O(\overline{k}^4)$$

Как видно, здесь существуют две волны, имеющие скорость распространения

$$c_0^2 = \frac{3 - 4\gamma_2}{1 - \gamma_2}\frac{\mu_2}{\rho_2}, \quad c_0^2 = \frac{(1 - 2\gamma_2)^2}{1 - \gamma_2}\frac{\mu_2}{\rho_2}$$

независимо от значений скоростей поперечных и продольных волн в упругой бесконечной среде, которые зависят от величины δ. Поэтому в этом приближении разложения решений по параметрам основное влияние на процесс распространения волн играет оболочка. Следует отметить, что здесь величина $\delta \ll 1$, что следует из условия $\mu \gg 1$ $(\mu \geq \epsilon^{-1})$ при $\overline{\rho}_2 \leq O(1)$, что наиболее реально для соотношения плотностей оболочки и упругой среды. Наконец, одна из волн, имеющей скорость $\dfrac{c_0}{c_2^{(1)}} < 1$ при $0 \leq \gamma_1 \leq \dfrac{1}{2}$, является поверхностной ($\overline{s}_1$ — действительное), а вторая будет глубинной ($\overline{q}_1$ — мнимое) и имеет значение скорости $\dfrac{c_0}{c_2^{(1)}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_1}}$ при $\gamma_1 \leq \dfrac{1}{2}$.

6.3.

Рассматривается вариант значений параметров задачи, при которых $\mu < O(\epsilon)$. В этом случае главным членом асимптотического представления решения уравнения (6.4) будет $\dfrac{\epsilon}{\mu}det(\widehat{N}\widehat{m}_{12}\widehat{C}) = 0$ или $\gamma_2 n = \gamma_2\rho_3 m(\overline{k})(\overline{\omega}^2 - M\overline{\omega}\overline{k}) = 0$, или в явном виде: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + V_0\dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = 0$, $w = A(z) + f(z - V_0 t)$, что указывает на существование собственной волны со скоростью потока V_0.

7. Заключение

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в зависимости от значения параметра μ по отношению к параметру ϵ существуют различные типы собственных волн — поверхностных и глубинных, которые учитывают также значение параметра $\overline{\rho}_3$ по отношению к M — числу Маха.

- $\mu \leq \epsilon$: в этом случае основные (длиноволновые) процессы параметров в жидкости и по существу описывают волну, распространяющуюся со скоростью v_0, в других составляющих неоднородной среды.

- $\epsilon \leq \mu \leq \epsilon^{-1}$: в этом случае оболочка выпадает из рассмотрения асимптотических разложений в основе, т. е. здесь оболочка передаёт без изменений действие жидкости на упругую среду, и задача переходит в задачу Стонелли [3].

- $\mu \geq \epsilon^{-1}$: эта задача в основном описывает волновые процессы в оболочке, для которой в прикладном выриантe присутствуют две волновые моды с постоянной скоростью распространения; но волны отличаются друг от друга характером изменения формы по мере движения.

Список цитируемых источников

1. *Уизем Дж.Дж.* Линейные и нелинейные волны. — Пер. с англ. — Москва: Мир, 1977. — 620 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. — Москва: Мир, 1975. — 870 с.
3. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: Теория и методы. — Москва: Мир, 1983. — 520 с.
4. *Родин Г.* Сейсмология ядерных взрывов. — Москва: Мир, 1974. — 190 с.
5. *Мнев Е.Н., Перцев А.К.* Гидроупругость оболочек. — Ленинград: Судостроение, 1970. — 365 с.

Получена 18.10.2009