Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 289–308

УДК 517.928

Задача оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць

О. В. Тарасенко
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя,
Ніжин 16600. *E-mail: oxana.tarasenko@gmail.com*

Анотація. Побудовано асимптотику розв'язку задачі оптимального керування процесом, який описується лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних, у випадку кратних елементарних дільників граничної в'язки матриць. Знайдено умови існування єдиного розв'язку цієї задачі. У ході дослідження використано відомі результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями.

Ключові слова: оптимальне керування, асимптотичні розвинення, гранична в'язка матриць.

1. Постановка задачі

Досліджується задача про знаходження керування $u(t,\varepsilon)$, під дією якого система

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1.1}$$

переходить із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{1.2}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{1.3}$$

за фіксований проміжок часу T, мінімізуючи квадратичний функціонал

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \tag{1.4}$$

де $x(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ — шукані n-вимірний вектор стану та m-вимірний вектор керування відповідно, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ — дійсні квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$ — $(n\times m)$-матриця з дійсними елементами, $D(t,\varepsilon)$ — симетрична матриця m-го порядку, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Аналогічна задача розглядалась в [1], де передбачалось, що гранична в'язка матриць $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ має кратний скінченний і простий нескінченний елементарні дільники. У даній статті досліджується більш складний випадок кратного спектра граничної в'язки матриць.

Передбачається, що виконуються наступні умови:

1° Матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ і $D(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$\begin{aligned} A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_k(t),\ B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k B_k(t), \\ C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k C_k(t),\ D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k D_k(t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

2° Коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$, розвинень (1.5) нескінченно диференційовні на $[0;T]$.

3° Матриця $D(t,\varepsilon)$ додатно визначена на $[0;T]$, причому $\det D_0(t) \neq 0$.

4° Вектори початкового і кінцевого станів зображуються у вигляді розвинень

$$x_1(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k x_k^{(1)},\ x_2(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k x_k^{(2)}. \tag{1.6}$$

5° Область допустимих значень для керування $u(t,\varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

6° $\det B_0(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0;T]$.

7° Гранична в'язка матриць

$$A_0(t) - \lambda B_0(t) \tag{1.7}$$

на відрізку $[0;T]$ має скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю $p > 1$ і нескінченний — кратністю $q = n - p > 1$.

8° $\lambda_0(t) < 0$, $\forall t \in [0;T]$.

9° $\Big(B_1(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)\Big) \neq 0$, $\forall t \in [0;T]$, де $\tilde{\varphi}(t)$ — власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню, $\tilde{\psi}(t)$ — відповідний власний вектор спряженої матриці $B_0^*(t)$.

Наявність при похідних у системі рівнянь (1.1) матриці $B(t,\varepsilon)$, яка вироджується при $\varepsilon = 0$, вносить суттєві труднощі в розв'язання даної задачі, які вдається подолати, використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку сингулярно збурених систем з виродженнями даного типу, здійсненого в роботах [2], [3],

2. Побудова формального розв'язку задачі оптимального керування

Завдяки умові 7°, яка передбачає стабільність кронекерової структури граничної в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, система (1.1) при досить малих $\varepsilon > 0$ буде регулярною і матиме загальний розв'язок типу Коші при заданому $u(t,\varepsilon)$.

Незважаючи на виродженість матриці $B(t,0) = B_0(t)$, як показано в [2] за виконання умови 9° матриця $B(t,\varepsilon)$ неособлива при досить малих $\varepsilon > 0$. Тому до задачі (1.1), (1.4) можна застосувати принцип максимуму Л. С. Понтрягіна [4].

Побудуємо функцію Гамільтона

$$H(t,x,p,u) = \varepsilon^{-h}(A(t,\varepsilon)x,p) + \varepsilon^{-h}((t,\varepsilon)u,p) - \frac{1}{2\varepsilon^h}(D(t,\varepsilon)u,u),$$

де p — n-вимірний вектор спряжених змінних.

Тоді згідно з принципом максимуму для мінімізації критерія (1.4) необхідно, щоб

$$\mathrm{grad}_u H = \varepsilon^{-h} C^*(t,\varepsilon)p - \varepsilon^{-h} D(t,\varepsilon)u = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(B^*(t,\varepsilon)p\right) = -\mathrm{grad}_x H = -\varepsilon^{-h} A^*(t,\varepsilon)p.$$

Одержимо систему рівнянь

$$\begin{gathered} \varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \\ \varepsilon^h B^*(t,\varepsilon)\frac{dp}{dt} = -\Big(A^*(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \left(B^*(t,\varepsilon)\right)'\Big)\, p, \\ 0 = C^*(t,\varepsilon)p - D(t,\varepsilon)u. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Увівши в розгляд $(2n+m)$-вимірний вектор

$$y(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x(t,\varepsilon), p(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon)), \tag{2.2}$$

співвідношення (2.1) запишемо у вигляді

$$\varepsilon^h \tilde{B}(t,\varepsilon)\dot{y} = \tilde{A}(t,\varepsilon)y, \tag{2.3}$$

де матриці $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$ зображуються асимптотичними розвиненнями

$$\tilde{A}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{A}_k(t),\ \tilde{B}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{B}_k(t), \tag{2.4}$$

$$\tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_k(t) & 0 & C_k(t) \\ 0 & -A_k^*(t) - (B_{k-h}^*(t))' & 0 \\ 0 & C_k^*(t) & -D_k(t) \end{pmatrix},\ \tilde{B}_k(t) = \begin{pmatrix} B_k(t) & 0 & 0 \\ 0 & B_k^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$(k = 0,1,2,\ldots)$, — блочні матриці, в яких символом 0 позначено нульові блоки відповідних розмірів. Крайові умови (1.2), (1.3) подамо у вигляді:

$$My(0,\varepsilon) + Ny(T,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(\varepsilon) \\ x_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = y_0(\varepsilon), \tag{2.5}$$

$$M = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Таким чином, задача оптимального керування (1.1)–(1.4) зводиться до двоточкової крайової задачі (2.3), (2.5).

У даному випадку гранична в'язка матриць $\tilde{A}_0(t) - \lambda\tilde{B}_0(t)$ системи рівнянь (2.3) регулярна, а її кронекерова структура складається з двох скінченних елементарних дільників кратністю p: $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ і $(\lambda + \lambda_0(t))^p$. Що ж стосується нескінченних елементарних дільників, то їх структура значно складніша. Крім зазначених скінченних елементарних дільників, гранична в'язка матриць системи (2.3) має два нескінченні: один простий і один кратний — кратністю $2q-1$. Тому згідно з теорією, викладеною в [2], система (2.3) має $2p$ лінійно незалежних розв'язків, що відповідають скінченним елементарним дільникам, і $2q$ розв'язків, які відповідають нескінченним елементарним дільникам.

Перша група із $2p$ розв'язків, що відповідають скінченним елементарним дільникам, побудована у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p}} = \mu_1$ за виконання умови

$$L_{01} = -(A_1\varphi, \psi) + \lambda_0(B_1\varphi, \psi) + \delta_{1,h}(B_0\varphi', \psi) \neq 0, \ \forall t \in [0;T] \tag{2.7}$$

у нашій роботі [1] з використанням результатів роботи [2].

Розв'язки, що відповідають скінченному елементарному дільнику $(\lambda - \lambda_0(t))^p$, будуються у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = v_i(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda_i(\tau,\varepsilon)) d\tau\right), \ i = \overline{1,p}, \tag{2.8}$$

де $v_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon), 0, 0\right)$, а функції $\lambda_i(t,\varepsilon)$ і вектори $v_i(t,\varepsilon)$ зображуються розвиненнями за степенями μ_1:

$$\lambda_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1^k \lambda_k^{(i)}(t), \ i = \overline{1,p}; \tag{2.9}$$

$$v_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k v_{ki}^{(1)}(t), \ i = \overline{1,p}. \tag{2.10}$$

Як показано в [1], коефіцієнти розвинень (2.9), (2.10) визначаються за рекурентними формулами

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{|L_{01}|} \exp\left(i \frac{\arg(-L_{01}) + 2\pi(j-1)}{p}\right), \ j = \overline{1,p},$$

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{p\lambda_1^{(i)}} \left[\tilde{P}_p^{p+k}\left(\lambda^{(i)}\right) + \sum_{s=1}^{\left[\frac{p+k-1}{p}\right]} \sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js}\left[P_j^{p+k-sp}\left(\lambda^{(i)}\right)\right]\right],$$

$$v_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k} P_j^k\left(\lambda^{(i)}\right)(HB_0)^j\varphi + H\tilde{L}_{0,\frac{k}{p}}\varphi + \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{p}\right]} \sum_{j=1}^{k-sp} H\tilde{L}_{js}\left[P_j^{k-ps}\left(\lambda^{(i)}\right)\right]\varphi,$$

$(k = 1, 2, \ldots)$, де

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \left(P_j^s(H\Gamma)\varphi, \psi\right), \ s = 1, 2, \ldots;$$

$$L_{ks}\left[\lambda_i^k\right] = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]} \sum_{j=0}^{s-mh} (-1)^j D^m \left[\lambda_i^k\right] \left(P_{m+k,j}^{s-hm}(HB; H\Gamma)\varphi, \psi\right), k, s = 1, 2, \ldots;$$

$$L_{k0}\left[\lambda_i^k\right] = \lambda_i^k \delta_{k,p}, k = \overline{1,p},$$

$H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0 - \lambda_0 B_0$; $P_j^s(H\Gamma)$ — сума всіх можливих добутків j операторів $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2}, \ldots, H\Gamma_{k_s}$, сума індексів яких $k_1 + \ldots + k_s = s$ (при цьому покладається $P_0^0(H\Gamma) = E$, $P_0^s(H\Gamma) = 0$, якщо $k \geq 1$, а перший множник H у всіх доданках "відбирається"), $\Gamma_k = A_k - \lambda_0 B_k - B_{k-h}\frac{d}{dt}$, $k = 1, 2, \ldots$.

$P_{s,k}^j(H\Gamma; HB)$ — сума всіх можливих "добутків"k матричних множників HB_{i_1}, HB_{i_2}, $\ldots$, HB_{i_k} з цілими невід'ємними індексами та s операторних множників $H\Gamma_{m_1}$, $H\Gamma_{m_2}$, $\ldots$, $H\Gamma_{m_s}$, сума індексів яких $i_1 + i_2 + \ldots + i_k + m_1 + m_2 + \ldots + m_s = j$.

$D^j\left[\lambda_i^k\right]$ — сума всіх можливих "добутків"j "множників"$D = \frac{d}{dt}$ та k множників λ_i; при цьому останнім множником у всіх доданках є λ_i, а оператор диференціювання D діє на весь вираз, що міститься праворуч від нього.

Розв'язки системи (2.3), що відповідають скінченному елементарному дільнику $(\lambda + \lambda_0(t))^p$, знаходяться у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = \tilde{v}_i(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(-\lambda_0(\tau) + \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right),\ i = \overline{1,p}, \tag{2.11}$$

де

$$\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon), \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon), \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right),\ i = \overline{1,p}, \tag{2.12}$$

відповідно до структури матриць $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$.

Відповідні вектори $\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)$ будуються, як і для першої групи розв'язків, у вигляді розвинень за степенями $\mu_1 = \sqrt[p]{\varepsilon}$:

$$\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_1^k\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t),\ i = \overline{1,p}; \tag{2.13}$$

$$\tilde{v}_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_1^k\tilde{v}_{ki}^{(j)}(t),\ i = \overline{1,p},\ j = 1,2,3, \tag{2.14}$$

коефіцієнти яких визначаються з наступних рекурентних співвідношень:

$$\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t) = -\lambda_k^{(i)}(t),\ k = 1,2,\ldots, \tag{2.15}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{k+1}P_{s-1}^k\left(\lambda^{(i)}(t)\right)\psi_s(t),\ k = \overline{0,p-1}, \tag{2.16}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(2)}(t) = \sum_{j=0}^{k}P_j^k\left(\lambda^{(i)}\right)(H^*B_0^*)^j\psi + H^*\tilde{F}_{0,\frac{k}{p}}\psi - \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{k-sp}(-1)^jH^*\tilde{F}_{js}\left[P_j^{k-ps}\left(\lambda^{(i)}\right)\right]\psi,$$

$$k = 1,2,\ldots, \tag{2.17}$$

$$\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t) = D_0^{-1}C_0^*\psi, \tag{2.18}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t) = D_0^{-1}\left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]}C_j^*\tilde{v}_{k-pj,i}^{(2)} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]}D_j\tilde{v}_{k-pj,i}^{(3)}\right],\ k = 1,2,\ldots, \tag{2.19}$$

в яких

$$\tilde{F}_{0s} = -\sum_{j=1}^{s} P_j^s(H^*\Gamma^*),\ s = 1, 2, \ldots;$$

$$\tilde{F}_{k0}\left[\tilde{\lambda}_i^k\right] = (-1)^{k+1}\tilde{\lambda}_i^k B_0^*(H^*B_0^*)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots;$$

$$\tilde{F}_{ks}\left[\tilde{\lambda}_i^k\right] = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-hm}(-1)^{j+k}D^m\left[\tilde{\lambda}_i^k\right]P_{m+k,j}^{s-hm}(H^*B^*, H^*\Gamma^*),$$

$\Gamma_k^* = A_k^* - \lambda_0 B_k^* + \left(B_{k-h}^*\right)' + B_{k-h}^*\frac{d}{dt}$,$R_0(t) = A_0(t) + \lambda_0(t)B_0(t)$,
$\psi_s(t) = \sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{j+1}R_0^{-1}\left(B_0R_0^{-1}\right)^j C_0D_0^{-1}C_0^*\left(H^*B_0^*\right)^{s-1-j}\psi$, H^* — матриця, спряжена до матриці H.

Для побудови другої групи розв'язків, що відповідають нескінченним елементарним дільникам, ми вже не можемо скористатись відомими результатами, викладеними в [2, 5], оскільки в даному випадку гранична в'язка матриць має два нескінченні елементарні дільники різної кратності і умови теореми 4.4 із [2] не виконуються.

Проведені нами дослідження показують, що за виконання умови 9° шукані розв'язки можна побудувати у вигляді розвинень за дробовими степенями $\mu_2 = \varepsilon^{\frac{1}{q}}$. Як виявилось, вони поділяються на дві групи по q розв'язків, кожна з яких будується за своїм алгоритмом.

Першу групу розв'язків побудуємо у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = w_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\xi_i(\tau,\varepsilon)}\right),\ i = \overline{1,q}, \tag{2.20}$$

поклавши

$$w_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(w_i^{(1)}(t,\varepsilon); 0; 0\right),\ i = \overline{1,q}, \tag{2.21}$$

де нижня межа інтегрування t_0 буде встановлена нижче, в процесі побудови розв'язку крайової задачі (2.3), (2.5).

Підставивши (2.20), (2.21) у систему (2.3), дістанемо векторне рівняння

$$B(t,\varepsilon)w_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \xi_i(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)w_i^{(1)}(t,\varepsilon) - \varepsilon^h\xi_i(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\left(w_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)', \tag{2.22}$$

до якого зводиться побудова відповідних розв'язків n-вимірної системи рівнянь

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x.$$

Згідно з теоремою 3.3 із [2] функції $\xi_i(t,\varepsilon)$ мають задовольняти рівняння розгалуження

$$\xi_i^q + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{ks}\left[\xi_i^k\right] = 0, \tag{2.23}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$M_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j\left(P_j^s(GB)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right),\ s = 1, 2, \ldots; \tag{2.24}$$

$$M_{1s}\left[\xi\right]=\sum_{i=0}^{s}(-1)^{i}\xi\left(P_{1,i}^{s}(GK;GB)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right); \tag{2.25}$$

$$M_{ks}\left[\xi^{k}\right]=\sum_{j=0}^{min\left\{k-2,\left[\frac{s}{h}\right]\right\}}\sum_{i=0}^{s-hj}(-1)^{i+j}\xi^{2}\tilde{D}^{j}\left[\xi^{k-2}\right]\left(P_{k-j,i}^{s-hj}(GK;GB)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right),$$

$$k\geq 2,\ s\geq 1; \tag{2.26}$$

$$M_{k0}\left[\xi^{k}\right]=\xi^{k}\delta_{k,q},\ k=\overline{1,q}.$$

Відповідні вектори $w_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ зображуються формальними розвиненнями

$$w_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\tilde{\varphi}+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^{s}G\tilde{M}_{0s}\tilde{\varphi}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s}G\tilde{M}_{ks}\left[\xi_i^{k}\right]\tilde{\varphi}, \tag{2.27}$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами

$$\tilde{M}_{0s}=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j}P_{j}^{s}(GB),\ s=1,2,\ldots; \tag{2.28}$$

$$\tilde{M}_{ks}\left[\xi^{k}\right]=\sum_{j=0}^{min\left\{k-2,\left[\frac{s}{h}\right]\right\}}\sum_{i=0}^{s-hj}(-1)^{i+j}\xi\tilde{D}^{j}\left[\xi^{k-1}\right]P_{k-j,i}^{s-hj}(GK;GB), \tag{2.29}$$

де $G(t)$ — напівобернена матриця до матриці $B_0(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$ — власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню.

Вирази $P_j^s(GB)$, $P_{k,r}^s(GK;GB)$ тут формуються за розвиненнями $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k B_k$, $\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s K_s$, де

$$K_s=A_s(t)-B_{s-h}(t)\frac{d}{dt},\ s=0,1,\ldots.$$

Оскільки згідно з умовою 9° $M_{01}=-\left(B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)\neq 0$, то, як показано в [2, с. 98], функції $\xi_i(t,\varepsilon)$ і вектори $w_i(t,\varepsilon)$ будуються у вигляді розвинень за степенями $\mu_2=\varepsilon^{\frac{1}{q}}$:

$$\xi_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_2^k\xi_k^{(i)}(t), \tag{2.30}$$

$$w_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_2^k w_{ki}^{(1)}(t),\ i=\overline{1,q}. \tag{2.31}$$

Підставивши ряд (2.30) у рівняння (2.23) і застосувавши метод невизначених коефіцієнтів, за алгоритмом, описаним у [2, с. 98-105], дістанемо такі рекурентні формули для знаходження функцій $\xi_k^{(i)}(t)$:

$$\xi_1^{(j)}(t)=\sqrt[q]{\left|\left(B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)\right|}\exp\left(i\frac{\arg\left(B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)+2\pi(j-1)}{q}\right),\ j=\overline{1,q}, \tag{2.32}$$

$$\xi_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{q\left(\xi_1^{(i)}\right)^{q-1}}\left[\tilde{P}_q^{q+k}\left(\xi^{(i)}\right) + M_{0,\frac{q+k}{q}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{q+k-1}{q}\right]}\sum_{j=1}^{q+k-sq} M_{js}\left[P_j^{q+k-sq}\left(\xi^{(i)}\right)\right]\right], \tag{2.33}$$

($k = 1, 2, \ldots$), де символом $\tilde{P}_q^{q+k}\left(\xi^{(i)}\right)$ позначена та частина виразу $P_q^{q+k}\left(\xi^{(i)}\right)$, що не містить $\xi_{k+1}^{(i)}(t)$, а оператори M_{js} діють на кожний доданок виразу $P_j^{q+k-qs}\left(\xi^{(i)}\right)$ за таким самим правилом, що й на функцію $\xi^{(i)}(t)$. Вираз $P_j^k(\xi^{(i)})$ формується за розвиненням (2.30).

Підставивши (2.30) у (2.27) і перегрупувавши доданки, зібравши вирази з однаковими степенями параметра μ_2, отримаємо формули для коефіцієнтів векторного ряду (2.31):

$$w_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k} P_j^k\left(\xi^{(i)}\right)(GA_0)^j\tilde{\varphi} + G\tilde{M}_{0,\frac{k}{q}}\tilde{\varphi} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{q}\right]}\sum_{j=1}^{k-sq} G\tilde{M}_{js}\left[P_j^{k-sq}\left(\xi^{(i)}\right)\right]\tilde{\varphi},$$

$$k = 0, 1, \ldots. \tag{2.34}$$

Другу групу розв'язків, що відповідають нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, шукатимемо у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = \tilde{w}_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\tilde{\xi}_i(\tau,\varepsilon)}\right),\ i = \overline{1,q}, \tag{2.35}$$

де

$$\tilde{w}_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(\tilde{w}_i^{(1)}(t,\varepsilon); \mu_2^{q-1}\tilde{w}_i^{(2)}(t,\varepsilon); \mu_2^{q-1}\tilde{w}_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right), \tag{2.36}$$

а функції $\tilde{\xi}_i(t,\varepsilon)$ і вектор-функції $\tilde{w}_i^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,3}$, зображуються формальними розвиненнями за степенями μ_2:

$$\tilde{\xi}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_2^k\tilde{\xi}_k^{(i)}(t), \tag{2.37}$$

$$\tilde{w}_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_2^k\tilde{w}_{ki}^{(j)}(t),\ j = \overline{1,3}. \tag{2.38}$$

Підставивши (2.35), (2.36) у (2.3), приходимо до системи трьох векторних рівнянь

$$\begin{gathered} B(t,\varepsilon)\tilde{w}_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \tilde{\xi}_i(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)\tilde{w}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \mu_2^{q-1}\tilde{\xi}_i(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\tilde{w}_i^{(3)}(t,\varepsilon) - \\ -\varepsilon^h\tilde{\xi}_i(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\left(\tilde{w}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \tag{2.39}$$

$$\begin{gathered} B^*(t,\varepsilon)\tilde{w}_i^{(2)}(t,\varepsilon) = -\tilde{\xi}_i(t,\varepsilon)A^*(t,\varepsilon)\tilde{w}_i^{(2)}(t,\varepsilon) - \varepsilon^h\tilde{\xi}_i(t,\varepsilon)\left(B^*(t,\varepsilon)\right)'\tilde{w}_i^{(2)}(t,\varepsilon) - \\ -\varepsilon^h\tilde{\xi}_i(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)\left(\tilde{w}_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \tag{2.40}$$

$$C^*(t,\varepsilon)\tilde{w}_i^{(2)}(t,\varepsilon) - D(t,\varepsilon)\tilde{w}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = 0. \tag{2.41}$$

Розглянемо кожне із цих рівнянь окремо. Підставивши розвинення (2.37), (2.38) у рівняння (2.40) і прирівнявши в одержаній тотожності вирази при однакових степенях параметра μ_2, отримаємо нескінченну систему векторних рівнянь

$$B_0^* \tilde{w}_{0i}^{(2)} = 0; \tag{2.42}$$

$$B_0^* \tilde{w}_{ki}^{(2)} = \tilde{b}_{ki}^{(2)},\ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.43}$$

де

$$\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t) = -\sum_{j=1}^{k} \tilde{\xi}_j^{(i)} A_0^* \tilde{w}_{k-j,i}^{(2)} + \tilde{d}_{ki}^{(2)},\ k = 1, 2, \ldots; \tag{2.44}$$

$$\begin{gathered} \tilde{d}_{ki}^{(2)}(t) = -\sum_{j=1}^{k-q} \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-j}{q}\right]} \tilde{\xi}_j^{(i)} A_s^* \tilde{w}_{k-j-qs,i}^{(2)} - \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{q}\right]} B_s^* \tilde{w}_{k-qs}^{(2)} - \\ + \sum_{j=1}^{k-qh} \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-qh-j}{q}\right]} \tilde{\xi}_j^{(i)} (B_s^*)' \tilde{w}_{k-j-qh-qs,i}^{(2)} - \sum_{j=0}^{k-qh} \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-qh-j}{q}\right]} \tilde{\xi}_j^{(i)} B_s^* \left(\tilde{w}_{k-qh-qs-j,i}^{(2)}\right)', \end{gathered} \tag{2.45}$$

$(k = q, q+1, \ldots)$.

Покажемо, що за виконання умови 9° ця система рівнянь розв'язна, і вкажемо алгоритм визначення з неї коефіцієнтів відповідних формальних рядів.

З рівняння (2.42) знайдемо

$$\tilde{w}_{0i}^{(2)}(t) = \alpha_0^{(i)}(t) \tilde{\psi}(t), \tag{2.46}$$

де $\alpha_0^{(i)}(t)$ — нескінченно диференційовна функція, яка буде визначатись далі. Рівняння (2.43) будуть розв'язними тоді і тільки тоді, коли їх праві частини будуть ортогональними до вектора $\tilde{\varphi}(t)$:

$$\left(\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t), \tilde{\varphi}(t)\right) = 0,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.47}$$

За виконання цієї умови вектори $\tilde{w}_{ki}^{(2)}(t)$ з цих рівнянь знаходитимемо за формулою

$$\tilde{w}_{ki}^{(2)}(t) = G^*(t) \tilde{b}_{ki}^{(2)}(t) + \alpha_k^{(i)}(t) \tilde{\psi}(t),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.48}$$

де $\alpha_k^{(i)}(t)$ — нескінченно диференційовні функції, які підлягають визначенню.

Для знаходження функцій $\tilde{\xi}_k^{(i)}(t)$ використаємо умову (2.47). З цією метою перетворимо вираз (2.44) для векторів $\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t)$. Здійснюючи взаємну підстановку формул (2.46), (2.48), (2.44), при $k < q$ дістанемо

$$\tilde{b}_{1i}^{(2)} = -\tilde{\xi}_1^{(i)} \alpha_0^{(i)} A_0^* \tilde{\psi};$$

$$\tilde{b}_{2i}^{(2)} = \alpha_0^{(i)} \left[\left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^2 A_0^* G^* A_0^* \tilde{\psi} - \tilde{\xi}_2^{(i)} A_0^* \tilde{\psi} \right] - \tilde{\xi}_1^{(i)} \alpha_1^{(i)} A_0^* \tilde{\psi};$$

$$\begin{gathered} \tilde{b}_{3i}^{(2)} = \alpha_0^{(i)} \left[-\left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^3 A_0^* (G^* A_0^*)^2 \tilde{\psi} + 2 \tilde{\xi}_1^{(i)} \tilde{\xi}_2^{(i)} A_0^* G^* A_0^* \tilde{\psi} - \tilde{\xi}_3^{(i)} A_0^* \tilde{\psi} \right] + \\ + \alpha_1^{(i)} \left[\left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^2 A_0^* G^* A_0^* \tilde{\psi} - \tilde{\xi}_2^{(i)} A_0^* \tilde{\psi} \right] - \tilde{\xi}_1^{(i)} \alpha_2^{(i)} A_0^* \tilde{\psi}; \end{gathered}$$

. . . .

Аналізуючи ці формули, доходимо висновку, що в загальному випадку має місце формула

$$\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s^{(i)} \sum_{j=1}^{k-s} (-1)^j P_j^{k-s}\left(\tilde{\xi}^{(i)}\right) A_0^* \left(G^* A_0^*\right)^{j-1} \tilde{\psi}, k = \overline{0, q-1}, \tag{2.49}$$

яка доводиться методом математичної індукції.

При $k \geq q$ у складі $\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t)$ з'являються "члени другого роду які містять вектори $\tilde{d}_{ki}^{(2)}(t)$. Позначивши ці члени символом $\hat{b}_{ki}^{(2)}(t)$, продовжимо взаємну підстановку формул (2.46), (2.44), (2.48) при $k \geq q$. Тоді "члени першого роду які продукуються першим доданком виразу (2.44), і далі утворюватимуть вираз вигляду (2.49), а для "членів другого роду"матимемо

$$\hat{b}_{qi}^{(2)} = \tilde{d}_{qi}^{(2)};$$

$$\hat{b}_{q+1,i}^{(2)} = -\tilde{\xi}_1^{(i)} A_0^* G^* \tilde{d}_{qi}^{(2)} + \tilde{d}_{q+1,i}^{(2)};$$

$$\hat{b}_{q+2,i}^{(2)} = \left[\left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^2 (A_0^* G^*)^2 - \tilde{\xi}_2^{(i)} A_0^* G^*\right] \tilde{d}_{qi}^{(2)} - \tilde{\xi}_2^{(i)} A_0^* G^* \tilde{d}_{q+1,i}^{(2)} + \tilde{d}_{q+2,i}^{(2)};$$

. . . .

Методом математичної індукції встановимо, що в загальному випадку справджується формула

$$\hat{b}_{q+k,i}^{(2)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-s} (-1)^j P_j^{k-s}\left(\tilde{\xi}^{(i)}\right) (A_0^* G^*)^j \, \tilde{d}_{q+s,i}^{(2)} + \tilde{d}_{q+k,i}^{(2)}, \; k = 0, 1, \ldots. \tag{2.50}$$

Об'єднавши члени "першого"і "другого роду дістанемо

$$\begin{gathered} \tilde{b}_{ki}^{(2)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s^{(i)} \sum_{j=1}^{k-s} (-1)^j P_j^{k-s}\left(\tilde{\xi}^{(i)}(t)\right) A_0^* \left(G^* A_0^*\right)^{j-1} \tilde{\psi}(t) + \\ + \sum_{s=0}^{k-q-1} \sum_{j=1}^{k-q-s} (-1)^j P_j^{k-q-s}\left(\tilde{\xi}^{(i)}(t)\right) (A_0^* G^*)^j \, \tilde{d}_{q+s,i}^{(2)}(t) + \tilde{d}_{k,i}^{(2)}(t), \end{gathered} \tag{2.51}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$.

Оскільки згідно з [2, с. 98]

$$\left(A_0^* (G^* A_0^*)^{j-1} \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}\right) = \left(\tilde{\psi}, A_0 (G A_0)^{j-1} \tilde{\varphi}\right) = \left(A_0 (G A_0)^{j-1} \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) = \delta_{j,q}, \tag{2.52}$$

то з формули (2.51) випливає, що при $k < q$ умова (2.47) виконується, а при $k = q$ записується у вигляді $(-1)^q \alpha_0^{(i)} \left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^q + \left(\tilde{d}_{qi}^{(2)}, \tilde{\varphi}\right) = 0$. Взявши до уваги, що згідно з (2.45), (2.46) $\tilde{d}_{qi}^{(2)}(t) = -B_1^* \tilde{w}_{0i}^{(2)} = -\alpha_0^{(i)} B_1^* \tilde{\psi}$, звідси маємо

$$\alpha_0^{(i)} \left[\left(-\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^q - \left(B_1^* \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}\right)\right] = 0. \tag{2.53}$$

Нарешті, врахувавши, що у відповідності з (2.32) $\left(B_1^*\tilde{\psi},\tilde{\varphi}\right)=\left(B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)=\left(\xi_1^{(i)}\right)^q$, дістанемо $\left(-\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^q=\left(\xi_1^{(i)}\right)^q$, звідки випливає, що

$$\tilde{\xi}_1^{(i)}(t)=-\xi_1^{(i)}(t),\ i=\overline{1,q}. \tag{2.54}$$

Взявши до уваги, що $\left(G^*A_0^*\right)^s\tilde{\psi}=0$ при $s\geq q$, з формули (2.51) маємо

$$\tilde{b}_{q+1,i}^{(2)}(t)=\alpha_0^{(i)}\sum_{j=1}^{q}(-1)^jP_j^{q+1}\left(\tilde{\xi}^{(i)}\right)A_0^*\left(G^*A_0^*\right)^{j-1}\tilde{\psi}+$$

$$+\alpha_1^{(i)}\sum_{j=1}^{q}(-1)^jP_j^{q}\left(\tilde{\xi}^{(i)}\right)A_0^*\left(G^*A_0^*\right)^{j-1}\tilde{\psi}-\tilde{\xi}_1^{(i)}A_0^*G^*\tilde{d}_{q,i}^{(2)}+\tilde{d}_{q+1,i}^{(2)}.$$

У свою чергу з (2.45), врахувавши (2.54), (2.48), дістанемо

$$\tilde{d}_{q+1,i}^{(2)}(t)=-\tilde{\xi}_1^{(i)}A_1^*\tilde{w}_{0i}^{(2)}-B_1^*\tilde{w}_{1i}^{(2)}-\delta_{1,h}\tilde{\xi}_1^{(i)}\left(B_0^*\tilde{w}_{0i}^{(2)}\right)'=-\alpha_0^{(i)}\tilde{\xi}_1^{(i)}A_1^*\tilde{\psi}-$$
$$-B_1^*\left(-\tilde{\xi}_1^{(i)}\alpha_0^{(i)}G^*A_0^*\tilde{\psi}+\alpha_1^{(i)}\tilde{\psi}\right)-\delta_{1,h}\tilde{\xi}_1^{(i)}\alpha_0^{(i)}\left(B_0^*\tilde{\psi}\right)'=$$
$$=-\alpha_0^{(i)}\tilde{\xi}_1^{(i)}\left(A_1^*\tilde{\psi}-B_1^*G^*A_0^*\tilde{\psi}\right)-\alpha_1^{(i)}B_1^*\tilde{\psi}$$

Тоді умова (2.47) при $k=q+1$ запишеться у вигляді

$$\alpha_0^{(i)}\Big[(-1)^qP_q^{q+1}\left(\tilde{\xi}^{(i)}\right)+\tilde{\xi}_1^{(i)}\left(A_0^*G^*B_1^*\tilde{\psi},\tilde{\varphi}\right)-\tilde{\xi}_1^{(i)}\left(A_1^*\tilde{\psi},\tilde{\varphi}\right)+$$
$$+\tilde{\xi}_1^{(i)}\left(B_1^*G^*A_0^*\tilde{\psi},\tilde{\varphi}\right)\Big]+\alpha_1^{(i)}\left[(-1)^q\left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^q-\left(B_1^*\tilde{\psi},\tilde{\varphi}\right)\right]=0.$$

Оскільки згідно з (2.53) вираз біля $\alpha_1^{(i)}$ використовувався на попередньому кроці для знаходження $\tilde{\xi}_1^{(i)}$, то звідси випливає, що має дорівнювати нулю вираз біля $\alpha_0^{(i)}$. Тому, взявши до уваги, що $P_q^{q+1}\left(\tilde{\xi}^{(i)}\right)=q\tilde{\xi}_2^{(i)}\left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^{q-1}$, і врахувавши (2.54), маємо

$$\tilde{\xi}_2^{(i)}(t)=\frac{\xi_1^{(i)}}{q\left(\tilde{\xi}_1^{(i)}\right)^{q-1}}\left[\left(\left(A_0GB_1+B_1GA_0\right)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)-\left(A_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)\right].$$

Порівнявши цей вираз з формулою (2.33), приходимо до висновку, що $\tilde{\xi}_2^{(i)}=-\xi_2^{(i)}$, $i=\overline{1,q}$.

Продовжуючи цей процес при $k=q+2,q+3,\ldots$, встановлюємо, що

$$\tilde{\xi}_k^{(i)}=-\xi_k^{(i)},\ k=0,1,\ldots. \tag{2.55}$$

Функції ж $\alpha_k^{(i)}(t)$ поки що залишаються довільними.

Підставивши в рівняння (2.41) відповідні розвинення для вектор-функцій $\tilde{w}_i^{(2)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{w}_i^{(3)}(t,\varepsilon)$ та прирівнявши вирази при однакових степенях параметра μ_2, отримаємо рекурентні формули для коефіцієнтів $\tilde{w}_{ki}^{(3)}(t)$:

$$\tilde{w}_{0i}^{(3)}(t)=\alpha_0^{(i)}D_0^{-1}C_0^*\tilde{\psi}; \tag{2.56}$$

$$\tilde{w}_{ki}^{(3)}(t) = D_0^{-1}\left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{q}\right]} C_j^* \tilde{w}_{k-qj,i}^{(2)} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{q}\right]} D_j \tilde{w}_{k-qj,i}^{(3)}\right],\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.57}$$

Розглянемо тепер рівняння (2.39). Підставимо в нього відповідні розвинення і в одержаній тотожності прирівняємо коефіцієнти при μ_2^k, $k = 0, 1, \ldots$. Врахувавши (2.55), прийдемо до нескінченної системи рівнянь

$$B_0 \tilde{w}_{0i}^{(1)} = 0; \tag{2.58}$$

$$B_0 \tilde{w}_{ki}^{(1)} = \tilde{b}_{ki}^{(1)},\ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.59}$$

де

$$\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t) = -\sum_{j=1}^{k} \xi_j^{(i)} A_0 \tilde{w}_{k-j,i}^{(1)} + \tilde{d}_{ki}^{(1)},\ k = 1, 2, \ldots; \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ki}^{(1)}(t) = &- \sum_{j=1}^{k+1-q} \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1-q-j}{q}\right]} \xi_j^{(i)} C_s \tilde{w}_{k+1-q-j-qs,i}^{(3)} - \sum_{j=1}^{k-q} \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-j}{q}\right]} \xi_j^{(i)} A_s \tilde{w}_{k-j-qs,i}^{(1)} - \\ &- \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{q}\right]} B_s \tilde{w}_{k-qs,i}^{(1)} + \sum_{j=1}^{k-qh} \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-qh-j}{q}\right]} \xi_j^{(i)} B_s \left(\tilde{w}_{k-qh-qs-j,i}^{(1)}\right)', \end{aligned} \tag{2.61}$$

$(k = q+1, q+2, \ldots)$.

Встановимо розв'язність цієї системи відносно векторів $\tilde{w}_{ki}^{(1)}(t)$ подібно до того, як це було зроблено для системи рівнянь (2.42), (2.43). Дана система буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли всі вектори $\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t)$ будуть ортогональними до вектора $\tilde{\psi}(t)$, тобто, коли виконуватиметься умова

$$\left(\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t), \tilde{\psi}(t)\right) = 0,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.62}$$

За виконання цієї умови вектори $\tilde{w}_{ki}^{(1)}(t)$ будемо визначати за формулами

$$\tilde{w}_{0i}^{(1)}(t) = \tilde{\varphi}(t), \tag{2.63}$$

$$\tilde{w}_{ki}^{(1)}(t) = G\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t),\ \ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.64}$$

Умову ж (2.62) використаємо для знаходження функцій $\alpha_k^{(i)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, які містяться в (2.51) і до цього моменту залишались невизначеними. З цією метою перетворимо вираз (2.60) для векторів $\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t)$ шляхом взаємної підстановки формул (2.60) і (2.63), (2.64). Міркуючи так само, як і в процесі аналогічного перетворення виразу (2.44), методом математичної індукції встановимо, що

$$\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j P_j^k \left(\xi^{(i)}\right) A_0 \left(GA_0\right)^{j-1} \tilde{\varphi} +$$

$$+\sum_{s=0}^{k-q-1}\sum_{j=1}^{k-q-s}(-1)^j P_j^{k-q-s}\left(\xi^{(i)}(t)\right)(A_0G)^j\,\tilde d^{(1)}_{q+s,i}+\tilde d^{(1)}_{k,i}, \tag{2.65}$$

$(k=1,2,\ldots)$.

З цієї формули випливає, що при $k<q$ умова (2.62) виконується автоматично завдяки співвідношенням (2.52). Тому процес визначення функцій $\alpha_k^{(i)}(t)$ розпочинається на q-му кроці. Взявши до уваги (2.52), при $k=q$ матимемо $(-1)^q\left(\xi_1^{(i)}\right)^q+\left(\tilde d^{(1)}_{qi},\tilde\psi\right)=0$.

Оскільки згідно з (2.61), (2.63), (2.56)

$$\tilde d^{(1)}_{qi}=-\xi_1^{(i)}C_0\tilde w^{(3)}_{0i}-B_1\tilde w^{(3)}_{0i}=-\alpha_0^{(i)}\xi_1^{(i)}C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde\psi-B_1\tilde\varphi,$$

припустивши виконання умови

$$\left(C_0(t)D_0^{-1}(t)C_0^*(t)\tilde\psi(t),\tilde\psi(t)\right)\neq 0,\ \forall t\in[0;T], \tag{2.66}$$

дістанемо

$$\alpha_0^{(i)}(t)=\frac{(-1)^q\left(\xi_1^{(i)}\right)^q-\left(B_1\tilde\varphi,\tilde\psi\right)}{\xi_1^{(i)}\left(C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde\psi,\tilde\psi\right)}=\frac{(-1)^q\left(B_1\tilde\varphi,\tilde\psi\right)-\left(B_1\tilde\varphi,\tilde\psi\right)}{\xi_1^{(i)}\left(C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde\psi,\tilde\psi\right)}. \tag{2.67}$$

Наступні функції $\alpha_k^{(i)}(t)$ визначатимуться рекурентним чином через попередні. Щоб вивести відповідну рекурентну формулу, розглянемо умову (2.62) на $q+k$-у кроці. Для цього виділимо доданок, який містить функцію $\alpha_k^{(i)}(t)$ у складі виразу для вектора $\tilde d^{(1)}_{q+k,i}(t)$. Поклавши в (2.61) $q+k$ замість k, і врахувавши формули (2.57), (2.48), (2.49), маємо

$$\tilde d^{(1)}_{q+k,i}(t)=-\alpha_k^{(i)}\xi_1^{(i)}C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde\psi+\tilde g^{(1)}_{q+k,i},$$

де

$$\begin{aligned}\tilde g^{(1)}_{q+k,i}(t)=&-\xi_1^{(i)}C_0D_0^{-1}C_0\left[\sum_{s=0}^{k-1}\alpha_s^{(i)}\sum_{j=1}^{k-s}(-1)^{j+1}P_j^{k-s}\left(\xi^{(i)}\right)(G^*A_0^*)^j\,\tilde\psi+\right.\\&\left.+\sum_{s=0}^{k-q-1}\sum_{j=1}^{k-q-s}(-1)^{j+1}P_j^{k-q-s}\left(\xi^{(i)}\right)G^*\left(A_0^*G^*\right)^j\,\tilde g^{(2)}_{q+s,i}+G^*\tilde g^{(2)}_{qi}\right]-\\&-\xi_1^{(i)}C_0D_0^{-1}\left[\sum_{j=1}^{[\frac{k}{q}]}C_j^*\tilde w^{(2)}_{k-qj,i}-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{q}]}D_j\tilde w^{(3)}_{k-qj,i}\right]-\sum_{j=1}^{[\frac{k}{q}]}\xi_1^{(i)}C_j\tilde w^{(3)}_{k-qj,i}-\\&-\sum_{j=1}^{k+1-q}\sum_{s=1}^{[\frac{k+1-j}{q}]}\xi_j^{(i)}C_s\tilde w^{(3)}_{k+1-j-qs,i}-\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{[\frac{k+q-j}{q}]}\xi_j^{(i)}A_s\tilde w^{(1)}_{q+k-j-qs,i}-\\&-\sum_{s=1}^{[\frac{k+q}{q}]}B_s\tilde w^{(1)}_{k+q-qs,i}+\sum_{j=1}^{k+q-qh}\sum_{s=0}^{[\frac{k+q-qh-j}{q}]}\xi_j^{(i)}B_s\tilde w^{(1)}_{k+q-qh-j-qs,i}.\end{aligned} \tag{2.68}$$

Неважко переконатися, що вираз (2.68) містить тільки ті функції $\alpha_s^{(i)}(t)$, індекси яких $s < k$ (вони містяться в першому доданку цього виразу, у складі $\tilde{w}_{k-qj,i}^{(2)}$, а також опосередковано — у складі $\tilde{w}_{k-qj,i}^{(3)}$ та $\tilde{w}_{k+1-j-qs,i}^{(3)}$ згідно з формулою (2.57)). Отже, з умови (2.62) на $(q+k)$-му кроці знайдемо

$$\alpha_k^{(i)}(t) = \frac{\left(\tilde{g}_{q+k,i}^{(1)}(t), \tilde{\psi}\right)}{\xi_1^{(i)}\left(C_0 D_0^{-1} C_0^* \tilde{\psi}, \tilde{\psi}\right)}. \tag{2.69}$$

Цим самим завершено побудову $2n$ формальних розв'язків системи (2.3).

Розглянемо побудову розв'язку крайової задачі (2.3), (2.5). З формули (2.32) випливає, що частина з функцій $\xi_1^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,q}$, може мати додатні дійсні частини, а частина — від'ємні. Будемо припускати, що виконуються такі умови:

10° $\mathrm{Re}\xi_1^{(i)}(t) < 0$, $\forall t \in [0;T]$, $i = \overline{1,l}$; $\mathrm{Re}\xi_1^{(i)}(t) > 0$, $\forall t \in [0;T]$, $i = \overline{l+1,q}$;

11° $\xi_1^{(i)}(0) \neq -\xi_1^{(j)}(0)$, $i = \overline{1,l}$, $j = \overline{l+1,q}$; $\xi_1^{(i)}(T) \neq -\xi_1^{(j)}(T)$, $i = \overline{1+l,q}$, $j = \overline{1,l}$.

Крім того, для спрощення викладок, припустимо, що числа p, q взаємно прості і $p > q$.

Виходячи з умови 10° та співвідношень (2.55), визначимо межі інтегрування в (2.20), (2.35) і, слідуючи [6], розв'язок крайової задачі (2.3), (2.5) будуватимемо у вигляді

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) = \mu^{-q(p-1)} \Bigg[& \sum_{i=1}^{p} v_i(t,\varepsilon) c_1^{(i)}(\varepsilon) \exp\Big(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Big(\lambda_0(\tau) + \lambda_i(\tau,\varepsilon)\Big) d\tau\Big) + \\ & + \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}_i(t,\varepsilon) \tilde{c}_1^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T (\lambda_0(\tau) + \lambda_i(\tau,\varepsilon))\, d\tau\right) \Bigg] + \\ & + \mu^{-p(q-1)} \Bigg[\sum_{i=1}^{l} w_i(t,\varepsilon) c_2^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \frac{d\tau}{\xi_i(\tau,\varepsilon)}\right) + \\ + \sum_{i=l+1}^{q} \tilde{w}_i(t,\varepsilon) \tilde{c}_2^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_0^t \frac{d\tau}{\xi_i(\tau,\varepsilon)}\right) & + \sum_{i=1}^{l} \tilde{w}_i(t,\varepsilon) \tilde{c}_2^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \frac{d\tau}{\xi_i(\tau,\varepsilon)}\right) + \\ & + \sum_{i=l+1}^{q} w_i(t,\varepsilon) c_2^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \frac{d\tau}{\xi_i(\tau,\varepsilon)}\right) \Bigg], \end{aligned} \tag{2.70}$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{pq}}$, а $c_1^{(i)}(\varepsilon)$, $\tilde{c}_1^{(i)}(\varepsilon)$, $c_2^{(i)}(\varepsilon)$, $\tilde{c}_2^{(i)}(\varepsilon)$ — шукані скалярні множники, які зображуються формальними розвиненнями за степенями μ:

$$c_1^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c_{1k}^{(i)},\ \tilde{c}_1^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{c}_{1k}^{(i)},\ i = \overline{1,p}; \tag{2.71}$$

$$c_2^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c_{2k}^{(i)},\ \tilde{c}_2^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{c}_{2k}^{(i)},\ i = \overline{1,q}. \tag{2.72}$$

Підставивши вираз (2.70) у крайову умову (2.5) і врахувавши структуру матриць M, N та знехтувавши експоненціально малими доданками, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{p} v_i^{(1)}(0,\varepsilon)c_1^{(i)}(\varepsilon)+\mu^{p-q}\sum_{i=1}^{l} w_i^{(1)}(0,\varepsilon)c_2^{(i)}(\varepsilon)+\mu^{p-q}\sum_{i=l+1}^{q}\tilde{w}_i^{(1)}(0,\varepsilon)\tilde{c}_2^{(i)}(\varepsilon)=\mu^{q(p-1)}x_1(\varepsilon); \tag{2.73}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \tilde{v}_i^{(1)}(T,\varepsilon)\tilde{c}_1^{(i)}(\varepsilon)+\mu^{p-q}\sum_{i=1}^{l} \tilde{w}_i^{(1)}(T,\varepsilon)\tilde{c}_2^{(i)}(\varepsilon)+\mu^{p-q}\sum_{i=l+1}^{q} w_i^{(1)}(T,\varepsilon)c_2^{(i)}(\varepsilon)=\mu^{q(p-1)}x_2(\varepsilon). \tag{2.74}$$

Розглянемо кожне з цих рівнянь окремо. Підставивши в рівняння (2.73) відповідні розвинення (2.31), (2.38), (2.71), (2.72) і прирівнявши вирази при однакових степенях μ, приходимо до нескінченної системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{q}\right]} v_{ji}^{(1)}(0)c_{1,k-qj}^{(i)}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]} w_{ji}^{(1)}(0)c_{2,k-p+q-pj}^{(i)}+$$
$$+\sum_{i=l+1}^{q}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]} \tilde{w}_{ji}^{(1)}(0)\tilde{c}_{2,k-p+q-pj}^{(i)}=x^{(1)}_{\frac{k-q(p-1)}{pq}},\ k=0,1,\ldots.$$

Підставивши формули (2.34), (2.64), (2.65) і змінивши порядок сумування, цю систему зведемо до вигляду

$$\begin{gathered}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{q}\right]}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=s}^{\left[\frac{k}{q}\right]} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)(HB_0)^s\varphi(0)c_{1,k-qj}^{(i)}+\\ +\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+q-p}{p}\right]}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=s}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]} P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right)(GA_0)^s\tilde{\varphi}(0)c_{2,k-p+q-pj}^{(i)}+\\ +\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+q-p}{p}\right]}\sum_{i=l+1}^{q}\sum_{j=s}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]} (-1)^s P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right)(GA_0)^s\tilde{\varphi}(0)\tilde{c}_{2,k-p+q-pj}^{(i)}=l_k,\end{gathered} \tag{2.75}$$

$(k=0,1,\ldots)$, де

$$l_k=x^{(1)}_{\frac{k-q(p-1)}{pq}}-\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{q}\right]} H\tilde{L}_{0,\frac{j}{p}}\varphi(0)c_{1,k-qj}^{(i)}-$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{q}\right]}\sum_{s=1}^{\left[\frac{j-1}{p}\right]}\sum_{r=1}^{j-ps} H\tilde{L}_{rs}\left[P_r^{j-ps}\left(\lambda^{(i)}(0)\right)\right]\varphi(0)c_{1,k-qj}^{(i)}-$$
$$-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]} G\tilde{M}_{0,\frac{j}{q}}\tilde{\varphi}(0)c_{2,k-p+q-pj}^{(i)}-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=q+1}^{\left[\frac{k+q-p}{p}\right]}\sum_{s=1}^{\left[\frac{j-1}{q}\right]}\sum_{r=1}^{j-qs} G\tilde{M}_{rs}[P_r^{j-qs}(\xi^{(i)}(0))]\times$$

$$\times\tilde{\varphi}\tilde{c}^{(i)}_{2,k+q-p-pj}-\sum_{i=l+1}^{q}\sum_{j=q+1}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]}\sum_{s=0}^{j-q-1}\sum_{r=1}^{j-q-s}(-1)^r[P_r^{j-q-s}(\xi^{(i)}(0))]G(A_0G)^r\times$$

$$\times\tilde{d}^{(1)}_{q+s,i}\tilde{c}^{(i)}_{2,k+q-p-pj}-\sum_{i=l+1}^{q}\sum_{j=q}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]}G\tilde{d}^{(1)}_{ji}\tilde{c}^{(i)}_{2,k-p+q-pj},$$

$$k=q(p-1),q(p-1)+1,\ldots. \tag{2.76}$$

Враховуючи лінійну незалежність векторів $(HB_0)^s\varphi$, $s=\overline{0,p-1}$, і $(GA_0)^s\tilde{\varphi}$, $s=\overline{0,q-1}$, і беручи до уваги, що $l_k=0$ при $k<q(p-1)$, звідси маємо

$$\sum_{j=s}^{\left[\frac{k}{q}\right]}\sum_{i=1}^{p}P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c^{(i)}_{1,k-qj}=0,\ k=\overline{0,q(p-1)-1},\ s=0,\ldots,\left[\frac{k}{q}\right]; \tag{2.77}$$

$$\sum_{j=s}^{\left[\frac{k-p+q}{p}\right]}\left[\sum_{i=1}^{l}P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right)c^{(i)}_{2,k+q-p-pj}+\sum_{i=l+1}^{q}(-1)^sP_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right)\tilde{c}^{(i)}_{2,k-p+q-pj}\right]=0,$$

$$k=\overline{0,q(p-1)-1},\ s=\overline{0,\left[\frac{k+q-p}{p}\right]}. \tag{2.78}$$

Поклавши в (2.75) $k=q(p-1)$ і розклавши вектор $l_0=x_0^{(1)}$ за базисними векторами:

$$l_0=\sum_{s=0}^{p-1}l_0^{s+1}(HB_0)^s\varphi+\sum_{s=0}^{q-1}l_0^{(p+s+1)}(GA_0)^s\tilde{\varphi},$$

дістанемо

$$\sum_{j=s}^{p-1}\sum_{i=1}^{p}P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c^{(i)}_{1,q(p-1)-qj}=l_0^{(s+1)},\ s=\overline{0,p-1}; \tag{2.79}$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=s}^{g-1}P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right)c^{(i)}_{2,p(q-1)-pj}+\sum_{i=l+1}^{q}\sum_{j=s}^{g-1}(-1)^sP_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right)\tilde{c}^{(i)}_{2,p(q-1)-pj}=$$

$$=l_0^{(p+s+1)},\ s=\overline{0,q-1}. \tag{2.80}$$

Взявши тепер $p-1$ рівнянь із системи (2.77) (при $k=qs$, $s=\overline{0,p-2}$) і одне рівняння з системи (2.79), при $s=p-1$, отримаємо систему p рівнянь із p невідомими $c^{(i)}_{10}$, $i=\overline{1,p}$:

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_1^{(i)}(0)\right)^sc^{(i)}_{10}=0,\ \ s=\overline{0,p-2};\qquad\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_1^{(i)}(0)\right)^{p-1}c^{(i)}_{10}=l_0^p,$$

яку можна подати у вигляді

$$W(0)c_{10}=m_0, \tag{2.81}$$

де $c_{10} = \mathrm{col}\left(c_{10}^{(1)}, c_{10}^{(2)}, \ldots, c_{10}^{(p)}\right)$, $m_0 = \mathrm{col}\left(0, \ldots, 0, l_0^{(p)}\right)$,

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{(1)}(t) & \lambda_1^{(2)}(t) & \ldots & \lambda_1^{(p)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\lambda_1^{(1)}(t)\right)^{p-1} & \left(\lambda_1^{(2)}(t)\right)^{p-1} & \ldots & \left(\lambda_1^{(p)}(t)\right)^{p-1} \end{bmatrix}. \tag{2.82}$$

Аналогічно, взявши $q-1$ рівнянь із системи (2.78) (при $k = ps + p - q$, $s = \overline{0, q-2}$) і останнє рівняння з системи (2.80) (при $s = q-1$), прийдемо до системи q рівнянь з q невідомими $c_{20}^{(i)}$, $i = \overline{1, r}$, $\tilde{c}_{20}^{(i)}$, $i = \overline{l+1, q}$:

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\xi_1^{(i)}(0)\right)^s c_{20}^{(i)} + \sum_{i=l+1}^{q} (-1)^s \left(\xi_1^{(i)}(0)\right)^s \tilde{c}_{20}^{(i)} = 0,\ s = \overline{0, q-2};$$

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\xi_1^{(i)}(0)\right)^{q-1} c_{20}^{(i)} + \sum_{i=l+1}^{q} (-1)^{q-1} \left(\xi_1^{(i)}(0)\right)^{q-1} \tilde{c}_{20}^{(i)} = l_0^{(n)},$$

яку можна подати у вигляді

$$\Omega_1(0) c_{20} = n_0, \tag{2.83}$$

де $c_{20} = \mathrm{col}\left(c_{20}^{(1)}, \ldots, c_{20}^{(l)}, \tilde{c}_{20}^{(l+1)}, \ldots, \tilde{c}_{20}^{(q)}\right)$, $n_0 = \mathrm{col}\left(0, \ldots, 0, l_0^{(n))}\right)$,

$$\Omega_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi_1^{(1)}(t) & \ldots & \xi_1^{(l)}(t) & -\xi_1^{(l+1)}(t) & \ldots & -\xi_1^{(q)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\xi_1^{(1)}(t)\right)^{q-1} & \ldots & \left(\xi_1^{(l)}(t)\right)^{q-1} & \left(-\xi_1^{(l+1)}(t)\right)^{q-1} & \ldots & \left(-\xi_1^{(q)}(t)\right)^{q-1} \end{bmatrix}.$$

Оскільки згідно з умовами (2.7) і 10° $\det W(0) \neq 0$, $\det\Omega_1(0) \neq 0$, то з рівнянь (2.81), (2.83) однозначно визначаються вектори сталих c_{10}, c_{20}:

$$c_{10} = W^{-1}(0) m_0,\ c_{20} = \Omega_1^{-1}(0) n_0. \tag{2.84}$$

Аналогічно визначаються й наступні коефіцієнти $c_{1s}^{(i)}$, $i = \overline{1, p}$; $c_{2s}^{(i)}$, $i = \overline{1, l}$, $\tilde{c}_{2s}^{(j)}$, $j = \overline{l+1, q}$, $s = 1, 2, \ldots$. Дійсно, припустимо, що ці сталі вже визначено при $s < k$ і знайдемо $c_{1k}^{(i)}$, $i = \overline{1, p}$, $c_{2k}^{(i)}$, $i = \overline{1, l}$, $\tilde{c}_{2k}^{(j)}$, $j = \overline{l+1, q}$. Розклавши вектор l_k за базисом:

$$l_k = \sum_{s=0}^{p-1} l_k^{s+1} (HB_0)^s \varphi + \sum_{s=0}^{q-1} l_k^{(p+s+1)} (GA_0)^s \tilde{\varphi}$$

і взявши до уваги, що $(HB_0)^s \varphi = 0$ при $s \geq p$, $(GA_0)^s \tilde{\varphi} = 0$ при $s \geq q$, з рівняння (2.75) дістанемо

$$\sum_{j=s}^{[\frac{k}{q}]} \sum_{i=1}^{p} P_s^j \left(\lambda^{(i)}(0)\right) c_{1,k-qj}^{(i)} = l_k^{(s+1)}, s = \overline{0, p-1}, k \geq (p-1)q; \tag{2.85}$$

$$\sum_{j=s}^{\left[\frac{k+q-p}{q}\right]}\left[\sum_{i=1}^{l} P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right) c_{2,k+q-p-pj}^{(i)}+\sum_{i=l+1}^{q}(-1)^s P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right) \tilde{c}_{2,k+q-p-pj}^{(i)}\right]=l_k^{(p+1-s)},$$
$$s=\overline{0, q-1},\ k \geq(p-1) q. \tag{2.86}$$

Візьмемо тепер із системи (2.85) рівняння при $s=0$ на k-у кроці, при $s=1$ — на $(k+q)$-у кроці, при $s=2$ — на $(k+2q)$-у кроці, і т.д., при $s=p-1$ — на $k+(p-1)q$-у кроці. Дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p} c_{1k}^{(i)}=l_k^{(1)};$$

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_1^{(i)}(0)\right) c_{1k}^{(i)}=l_{k+sq}^{(s+1)}-\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=s+1}^{\left[\frac{k+sq}{q}\right]} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right) c_{1,k+sq-qj}^{(i)},\ s=\overline{1, p-1},$$

яка у векторно-матричній формі запишеться у вигляді $W(0)c_{1k}=m_k$, де $c_{1k}=\operatorname{col}\left(c_{1k}^{(1)}, c_{1k}^{(2)}, \ldots, c_{1k}^{(p)}\right)$, а m_k — вектор-стовпець у правій частині. Звідси

$$c_{1k}=W^{-1}(0) m_k. \tag{2.87}$$

Далі з системи (2.86) виберемо рівняння при $s=0$ на $(k+p-q)$-у кроці, при $s=1$ — на $(k+p-q+p)$-у кроці, і т.д., при $s=q-1$ — на $k+p-q+(q-1)p$-у кроці. Об'єднавши їх у систему, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{l} c_{2k}^{(i)}+\sum_{i=l+1}^{q} \tilde{c}_{2k}^{(i)}=l_{k+p-q}^{(p+1)};$$

$$\sum_{i=1}^{l}\left(\xi_1^{(i)}(0)\right)^s c_{2k}^{(i)}+\sum_{i=l+1}^{q}(-1)^s\left(\xi_1^{(i)}(0)\right)^s \tilde{c}_{2k}^{(i)}=l_{k+(s+1)p-q}^{(p+1+s)}-$$
$$-\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=s+1}^{\left[\frac{k+sp}{p}\right]} P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right) c_{2,k+sp-pj}^{(i)}-\sum_{i=l+1}^{q} \sum_{j=s+1}^{\left[\frac{k+sp}{p}\right]}(-1)^s P_s^j\left(\xi^{(i)}(0)\right) \tilde{c}_{2,k+sp-pj}^{(i)},$$

$(s=\overline{1, q-1})$, або у векторно-матричній формі $\Omega_1(0)c_{2k}=n_k$, де

$$c_{2k}=\operatorname{col}\left(c_{2k}^{(1)}, \ldots, c_{2k}^{(l)}, \tilde{c}_{2k}^{(l+1)}, \ldots, \tilde{c}_{2k}^{(q)}\right),$$

а n_k — вектор у правій частині. Звідси

$$c_{2k}=\Omega_1^{-1}(0) n_k. \tag{2.88}$$

Зазначимо, що формули (2.87), (2.88) мають рекурентний характер, оскільки, як неважко переконатися, вектори m_k і n_k містять лише ті числа $c_{1s}^{(i)}$, $c_{2s}^{(i)}$, $\tilde{c}_{2s}^{(i)}$, індекси яких $s<k$.

Подібним чином з рівняння (2.74) визначаються й числові множники $\tilde{c}_1^{(i)}$, $i=\overline{1,p}$, $\tilde{c}_2^{(i)}$, $i=\overline{1,l}$ та $\tilde{c}_2^{(i)}$, $i=\overline{l+1,q}$, припускаючи, що вектори $\psi_s(T)$, $s=\overline{1,p}$, і $(G(T)A_0(T))^s\tilde{\varphi}(T)$, $s=\overline{0,q-1}$, лінійно незалежні, тобто

$$\det\Big[\psi_1(T),\dots,\psi_p(T);\tilde{\varphi}(T);G(T)A_0(T)\tilde{\varphi}(T),\dots,(G(T)A_0(T))^{q-1}\tilde{\varphi}(T)\Big]\neq 0. \tag{2.89}$$

Цим самим завершено процес побудови формального розв'язку крайової задачі (2.3), (2.5).

3. Основні результати

Провівши міркування, аналогічні до викладених в [1], встановимо, що за виконання перелічених вище умов крайова задача (2.3), (2.5) має єдиний розв'язок, який зображується асимптотичною формулою

$$y(t,\varepsilon)=y_r(t,\varepsilon)+O\left(\mu^{r+1+2q-p-pq(h+3)}\right),$$

де розглядається r-наближення $y_r(t,\varepsilon)$, яке одержується з (2.70) шляхом обривання відповідних розвинень на r-у члені.

Звідси, взявши до уваги структуру вектора $y_r(t,\varepsilon)$, отримаємо такі оцінки для шуканих вектора стану $x(t,\varepsilon)$ та керування $u(t,\varepsilon)$:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_l(t,\varepsilon)\|\leq c_1\mu^{r+1+2q-p-pq(h+3)},\ \ \|u(t,\varepsilon)-u_l(t,\varepsilon)\|\leq c_2\mu^{r+1+2q-p-pq(h+3)},$$

де c_1, c_2 — деякі сталі, що не залежать від ε.

Підсумовуючи результати проведених досліджень, приходимо до такої теореми.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* 1°–11°, *(2.52), (2.66), (2.89), то існує єдиний вектор керування* $u(t,\varepsilon)$, *який виражається асимптотичною формулою*

$$\begin{aligned}u(t,\varepsilon)={}&\mu^{-q(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{r}\mu^k\sum_{j=0}^{[\frac{r}{q}]}\tilde{v}_{ji}^{(3)}(t)\tilde{c}_{1,k-qj}^{(i)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=0}^{[\frac{r}{q}]}\mu^{qk}\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+\\&+\mu^{-p(q-1)}\left[\sum_{i=l+1}^{q}\sum_{k=0}^{r}\mu^k\sum_{j=0}^{[\frac{r}{p}]}\tilde{w}_{ji}^{(3)}(t)\tilde{c}_{2,k-pj}^{(i)}\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\left(\sum_{k=1}^{[\frac{r}{p}]}\mu^{kp}\xi_k^{(i)}(\tau)\right)^{-1}d\tau\right)+\right.\\&\left.+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{r}\mu^k\sum_{j=0}^{[\frac{r}{p}]}\tilde{w}_{ji}^{(3)}(t)\tilde{c}_{2,k-pj}^{(i)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\sum_{k=1}^{[\frac{r}{p}]}\mu^{kp}\xi_k^{(i)}(\tau)\right)^{-1}d\tau\right)\right]+\\&+O\left(\mu^{r+1+2q-p-pq(h+3)}\right),\end{aligned}$$

що переводить систему (1.1) із стану $x_1(\varepsilon)$ *в стан* $x_2(\varepsilon)$, *мінімізуючи функціонал (1.4).*

Відповідна траєкторія, за якою здійснюється цей перехід, виражається асимптотичною формулою

$$
\begin{aligned}
x(t,\varepsilon) = \mu^{-q(p-1)} & \left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{r} \mu^k \sum_{j=0}^{[\frac{r}{q}]} v_{ji}^{(1)}(t) c_{1,k-qj}^{(i)} \exp\Big(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \Big(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=0}^{[\frac{r}{q}]} \mu^{qk} \lambda_k^{(i)}(\tau)\Big) d\tau\Big) + \right. \\
& + \left. \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{r} \mu^k \sum_{j=0}^{[\frac{r}{q}]} \tilde{v}_{ji}^{(1)}(t) \tilde{c}_{1,k-qj}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=0}^{[\frac{r}{q}]} \mu^{qk} \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right)\right] + \\
& + \mu^{-p(q-1)} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{r} \mu^k \sum_{j=0}^{[\frac{r}{p}]} w_{ji}^{(1)}(t) c_{2,k-pj}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \left(\sum_{k=1}^{[\frac{r}{p}]} \mu^{kp} \xi_k^{(i)}(\tau)\right)^{-1} d\tau\right) + \right. \\
& + \sum_{i=l+1}^{q} \sum_{k=0}^{r} \mu^k \sum_{j=0}^{[\frac{r}{p}]} \tilde{w}_{ji}^{(1)}(t) \tilde{c}_{2,k-pj}^{(i)} \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \left(\sum_{k=1}^{[\frac{r}{p}]} \mu^{kp} \xi_k^{(i)}(\tau)\right)^{-1} d\tau\right) + \\
& + \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{r} \mu^k \sum_{j=0}^{[\frac{r}{p}]} \tilde{w}_{ji}^{(1)}(t) \tilde{c}_{2,k-pj}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \left(\sum_{k=1}^{[\frac{r}{p}]} \mu^{kp} \xi_k^{(i)}(\tau)\right)^{-1} d\tau\right) + \\
& + \left. \sum_{i=l+1}^{q} \sum_{k=0}^{r} \mu^k \sum_{j=0}^{[\frac{r}{p}]} w_{ji}^{(1)}(t) c_{2,k-pj}^{(i)} \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \left(\sum_{k=1}^{[\frac{r}{p}]} \mu^{kp} \xi_k^{(i)}(\tau)\right)^{-1} d\tau\right)\right] + \\
& + O\left(\mu^{r+1+2q-p-pq(h+3)}\right).
\end{aligned}
$$

Коефіцієнти наведених розвинень визначаються за описаним вище алгоритмом.

Перелік цитованих джерел

1. *Тарасенко О. В.* Побудова асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2012. — № 13. — С. 374-401.
2. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.
3. *Яковець В. П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: дис. . . . д-ра. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / В. П. Яковець. — К., 1993. — 318 с.
4. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
5. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. — К.: Вища шк., 1991. — 207 с.
6. *Яковец В. П.* Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений / В. П. Яковец, М. Б. Вира // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна. — Воронеж: ВорГУ, 2008. — С. 319–332.

Получена 25.10.2013