Динамические системы, вып. 26 (2009), 79–84

УДК 715.11

Расширения доказуемостно-интуиционистской логики, не обладающие интерполяционным свойством

И.Г. Симонова, В.В. Вербицкий

Одеський національний університет ім. І.І. Мечнікова,
Одеса 65026. *E-mail: gayanovna@mail.ru, vvverb@mail.ru*

Аннотация. Логика l называется расширением доказуемостно-интуиционистской логики, если она содержит все аксиомы последней и замкнута относительно modus ponens. Ранее было показано, что существует континуум расширений доказуемостно-интуиционистской логики, обладающих интерполяционным свойством. В настоящей статье мы доказываем, что существует континуум расширений доказуемостно-интуиционистской логики, не обладающих интерполяционным свойством. При этом все эти логики финитно аппроксимируемы.

Ключевые слова: доказуемостно-интуиционистская логика, интерполяционное свойство, финитно аппроксимируемые логики.

1. Введение

Выполнимость интерполяционного свойства для логики l означает, что для любой импликации $A \supset B \in l$, где A, B имеют общие пропозициональные переменные, существует интерполянт C содержащий только переменные, входящие и в A, и в B, такой, что $A \supset C \in l$ и $C \supset B \in l$.

Л.Л.Максимова доказала [4], что интерполяционая теорема выполняется для интуиционистской логики и лишь для конечного числа ее расширений. В [6] доказано, что существует континуум расширений доказуемостно-интуиционистской логики, обладающих интерполяционным свойством. В этой статье построен континуум финитно-аппроксимируемых расширений доказуемостно-интуиционистской логики, не обладающих интерполяционным свойством(теорема 2).

Доказуемостно-интуиционистское исчисление $I^{\triangle}$ было сформулировано в [3] как аксиоматизация одноименной логики. Исчисление $I^{\triangle}$ задается на основе пропозиционального языка сигнатуры:

$$\vee \ \& \ \supset \ \neg \ \triangle \tag{1}$$

и переменных $p, q, r, ...$ (возможно с индексами), где знак $\triangle$ понимается как унарная пропозициональная связка.

Аксиомами $I^{\triangle}$ являются аксиомы интуиционистского пропозиционального исчисления I [1], а также следующие три аксиомы:

$$(p \supset \triangle p)$$

$$((\triangle p \supset p) \supset p)$$

$$(\triangle p \supset (((q \supset p) \supset q) \supset q))$$

Под расширением доказуемостно-интуиционистской логики понимается такая совокупность формул в сигнатуре (1), которая содержит все аксиомы исчисления $I^{\triangle}$ и замкнута относительно его правил вывода.

Алгебраической интерпретацией для $I^{\triangle}$ служат $\triangle$ — псевдобулевы алгебры ($\triangle$-ПБА) [2], т.е. универсальные алгебры вида $\mathcal{A} =< A, \&, \vee, \supset, \neg, \triangle >$, где $< A, \&, \vee, \supset, \neg >$ — псевдобулева алгебра (ПБА) [5], а относительно унарной операции $\triangle$ справедливы следующие тождества:

$$x \leq \triangle x, \quad \triangle x \supset x = x, \quad \triangle x \leq (y \vee (y \supset x)),$$

где $x \leq y$ означает $x \ \& \ y = x$. Наибольший элемент решетки обозначается 1, наименьший — 0.

Каждому расширению l доказуемостно-интуиционистской логики соответствует многообразие M_l $\triangle$-псевдобулевых алгебр, задаваемое совокупностью тождеств $\{A = 1 | A \in l\}$. Многообразию M $\triangle$-ПБА соответствует логика $l(M) = \{A | M \models \models A = 1\}$. Логика называется финитно-аппроксимируемой, если соответствующее многообразие порождается конечными алгебрами.

Говорят, что класс алгебр K амальгамируем [7], если для любых $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in K$ выполнено условие:

(A) для любых мономорфизмов $i_1 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1$, $i_2 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_2$, существует алгебра $\mathcal{A} \in K$ и мономорфизмы $\varepsilon_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}$, $\varepsilon_2 : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$ такие, что $\varepsilon_1 i_1 = \varepsilon_2 i_2$.

Условие (A), очевидно, эквивалентно следующему условию:

(A') если $\mathcal{A}_0$ есть подалгебра $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, то существуют $\mathcal{A} \in K$ и вложения $\varepsilon_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}$, $\varepsilon_2 : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$, тождественные на $\mathcal{A}_0$.

$\triangle$-ПБА $\mathcal{A}$ называется вполне связной, если для всех $x, y \in A, x \vee y = 1 \Longrightarrow x = 1$ или $y = 1$.

Под фильтром $\triangle$-ПБА $\mathcal{A}$ будем понимать фильтр той ПБА [5], которая получается из $\mathcal{A}$, если на ней игнорировать операцию $\triangle$.

Пусть S — система фильтров $\triangle$-ПБА $\mathcal{A}$ и $\{1\} \in S$. Система S называется полной, если $\cap_{\Phi \in S} \Phi = \{1\}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется подпрямо неразложимой, если она обладает полной системой фильтров.

Будем говорить, что $\triangle$-псевдобулева алгебра $\mathcal{A}$ имеет $\triangle$-длину n, если существует наименьшее натуральное число n такое, что $\triangle^n_{\mathcal{A}} 0 = 1$, где через $\triangle^n_{\mathcal{A}} 0$ обозначен элемент $\underbrace{(\triangle(\triangle(...(\triangle}_{n} 0)...)))$.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Логика l декартового произведения $\triangle$-ПБА $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$(рис. 1) не обладает интерполяционным свойством.*

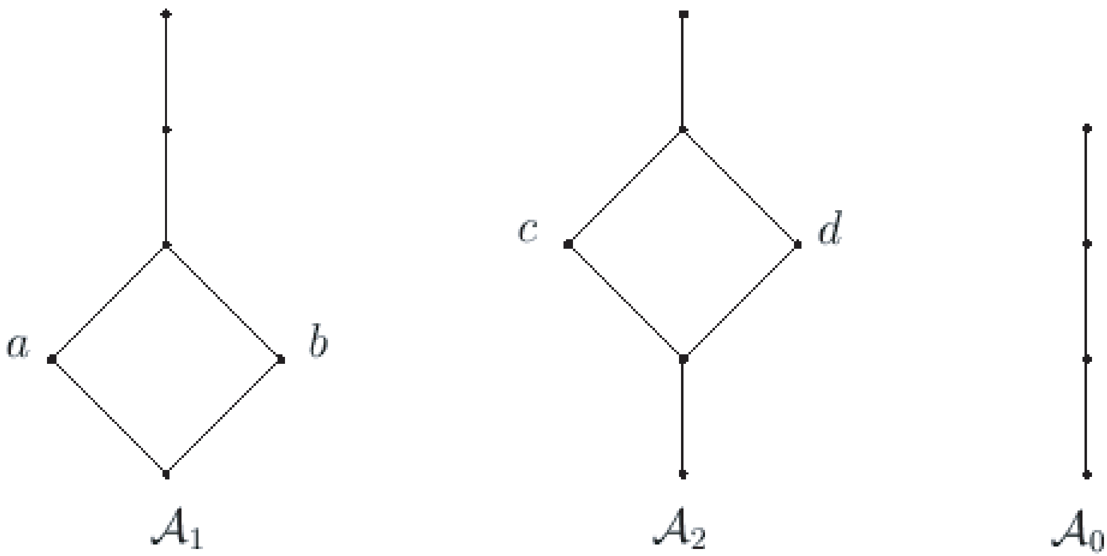

Рис. 1.

Доказательство теоремы 1. Алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ имеют общую подалгебру $\mathcal{A}_0$. Докажем, что в многообразии M_l не существует общего расширения $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ над $\mathcal{A}_0$. Предположим, $(\mathcal{A}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — такое общее расширение и $\mathcal{A} \in M_l$. В силу известного результата Биркгофа-Тарского, алгебра $\mathcal{A}$ является фактор-алгеброй по некоторому фильтру Φ подалгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$ некоторого прямого произведения $\mathcal{B}_i, i \in I$, где каждая алгебра $\mathcal{B}_i$ есть либо $\mathcal{A}_1$, либо $\mathcal{A}_2$. Если $(e_i)_{i\in I}$ — элемент алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$, то через $|(e_i)_{i\in I}|$ будем обозначать соответствующий элемент алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть:

$$\varepsilon_1(a) = |(a_i)_{i\in I}|, \quad \varepsilon_1(b) = |(b_i)_{i\in I}|, \quad \varepsilon_2(c) = |(c_i)_{i\in I}|, \quad \varepsilon_2(d) = |(d_i)_{i\in I}|.$$

Тогда:

$$\varepsilon_1(a\&b) = \varepsilon_1(0) = |(0_i)_{i\in I}| = \varepsilon_1(a)\&\varepsilon_1(b) = |(a_i)_{i\in I}|\&|(b_i)_{i\in I}| = |(a_i\&b_i)_{i\in I}|;$$

$$\varepsilon_1(a \vee b) = \varepsilon_1(\triangle 0) = \triangle\varepsilon_1(0) = \triangle|(0_i)_{i\in I}| = |(\triangle 0_i)_{i\in I}| = \varepsilon_1(a) \vee \varepsilon_1(b) = |(a_i \vee b_i)_{i\in I}|;$$

$$\varepsilon_2(c\&d) = \varepsilon_2(\triangle 0) = |(\triangle 0_i)_{i\in I}| = \varepsilon_2(c)\&\varepsilon_2(d) = |(c_i\&d_i)_{i\in I}|;$$

$$\varepsilon_2(c \vee d) = \varepsilon_2(\triangle^2 0) = |(\triangle^2 0_i)_{i\in I}| = \varepsilon_2(c) \vee \varepsilon_2(d) = |(c_i \vee d_i)_{i\in I}|.$$

Исходя из этих равенств, можно сделать вывод, что элементы алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$, заданные покомпонентно:

$$f_i^1 = (((a_i \& b_i) \supset 0) \& ((a_i \vee b_i) \supset \triangle 0) \& (\triangle 0 \supset (a_i \vee b_i)) \& ((a_i \supset b_i) \supset b_i) \&$$

$$\& ((b_i \supset a_i) \supset a_i))$$

и

$$f_i^2 = (((c_i \& d_i) \supset \triangle 0) \& (\triangle 0 \supset (c_i \& d_i)) \& ((c_i \vee d_i) \supset \triangle^2 0) \& (\triangle^2 0 \supset (c_i \vee d_i)) \&$$

$$\& ((c_i \supset d_i) \supset d_i) \& ((d_i \supset c_i) \supset c_i))$$

принадлежат фильтру Φ, и, следовательно, $(f_i^1 \& f_i^2)_{i \in I} \in \Phi$. Если $\mathcal{B}_i \neq \mathcal{A}_1$, то, очевидно, $f_i^1 \neq 1_{\mathcal{B}_i}$. Аналогично, если $\mathcal{B}_i \neq \mathcal{A}_2$, то $f_i^2 \neq 1_{\mathcal{B}_i}$. Таким образом $(f_i^1 \& f_i^2)_{i \in I} \leq (\triangle^2 0_i)_{i \in I}$ и $(\triangle^2 0_i)_{i \in I} \in \Phi$. Получаем, что $\triangle$-длина алгебры $\mathcal{A}$ не больше двух. Очевидно, что если $\triangle$-ПБА $\mathcal{A}$ имеет $\triangle$-длину n, то и всякая ее подалгебра имеет $\triangle$-длину n, а так как $\triangle$-длины алгебр $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ равны трем, то эти алгебры не вложимы в алгебру $\mathcal{A}$. □

На основании примера, построенного в теореме 1, нетрудно получить континуум расширений доказуемостно-интуиционистской логики, не обладающих интерполяционным свойством.

Пусть эквиваленция $X \sim Y$ обозначает формулу $((X \supset Y) \& (Y \supset X))$. Для каждой конечной подпрямо неразложимой алгебры $\mathcal{A} =< A, \&, \vee, \supset, \neg, \triangle >$ определим характеристическую формулу $\chi(\mathcal{A})$, используя элементы A, как индексы пропозициональных переменных:

$$\chi(\mathcal{A}) = \& (((a_x \vee a_y) \sim a_{x \vee y} | x, y \in A) \& ((a_x \& a_y) \sim a_{x \& y} | x, y \in A) \&$$

$$\& ((a_x \supset a_y) \sim a_{x \supset y} | x, y \in A) \& (\neg a_x \sim a_{\neg x} | x \in A) \& (\triangle a_x \sim a_{\triangle x} | x \in A)) \supset a_{w_{\mathcal{A}}},$$

где $w_{\mathcal{A}}$ — предпоследний элемент алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, $\chi(\mathcal{A})$ опровержима на $\mathcal{A}$.

Совершенно аналогично доказательству леммы 7 из [8] доказывается.

Лемма 1. *Пусть M многообразие $\triangle$-ПБА и алгебра $\mathcal{A}$ подпрямо неразложима. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{A} \in M$;
2) $\chi(\mathcal{A}) \notin l(M)$;
3) $l(M) \subseteq l(\mathcal{A})$.

Обозначим через Z_2 цепную$\triangle$-ПБА из двух элементов. Рассмотрим последовательность Q пар $\triangle$-ПБА $\mathcal{A}_{i1}, \mathcal{A}_{i2}$ с общей подалгеброй $\mathcal{A}_{i0}$, где $\mathcal{A}_{i+1j} = Z_2 + \mathcal{A}_{ij} (j \in \in \{0, 1, 2\})$(рис. 2). Многообразие, порожденное алгебрами $\mathcal{A}_{i1}, \mathcal{A}_{i2}$, будем обозначать через M_i.

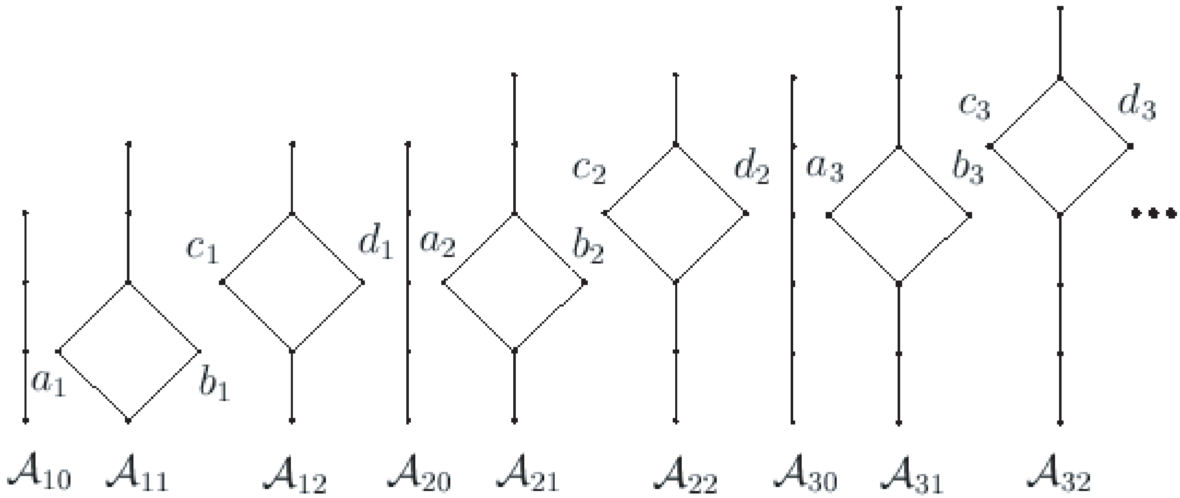

Рис. 2.

Лемма 2. *Для любых двух многообразий M_i и M_j $(i < j)$ последовательности Q выполняются условия:*

1) $\mathcal{A}_{i1} \notin M_j$;

2) $\mathcal{A}_{j1}, \mathcal{A}_{j2} \notin M_i$.

Доказательство условия 1) проводится аналогично теореме 1, т.е. доказывается, что алгебру $\mathcal{A}_{i1}$ нельзя вложить ни в какую алгебру, являющуюся фактор-алгеброй по некоторому фильтру Φ подалгебры некоторого прямого произведения $\mathcal{B}_k, k \in I$, где каждая алгебра $\mathcal{B}_k$ есть либо $\mathcal{A}_{j1}$, либо $\mathcal{A}_{j2}$.

Условие 2) имеет место, так как на каждой алгебре многообразия M_i справедливо тождество $\triangle^{i+2}0 = 1$, которое не имеет места на алгебрах $\mathcal{A}_{j1}, \mathcal{A}_{j2}$.

Лемма 3. *Многообразия, порожденные различными подпоследовательностями пар алгебр последовательности Q, различны.*

Доказательство. Заметим, что все алгебры последовательности Q конечны и подпрямо неразложимы. Так как по лемме 2, для любых $i, j (i < j), \mathcal{A}_{i1} \notin M_j$, то по лемме 1:

$$l(M_j) \nsubseteq l(\mathcal{A}_{i1})$$

следовательно, $l(M_j) \nsubseteq l(\mathcal{A}_{i1}) \cap l(\mathcal{A}_{i2})$, то есть $l(M_j) \nsubseteq l(M_i)$.

Из условия 2) леммы 2 вытекает, что:

$$l(M_i) \subseteq l(\mathcal{A}_{j1}) \cap l(\mathcal{A}_{j2})$$

и тогда $l(M_i) \nsubseteq l(M_j)$. □

Лемма 4. *Многообразие M_R, порожденное любой подпоследовательностью R последовательности Q не амальгамируемо.*

Доказательство. Среди пар подпоследовательности R выберем пару $\mathcal{A}_{s1}, \mathcal{A}_{s2}$, с наименьшим первым индексом. Доказательство того, что для вполне связных алгебр $\mathcal{A}_{s1}$ и $\mathcal{A}_{s2}$ с общей подалгеброй $\mathcal{A}_{s0}$ не существует общего расширения в многообразии M_R проводится методами, используемыми в теореме 1. При этом мы воспользуемся следующими равенствами:

$$a_s \& b_s = \triangle^{s-1}0;$$

$$a_s \vee b_s = \triangle^{s}0;$$

$$c_s \vee d_s = \triangle^{s+1}0;$$

$$c_s \& d_s = \triangle^{s}0.$$

Предположение о существовании общего расширения в многообразии M_R приведет нас к тому, что алгебры $\mathcal{A}_{s1}$ и $\mathcal{A}_{s2}$ вкладываются в алгебру, $\triangle$-длина которой меньше $s+2$. □

Из лемм 3 и 4 следует:

Теорема 2. *Существует континуум не амальгамируемых многообразий $\triangle$-псевдобулевых алгебр, следовательно, существует континуум финитно-аппроксимируемых расширений доказуемостно-интуиционистской логики, не обладающих интерполяционным свойством.*

Список цитируемых источников

1. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. — Москва: Иностранная литература, 1957. — 526 с.
2. *Кузнецов А.В.* О доказуемостно-интуиционистском пропозициональном исчислении. — ДАН СССР, 1985. — Т. 283, № 1. — С. 27–29.
3. *Кузнецов А.В.* О суперинтуиционистских логиках // Математические исследования. —1975. — Вып. 2. — С. 150–158.
4. *Максимова Л.Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. —1977. — Т. 18, № 6. — С. 643–681.
5. *Рассева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. — Москва: Наука, 1972. — 591 с.
6. *Симонова И.Г.* Об интерполяционном свойстве для расширений доказуемостно-интуиционистской логики // Математические заметки. —1990. — Т. 47, № 5. — С. 88–99.
7. *Jonsson B.* Extensions of relational structures the theory of models. — Amsterdam, 1965. — P. 146–157.
8. *Wronsky A.* Intermediate logics and disjunction property. // Rep. Math., Logic. —1978. — Vol. 1. — P. 39–51.

Получена 08.03.2009