

УДК 519.672+534.14+62.53

Особенности перехода к детерминированному хаосу в неидеальной гидродинамической системе «бак с жидкостью — электродвигатель»

А. Ю. Швец, В. А. Сиренко

Национальный технический университет Украины "КПИ"
Киев 03057. E-mail: alex.shvets@bigmir.net

Аннотация. Рассмотрена гидродинамическая система, состоящая из цилиндрического бака, частично заполненного жидкостью, и электродвигателя ограниченной мощности, возбуждающего колебания бака. Построена карта динамических режимов системы. Детально изучены сценарии переходов к детерминированному хаосу. Выявлены нетипичные особенности таких переходов. Исследованы фазовые портреты, распределения спектральной плотности и инвариантной меры, сечения и отображения Пуанкаре аттракторов системы.

Ключевые слова: регулярный и хаотический аттрактор, карта динамических режимов, неидеальное возбуждение.

1. Введение

Исследования колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрических баках имеют большое прикладное значение, так как многие современные машины и механизмы в качестве составных частей имеют цилиндрические баки частично заполненные жидкостью. Важной особенностью в исследовании таких гидродинамических систем является учет неидеальности источника возбуждения колебаний бака с жидкостью [2, 5, 9, 10]. Несмотря на это, в большинстве исследований динамики гидродинамических систем пренебрегается обратным влиянием бака с жидкостью на источник возбуждения его колебаний [1, 4, 7, 11]. Такой подход имеет смысл только в тех случаях, когда мощность источника возбуждения колебаний значительно превышает мощность, которая потребляется баком с жидкостью [2]. Такие случаи называются "идеальными" по Зоммерфельду — Кононенко [8]. Однако, во множестве современных машин и механизмов мощность источника возбуждения сравнима с мощностью, которую потребляет колебательная нагрузка, в нашем случае бак с жидкостью. В таких "неидеальных" случаях пренебрежение обратным влиянием колебательной нагрузки на функционирование источника возбуждения приведет к грубым ошибкам при исследовании динамики системы, в частности может быть полностью утрачена информация про существующие в системе детерминированные хаотические режимы [2, 5, 9, 10].

В работе исследуется динамика нелинейной динамической системы "бак с жидкостью — электродвигатель" для которой строится карта динамических режимов. Эта карта дает одновременный обзор всех существующих установившихся динамических режимов системы, наглядно визуализирует взаимное расположение областей существования регулярных и хаотических аттракторов в области допустимых значений параметров. Карты динамических режимов позволяют существенно сократить время при проведении различного рода экспериментов по практическому подтверждению существования динамического режима того ли иного типа.

Основное внимание при исследовании системы "бак с жидкостью — электродвигатель" уделяется изучению нелинейного взаимодействия бака с жидкостью и электродвигателя, который возбуждает горизонтальные колебания бака. Для этой системы разработан специальный программный пакет, с помощью которого проводится комплексное исследование ее установившихся режимов и строится карта динамических режимов. На основании полученной карты проводится детальное исследование регулярных и хаотических режимов системы. Особое внимание уделяется особенностям переходов к детерминированному хаосу. Проведенные в работе исследования являются продолжением и развитием исследований начатых в работах [2, 5, 9, 10].

2. Математическая модель системы

Рассмотрим случай горизонтального возбуждения электродвигателем ограниченной мощности, который соединен через кривошипно — шатунный механизм с жестким цилиндрическим баком, частично заполненным жидкостью. Схематически такая механическая система представлена на рис. 1.

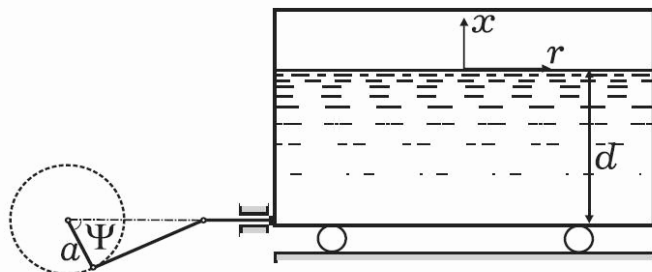


Рис. 1. Гидродинамическая система "бак с жидкостью—электродвигатель"

Обозначим через Ψ угол вращения вала электродвигателя. Когда кривошип поворачивается на угол $\Psi(t)$, бак получает перемещение в горизонтальной плоскости $u(t) = a \cos \Psi(t)$. Пусть жидкость в баке с жестким дном является невязкой, несжимаемой и имеет плотность ρ . Обозначим радиус цилиндрического бака через R , а его поперечное сечение через S . Предположим, что жидкость заполняет бак до глубины $x = -d$. Направление перемещений $u(t)$ платформы бака полагаем совпадающим с направлением полярной оси Ox . Для описания колебаний свободной

поверхности жидкости введем цилиндрическую систему координат $Oxr\Theta$ с началом на оси симметрии бака, на невозмущенной поверхности жидкости. Уравнение рельефа свободной поверхности жидкости запишем в виде $x = \zeta(r, \Theta, t)$.

Движение жидкости в баке будем описывать с помощью потенциала скорости жидкости $\varphi(x, r, \Theta, t)$,

Далее представим функции $\zeta(r, \Theta, t)$ и $\varphi(x, r, \Theta, t)$ в виде рядов по собственным модам колебаний:

$$\begin{aligned}\zeta(r, \Theta, t) &= \sum_{i,j} [q_{ij}^c(t)\chi_{ij}(r) \cos i\Theta + q_{ij}^s(t)\chi_{ij}(r) \sin i\Theta], \\ \varphi(x, r, \Theta, t) &= \sum_{i,j} [\varphi_{ij}^c(t)X_{ij}(x, r) \cos i\Theta + \varphi_{ij}^s(t)X_{ij}(x, r) \sin i\Theta].\end{aligned}\quad (2.1)$$

Также предположим выполнение условия, когда скорость вращения вала электродвигателя $\dot{\Psi}(t)$ в установившемся режиме близка к ω_{11} , где ω_{11} — собственная частота основного тона колебаний свободной поверхности:

$$\dot{\Psi}(t) = \omega_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_{11}\beta(t),\quad (2.2)$$

где β — расстройка частот $\dot{\Psi}(t)$ и ω_{11} ; $\varepsilon = (ar_{11}\mu_{11}^2)^{\frac{1}{3}}$ — малый положительный параметр [2].

Тогда, как показано в работах [2, 9, 10], процесс взаимодействия между колебаниями жидкости в баке по доминантным резонансным модам и источником возбуждения таких колебаний — электродвигателем ограниченной мощности описывается системой пяти дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1\beta - \mu_1q_1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Тут p_1, q_1 и p_2, q_2 — коэффициенты разложения амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости, которые соответствуют первой и второй основным доминантным модам. Система (2.3) зависит от шести параметров $(\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1)$,

значения которых влияют на характер реализующихся в системе режимов, а именно: $\alpha = -\frac{\delta}{\omega_{11}}$ — коэффициент сил вязкого демпфирования; N_1 — угол наклона статической характеристики электродвигателя; величина N_3 определяется следующим соотношением $N_3 = \frac{2}{\omega_{11}}(N_0 + N_1\omega_{11})$; N_0 — постоянная составляющая статической характеристики электродвигателя; μ_1 — коэффициент пропорциональности вибрационного момента; A и B — константы, величины которых зависят от диаметра бака и глубины заполнения его жидкостью [2].

3. Карта динамических режимов

Математическая модель (2.3) системы "бак с жидкостью — электродвигатель" является нелинейной системой пятого порядка, для изучения ее динамических режимов был использован комплекс численных методов, методика применения которых для неидеальных динамических систем приведена в [2]. Для компьютерной реализации указанных методов был разработан новый программный пакет.

Построение карты динамических режимов является важной задачей при исследовании любой динамической системы. Карта динамических режимов представляет собой диаграмму на плоскости, на координатных осях которой откладываются значения двух произвольных (бифуркационных) параметров системы и различными цветами (оттенками цвета) нанесены области существования различных установившихся типов динамических режимов. При построении карты динамических режимов интервалы изменения бифуркационных параметров сканируются с достаточно малым шагом. В каждой сканируемой точке проводится вычисление спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП), с помощью которого качественно определяется тип установившегося динамического режима. Причем в необходимых случаях для точного определения типа установившегося режима дополнительно проводится анализ иных характеристик аттракторов: фазовых портретов, сечений и отображений Пуанкаре, Фурье — спектров и др. После чего, на карту наносится точка соответствующего цвета (оттенка цвета) [3].

На рис. 2 представлена карта динамических режимов системы "бак с жидкостью — электродвигатель" построенная относительно параметров N_3 и α при значениях $A = 1, 12$; $B = -1, 531$; $\mu_1 = 0, 5$; $N_1 = -1$. Начальные условия варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы (2.3).

На полученном листе карты (рис. 2) приведены области трех различных типов динамических режимов. Белым цветом нанесены области значений параметров N_3, α , при которых установившимся режимом системы будут положения равновесия. Сигнатура спектра ЛХП положений равновесия имеет вид $\langle -, -, -, -, - \rangle$. Серым цветом нанесены области значений параметров N_3, α при которых установившимися режимами системы будут предельные циклы с сигнатурой спектра ЛХП $\langle 0, -, -, -, - \rangle$. Наконец, черным цветом нанесены области, в которых уста-

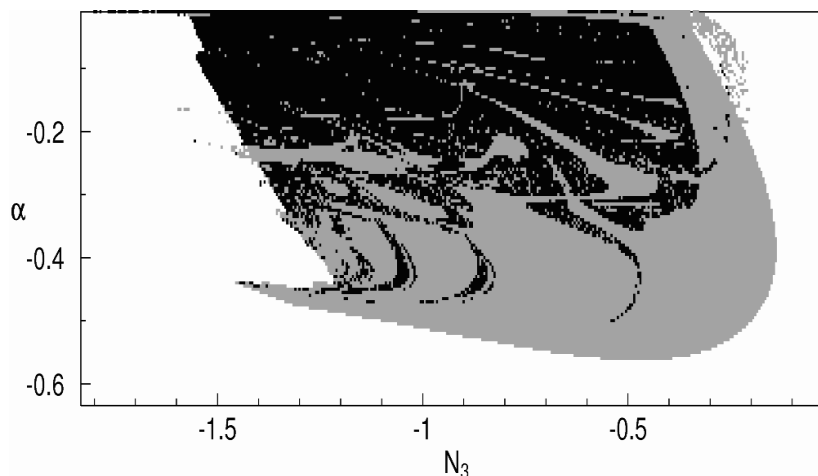


Рис. 2. Карта динамических режимов системы при изменении параметров N_3 и α

новившимися режимами системы будут хаотические аттракторы. Сигнатура спектра ЛХП хаотических аттракторов имеет вид $\langle +, 0, -, -, - \rangle$. Как видно из рис. 2, области существования детерминированного хаоса (хаотических аттракторов) занимают значительную площадь на карте динамических режимов. Это свидетельствует о том, что детерминированный хаос является типичным установившимся режимом системы (2.3). Следует отметить достаточно сложные и "изрезанные" структуры границ областей существования предельных циклов и хаотических аттракторов. Построенная карта динамических режимов наглядно демонстрирует взаимное расположение областей существования аттракторов различных типов в рассмотренной области пространства параметров.

4. Исследование особенностей переходов к хаосу

Используя, описанную в работах [2, 5, 10], методику компьютерных исследований неидеальных динамических систем, детально изучим типы установившихся режимов системы (2.3) и сценарии переходов между динамическими режимами разных типов. Особенности реализации возможных сценариев таких переходов будем исследовать при изменении параметра N_3 вдоль вертикального сечения карты (рис. 2) при $\alpha = -0,3$.

На рис. 3 приведена зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя системы (2.3) от параметра N_3 . Как видно из рис. 3 существуют многочисленные интервалы изменения параметра N_3 , в которых аттракторы системы (2.3) имеют положительные старшие ляпуновские показатели. Эти интервалы соответствуют черным областям карты (рис. 2). В данных интервалах установившимися режимами системы будут хаотические аттракторы. Между интервалами существования хаотических аттракторов (рис. 3) заметны интервалы, на которых значение λ (в данном случае значение второго показателя) являются отрицательными. Таким значениям параметра N_3 соответствуют

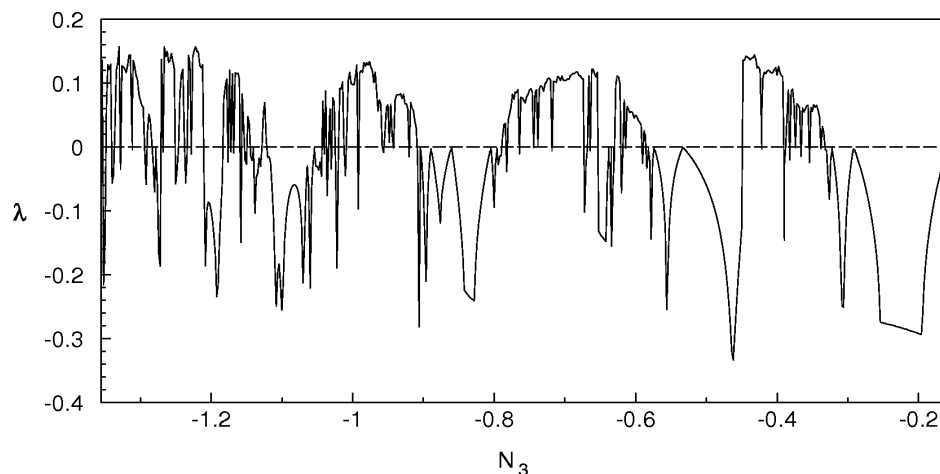


Рис. 3. График зависимости старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя от параметра N_3

периодические режимы системы (2.3), а сами интервалы называются "окнами периодичности".

Как показали проведенные численные расчеты, при $-0,291 < N_3 < -0,18$ аттракторами системы (2.3) будут устойчивые предельные циклы достаточно простой однопериодной структуры. На рис. 4а приведена проекция фазового портрета такого цикла построенная при значении $N_3 = -0,29$. При уменьшении значения параметра N_3 , начиная с $N_3 = -0,292$, наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода циклов. Первые три бифуркации этого каскада приведены на рис. 4б—г. На графике (рис. 3) таким бифуркациям соответствуют последовательные подходы графика из отрицательной области значений λ к нулевой линии $\lambda = 0$. Такой бесконечный каскад удвоения периода заканчивается возникновением хаотического аттрактора при $N_3 = -0,333$ (рис. 4д). Траектории, принадлежащие хаотическому аттрактору, совершают непредсказуемые блуждания вдоль витков аттрактора и всегда возвращаются в некоторую малую окрестность любой его точки, однако эти возвращения непредсказуемы и представляют собой некоторую хаотическую последовательность моментов времени. При построении увеличенного фрагмента графика представленного на рис. 3, соответствующего рассматриваемому интервалу каскада бифуркаций удвоения, можно с высокой точностью определить численные значения точек бифуркаций и критическое значение параметра N_3 , при котором возникает хаотический аттрактор. Таким образом переход к хаосу с правой стороны от интервала существования хаотических аттракторов происходит в соответствии со сценарием Фейгенбаума [3].

По мере дальнейшего уменьшения параметра N_3 хаос становится более развитым (рис. 5а), т.е. траектории начинают заполнять "просветы" в структуре аттрактора (рис. 4д). Однако, уже при $N_3 = -0,337476$ хаотический аттрактор исчезает и в системе возникает предельный цикл (рис. 5б). Все характеристики

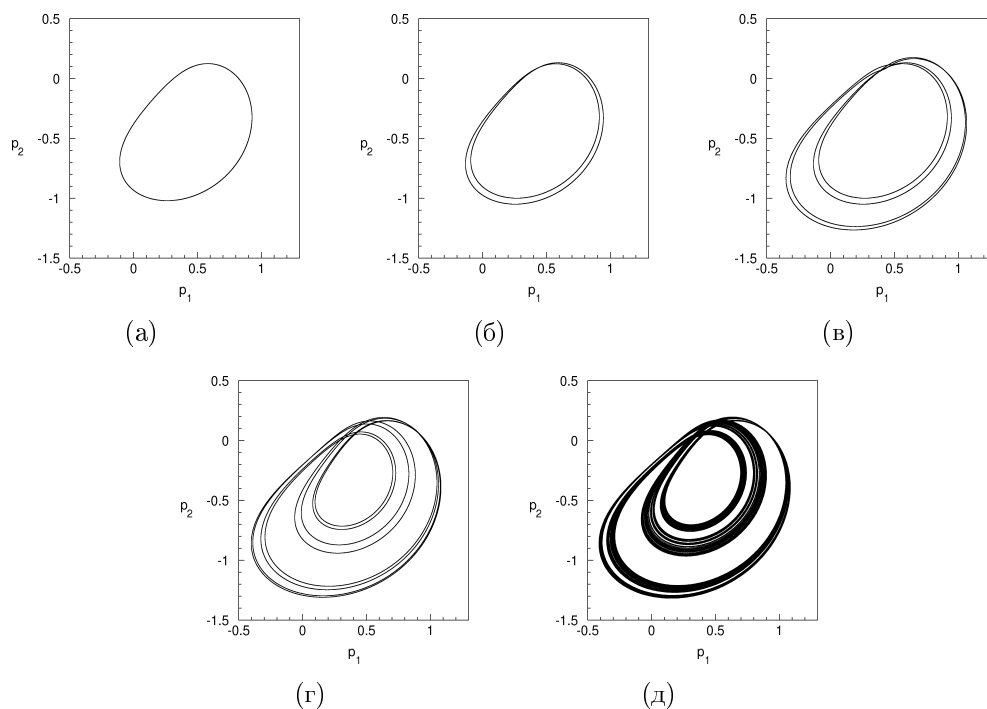


Рис. 4. Проекция фазовых портретов предельных циклов при: $N_3 = -0,29$ (а), $N_3 = -0,292$ (б), $N_3 = -0,324$ (в), $N_3 = -0,332$ (г); проекция фазового портрета хаотического аттрактора при $N_3 = -0,333$ (д)

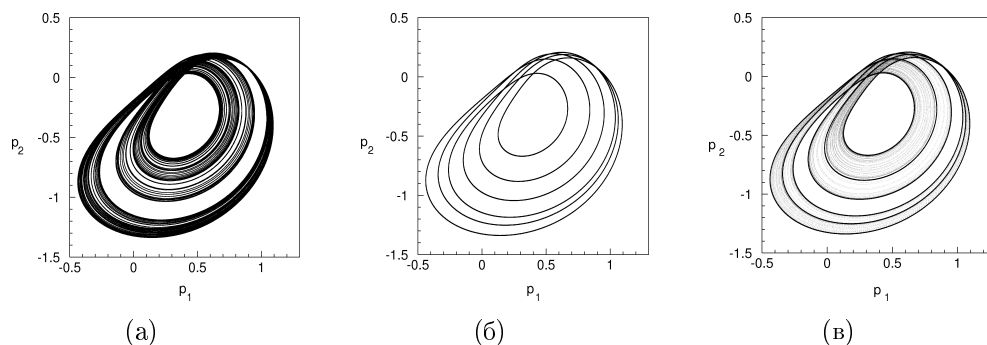


Рис. 5. Проекция фазовых портретов хаотического аттрактора при $N_3 = -0,337475$ (а); предельного цикла при $N_3 = -0,337476$ (б); распределение инвариантной меры хаотического аттрактора при $N_3 = -0,337475$ (в)

этого предельного цикла являются типичными для регулярных аттракторов.

Проанализируем сценарий перехода к хаосу с левой стороны от интервала существования хаотических аттракторов. Когда значение параметра N_3 приближается слева к пороговой точке $N_3 = -0,337475$ существующий в системе предельный цикл (рис. 5б) исчезает и возникает хаотический аттрактор (рис. 5а). Для выяснения механизма возникновения такого хаотического аттрактора рассмотрим еще одну важную его характеристику — распределение инвариантной меры по фазовому портрету аттрактора (рис. 5в). Это распределение характеризует вероятность попадания изображающей точки траектории хаотического аттрактора в указанную область фазового пространства. На рис. 5в более темные области соответствуют тем участкам фазового портрета хаотического аттрактора, в которых его траектории проводят большую часть времени. Такие участки располагаются в некоторой окрестности исчезнувшего предельного цикла (рис. 5б). Движение траекторий хаотического аттрактора в таких областях называют его ламинарной фазой. Более светлым областям на рис. 5в соответствуют непредсказуемые всплески траекторий, которые уходят во внутрь области фазового объема аттрактора. Данная фаза движений траекторий называется турбулентной [2]. Рис. 5в служит наглядной иллюстрацией перехода к детерминированному хаосу через перемежаемость по Помо-Манневиллю [12]. На графике зависимости старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя от параметра N_3 (рис. 3), такому переходу к хаосу соответствует резкий скачек линии графика из отрицательной области значений λ в положительную.

Механизм перемежаемости также обнаруживается при изучении Фурье-спектров, рассмотренных выше регулярного (рис. 5б) и хаотического (рис. 5а) аттракторов. На рис. 6. Фурье — спектр предельного цикла при $N_3 = -0,337476$ является дискретным (рис. 6а) с четкими пиками на частотах, соответствующих основным гармоникам цикла. В отличие от него, распределение спектральной плотности хаотического аттрактора $N_3 = -0,337475$ является непрерывным (рис. 6б), однако в нем сохранились все пики, которые, условно говоря, являются "памятью" о гармониках исчезнувшего предельного цикла и отчетливо выделяются в непрерывном Фурье — спектре.

Таким образом, переход справа от рассматриваемого интервала существования хаотических аттракторов происходит по сценарию Фейгенбаума, а слева по сценарию перемежаемости по Помо — Манневиллю.

Далее проанализируем существующие установившиеся режимы и сценарии перехода "порядок — хаос" при выходе из окна периодичности $-0,65269 < N_3 < -0,63016$ через его правую границу (рис. 3). При каждом значении параметра из промежутка $-0,65269 < N_3 < -0,6369$ в системе одновременно существуют два однотоктных устойчивых предельных цикла. Проекция фазовых портретов таких предельных циклов, построенные при $N_3 = -0,64$, представлены на рис. 7а—б. Эти проекции являются симметричными относительно оси абсцисс $p_2 = 0$. При увеличении параметра $N_3 = -0,6368$ происходит одновременное удвоение периодов симметричных граничных циклов приведенных на рис. 7а—б. Проекция фа-

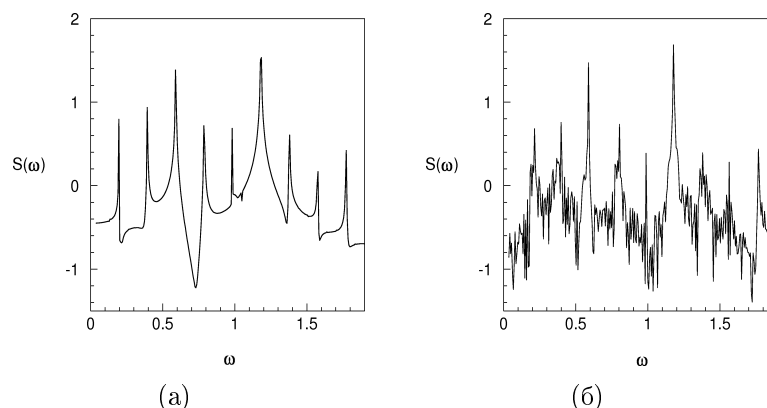


Рис. 6. Фурье — спектры предельного цикла при $N_3 = -0,337476$ (а) и хаотического аттрактора при $N_3 = -0,337475$ (б)

зовых портретов циклов удвоенных периодов при $N_3 = -0,6368$ изображены на рис. 7в—г. Эти циклы также являются симметричными относительно оси абсцисс. Дальнейшее увеличение значения параметра N_3 приводит к возникновению симметричных циклов учетверенного периода и т.д. На графике (рис. 3) таким бифуркациям соответствуют последовательные подходы графика из отрицательной области значений λ к нулевой линии $\lambda = 0$. Такой бесконечный процесс удвоения периодов одновременно существующих симметричных циклов заканчивается возникновением хаотического аттрактора при $N_3 = -0,6295$ (рис. 7д).

Возникший хаотический аттрактор имеет значительно более сложную структуру фазового портрета чем хаотические аттракторы, рассмотренные в предыдущих случаях. Проекция такого аттрактора состоит из двух симметричных относительно горизонтальной оси частей. Амплитуды временных реализаций данного хаотического аттрактора более чем в два раза превышают амплитуды временных реализаций предельных циклов каскада бифуркаций удвоения. Соответственно хаотический аттрактор локализуется в значительно большем объеме фазового пространства нежели объем локализации любого из циклов каскада. Движение типичной траектории по хаотическому аттрактору можно условно разбить на две фазы. В первой из этих фаз траектория совершает хаотические блуждания вдоль витков верхней (нижней) части аттрактора время от времени подходя к границе области локализации потерявших устойчивость верхних (нижних) симметричных предельных циклов. В непредсказуемый момент времени траектория переходит из верхней (нижней) части аттрактора в его нижнюю (верхнюю) часть и начинает совершать хаотические блуждания вдоль витков нижней (верхней) части. Затем, в непредсказуемый момент времени, снова происходит переход траектории из нижней (верхней) части аттрактора в его верхнюю (нижнюю) часть. Такой процесс повторяется бесконечное число раз. Таким образом переход к хаосу имеет особенности характерные как для сценария Фейгенбаума (бесконечный каскад бифуркаций удвоения предельных циклов), так и для перемежаемости (непредсказуемая

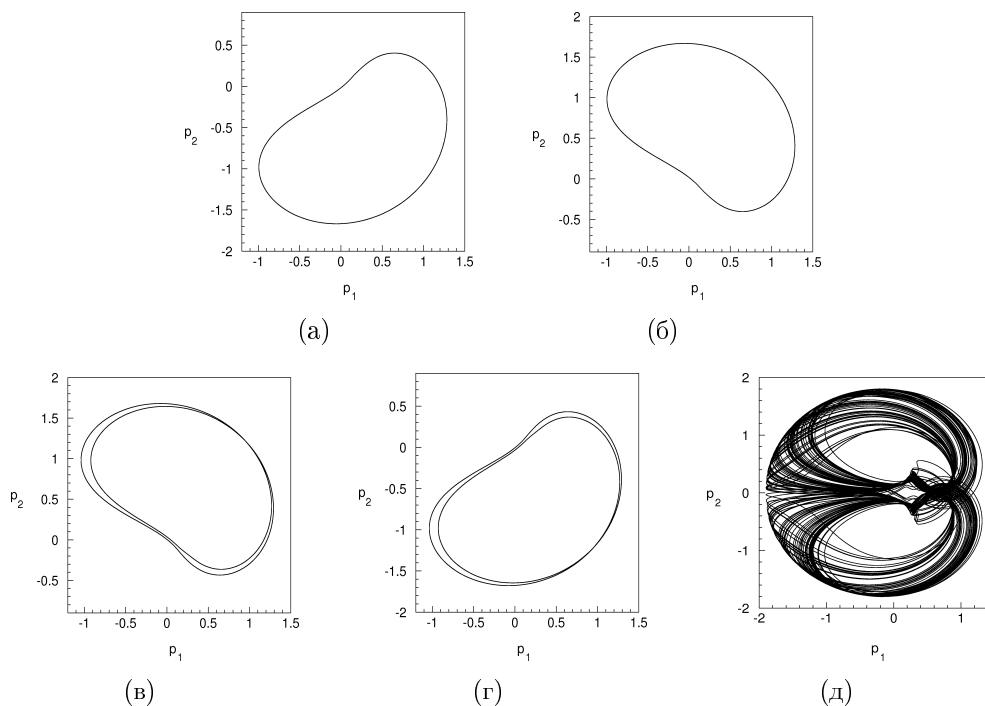


Рис. 7. Проекция фазовых портретов предельных циклов при: $N_3 = -0,64$ (а–б), $N_3 = -0,6368$ (в–г); и хаотического аттрактора при $N_3 = -0,6295$ (д)

переменяемость между верхней и нижней частями возникающего хаотического аттрактора).

Исследуем распределения спектральной плотности полученных регулярных и хаотических аттракторов (рис. 8). Фурье — спектры однотоктного предельного цикла и его первой бифуркации удвоения периода (рис. 8а–б) являются дискретными и гармоническими. Легко заметить раздвоение гармоник в Фурье спектре на рис. 8б характерное для сценария Фейгенбаума. Распределение спектральной плотности хаотического аттрактора при $N_3 = -0,63015$ является непрерывным. Причем в его Фурье — спектре практически полностью исчезают отдельные спектральные пики.

Далее рассмотрим переходы к хаосу через границы окна периодичности $-1,2105 < N_3 < -1,1829$. В этом окне периодичности в системе одновременно существуют симметричные, относительно оси абсцисс, предельные циклы (рис. 9а–б) более сложной структуры, чем однотоктные предельные циклы, проекции фазовых портретов которых представлены на рис. 7а–б. Изменение параметра N_3 , сопровождающееся выходом его значения, как за левую, так и за правую так и за правую границы окна периодичности $-1,2105 < N_3 < -1,1829$ приводит к исчезновению обоих предельных циклов и хаотических аттракторов одинаковой структуры. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора такого типа представлена на рис. 9в. Проекция фазовых портретов таких хаотических аттракторов симметричны относительно оси $p_2 = 0$.

На рис. 9г приведено распределение инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора при $N_3 = -1,182$. Полученное распределение проясняет механизм возникновения данного хаотического аттрактора. Контуры четко прорисованной области на рис. 9г по своей форме представляют собой два "склеившихся" симметричных предельных цикла. Возникновение хаоса имеет многие характерные для перемежаемости особенности. Однако в данном случае движение траектории по аттрактору включает три фазы, две ламинарные и турбулентную. В первой ламинарной фазе траектория совершает квазипериодические движения в малой окрестности одного из "склеившихся" циклов, либо "верхнего" либо "нижнего". В непредсказуемый момент времени происходит турбулентный всплеск и траектория уходит в отдаленные, от окрестности исчезнувшего цикла, области фазового пространства. Такой турбулентной фазе движения соответствуют более бледные участки распределения инвариантной меры на рис. 9г. Затем траектория снова совершает квазипериодические движения в малой окрестности одного из исчезнувших предельных циклов. Причем, после завершения турбулентной фазы, траектория может как вернуться в первую ламинарную фазу движения, так и перейти во вторую ламинарную фазу, которой соответствуют квазипериодические движения в малой окрестности второго из исчезнувших предельных циклов. Такой процесс движения траектории по аттрактору вида "одна из ламинарных фаз — турбулентная фаза — одна из ламинарных фаз" повторяется бесконечное число раз. Причем, непредсказуемыми являются как моменты времени "срыва" траектории в турбулентную фазу, так и "переключения" между двумя ламинарными фазами. Таким образом переход к хаосу напоминает классический сценарий Помо-Манневилля. Однако, в отличие от классического сценария, мы имеем не одну, две ламинарные фазы.

На рис. 9д—е построены Фурье — спектры одного из предельных циклов при $N_3 = -1,183$ и хаотического аттрактора при $N_3 = -1,182$. Заметим, что симметричные предельные циклы имеют одинаковые Фурье — спектры. В данном случае следует отметить, что в Фурье — спектре "склеенного" хаотического аттрактора практически разрушаются отдельные гармоники предельных циклов.

Теперь исследуем динамику системы в небольшом окне периодичности $-0,3916 < N_3 < -0,3873$ при выходе бифуркационного параметра N_3 через правую и левую границы этого окна. Для большей наглядности этого окна построим увеличенный фрагмент графика зависимости ляпуновского характеристического показателя (рис. 3), который включает в себя это окно периодичности (рис. 10а). Как видно из рис. 10а, при выходе из окна периодичности вправо, наблюдаются подходы графика ляпуновской зависимости к нулевой линии ($\lambda = 0$), что характерно при возникновении хаоса по сценарию Фейгенбаума. В свою очередь, при выходе из окна периодичности влево наблюдается резкий скачок графика ляпуновской зависимости из области отрицательных в область положительных значений, что характерно для перемежаемости.

Сначала рассмотрим изменения бифуркационного параметра N_3 приводящие к выходу через правую границу данного окна периодичности. Как показали про-

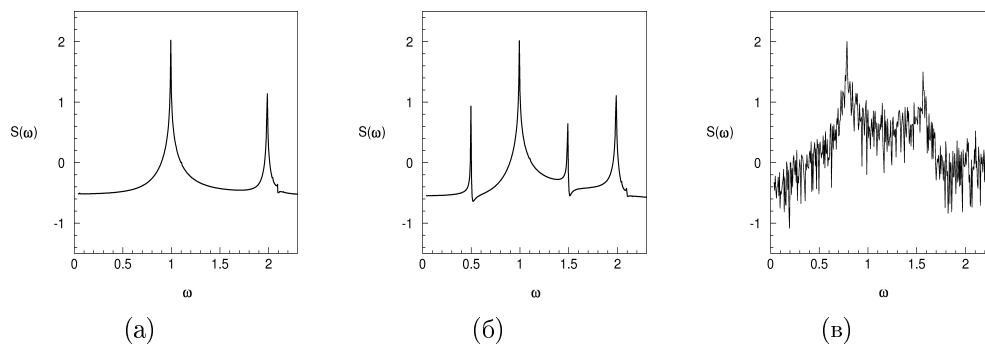


Рис. 8. Фурье—спектры предельных циклов при: $N_3 = -0,64$ (а), $N_3 = -0,6368$ (б); хаотического аттрактора при $N_3 = -0,63015$ (в)

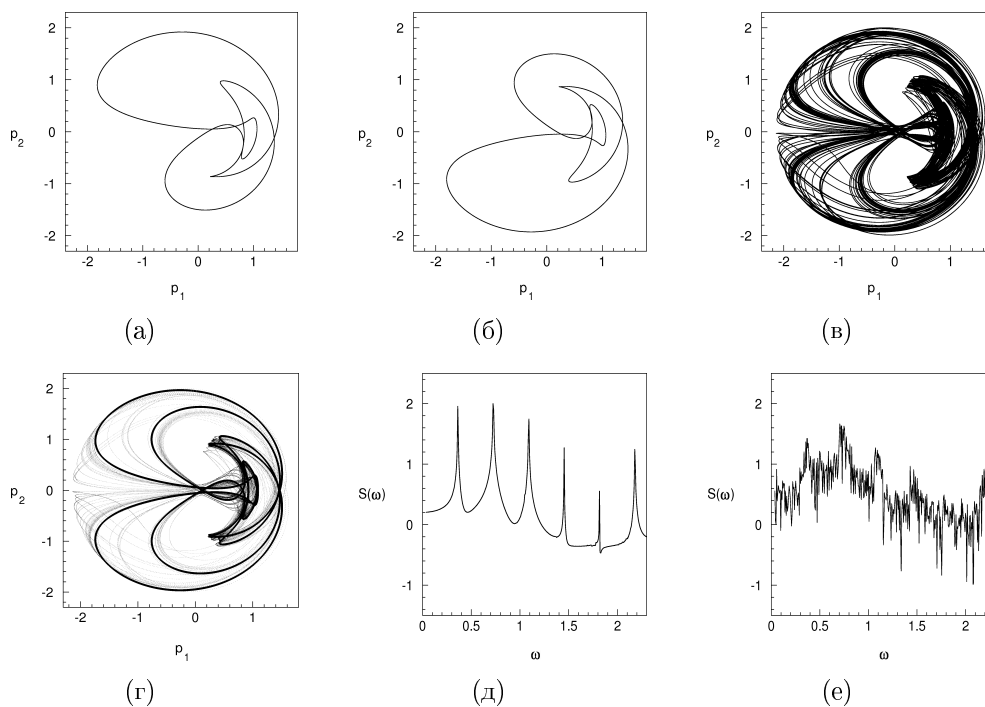


Рис. 9. Проекция фазовых портретов предельных циклов при $N_3 = -1,183$ (а—б); проекция фазового портрета и распределения инвариантной меры хаотического аттрактора при $N_3 = -1,182$ (в—г); Фурье — спектры предельного цикла при $N_3 = -1,183$ (д) и хаотического аттрактора при $N_3 = -1,182$ (е)

веденные компьютерные расчеты, при значениях параметра $-0,3916 < N_3 < -0,3893$ в системе (2.3) одновременно существуют устойчивые симметричные предельные циклы (рис. 10б—в). При значении параметра $N_3 = -0,3892$ происходит первая одновременная бифуркация удвоения периода симметричных предельных циклов. Проекция фазовых портретов симметричных предельных циклов удвоенного периода приведены на (рис. 10г—д). Такой бесконечный каскад удвоения периодов симметричных циклов заканчивается возникновением симметричных хаотических аттракторов при $N_3 = -0,3872$ (рис. 10е—ж). Возникновение каждого из симметричных хаотических аттракторов происходит по классическому сценарию Фейгенбаума. При дальнейшем увеличении значения N_3 происходит развитие хаоса, заключающееся в увеличении объема областей локализации аттракторов в фазовом пространстве. Такие хаотические аттракторы приведены на рис. 10з—и. Заметим, что хаотические аттракторы типа приведенных на рис. 10е—ж и на рис. 10з—и существуют отдельно и характеризуются разными бассейнами притяжения. В этом случае не происходит ранее имевшее место "склеивание" аттракторов.

На рис. 11 приведены Фурье — спектры хаотических аттракторов, представленных на рис. 10е, з. Оба Фурье — спектра являются непрерывными, что характерно для хаотических аттракторов. Однако в непрерывном спектре представленном на рис. 11а четко просматриваются отдельные спектральные пики. Эти пики соответствуют гармоникам предельных циклов. Их присутствие в Фурье — спектре поясняется тем, что такой хаотический аттрактор существует у порога возникновения хаоса. Для хаотических аттракторов существующих при значениях N_3 , находящихся в некотором отдалении от порога хаотичности спектральные пики исчезают. Такими же спектральными свойствами обладают и соответствующие симметричные хаотические аттракторы.

Наконец рассмотрим сценарий перехода к хаосу через левую границу рассмотренного окна периодичности $-0,3916 < N_3 < -0,3873$. Как было описано выше, при значениях параметра $-0,3916 < N_3 < -0,3893$ в системе (2.3) одновременно существуют устойчивые симметричные предельные циклы, проекции фазовых портретов которых были приведены на рис. 10б—в. При значении параметра $N_3 = -0,39161$ происходит одновременное возникновение двух симметричных хаотических аттракторов. Распределения инвариантной меры по проекциям фазовых портретов таких аттракторов представлены на (рис. 12а—б). Эти распределения проясняют механизм возникновения хаоса. На рис. 12а—б четко просматриваются густо затемненные области расположенные в окрестности, исчезающих при прохождении точки бифуркации, симметричных предельных циклов. Квазипериодические движения траекторий хаотических аттракторов в малой окрестности исчезающих предельных циклов являются ламинарной фазой перемежаемости. Более бледные участки распределений (рис. 12а—б) соответствуют турбулентной фазе перемежаемости. Переход от регулярного режима к хаотическому для обоих симметричных хаотических аттракторов происходит по классическому сценарию Помо — Манневилля.

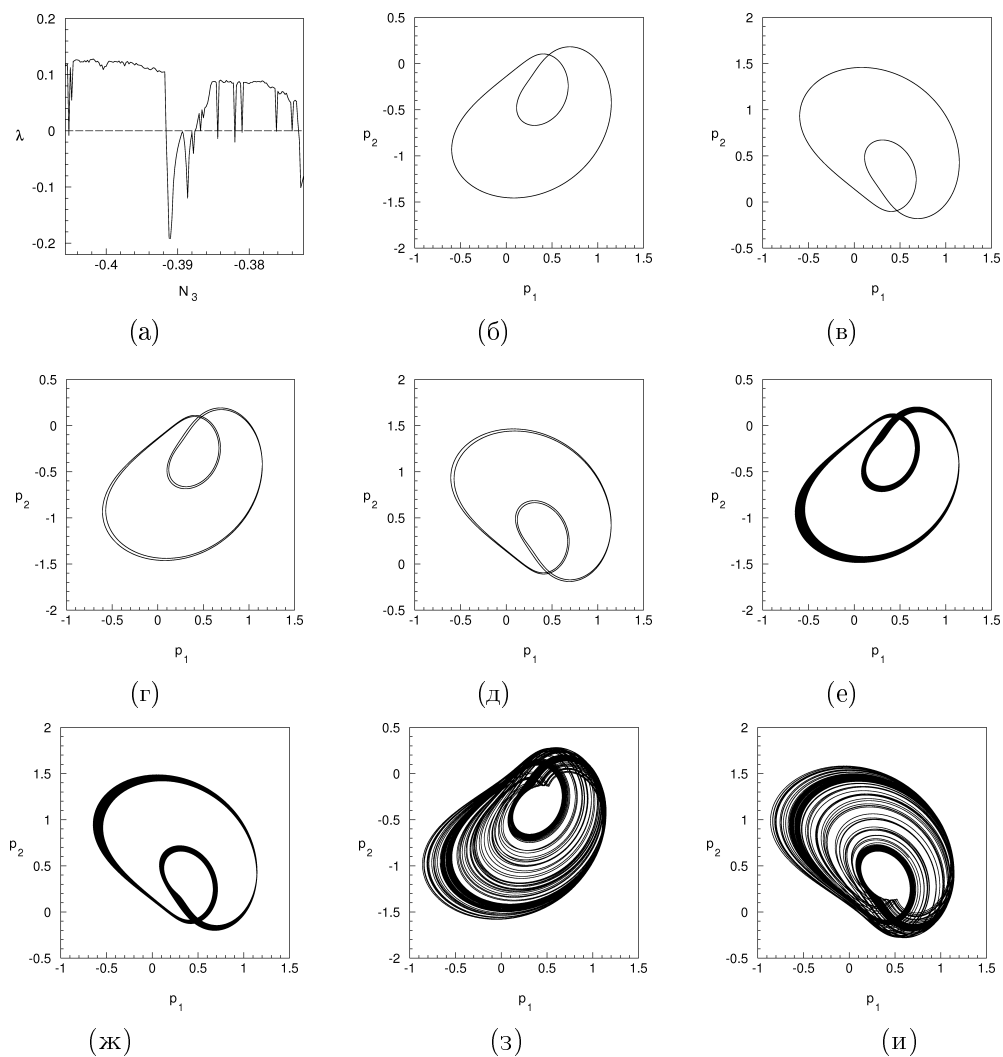


Рис. 10. Увеличенный фрагмент графика ляпуновского показателя (а). Проекции фазовых портретов предельных циклов при: $N_3 = -0,39$ (б–в), $N_3 = -0,3892$ (г–д); и хаотических аттракторов при: $N_3 = -0,3872$ (е–ж), $N_3 = -0,3855$ (з–и);

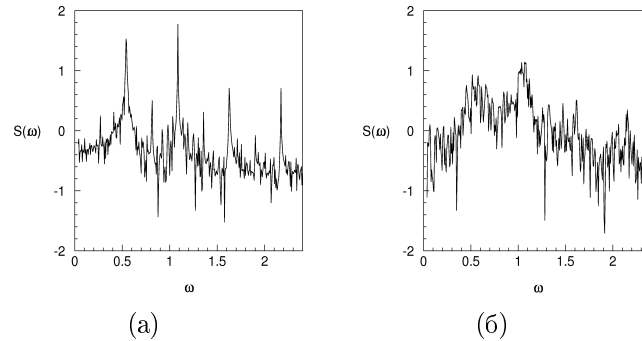


Рис. 11. Фурье — спектры хаотических аттракторов при: $N_3 = -0,3872$ (а), $N_3 = -0,3855$ (б)

Симметричные хаотические аттракторы существуют на сравнительно небольшом интервале изменения параметра N_3 . Уже при $N_3 = -0,397$ в системе происходит бифуркация "хаос — хаос", которая приводит к возникновению хаотического аттрактора нового типа. Проекция фазового портрета такого хаотического аттрактора приведена на рис. 12в. Данный аттрактор представляет собой "склепку" исчезающих, после прохождения точки бифуркации, симметричных хаотических аттракторов. Хаотический аттрактор представленный на рис. 12в очень похож на хаотические аттракторы с рис. 7д и рис. 9в. Заметим, что хаотические аттракторы такого типа являются наиболее типичными хаотическими аттракторами системы (2.3) [2, 5, 9, 10]. Однако переход к хаосу в этом случае происходит по иному сценарию чем в ранее рассмотренных случаях. На рис. 12г приведено распределение инвариантной меры по фазовому портрету аттрактора нового типа. На этом рисунке отчетливо просматриваются две более темные симметричные области (в правой части рисунка), которые по геометрической форме подобны хаотическим аттракторам представленным на рис. 12а—б. Переход к хаосу здесь происходит по сценарию обобщенной перемежаемости описанному в [2, 5, 10]. Движение типичной траектории аттрактора состоит из трех фаз. Две из этих фаз составляют хаотические движения траектории в одной из затемненных (верхней или нижней) областей рис. 12г. То есть в области исчезнувших хаотических аттракторов предыдущего типа. Такие фазы движения называются грубо — ламинарными. Третью фазу движения составляют уходы траектории в отдаленные области (в более бледные области слева на рис. 12г). Эта фаза движения называется турбулентной. Таким образом, траектория, начав движение в одной из грубо — ламинарных фаз, в непредсказуемый момент времени срывается в турбулентную фазу. Далее, снова в непредсказуемый момент времени, возвращается в одну из грубо — ламинарных фаз. Причем начав движение в верхней затемненной области рис. 12г траектория, после турбулентного всплеска, может, как вернуться в верхнюю затемненную область, так и перейти в нижнюю. Подчеркнем, что "переключения" траекторий между грубо — ламинарными фазами непредсказуемы. Такой сложный характер смены фаз движения траектории повторяется бесконечное число раз. Отметим, что в отличие от описанной в [2, 5, 10] обобщенной перемежаемости здесь присут-

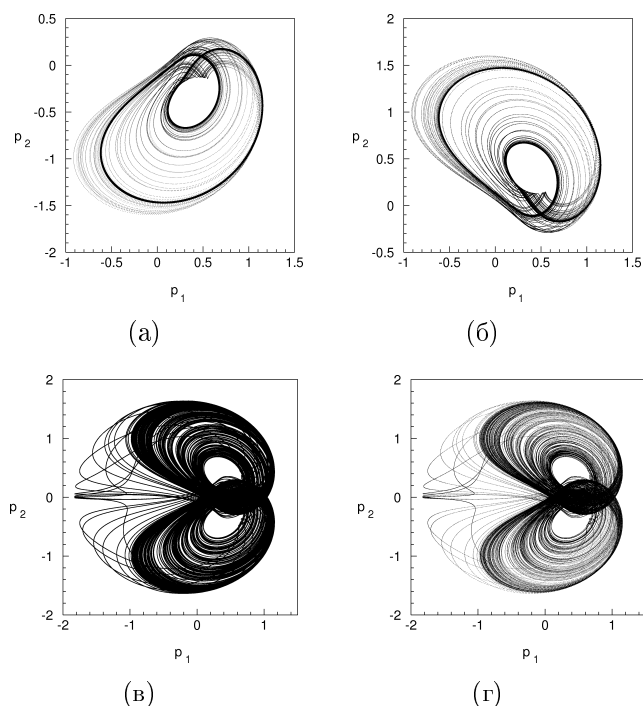


Рис. 12. Распределение инвариантной меры симметричных хаотических аттракторов при $N_3 = -0,39161$ (а–б); проекция фазового портрета (в) и распределение инвариантной меры (г) хаотического аттрактора при $N_3 = -0,397$

ствуют две грубо — ламинарные фазы движения. Такой хаотический аттрактор (рис. 12в) существует до следующего окна периодичности.

На рис. 13 представлены сечения и отображения Пуанкаре двух одновременно существующих симметричных хаотических аттракторов при $N_3 = -0,39161$ и хаотического аттрактора при $N_3 = -0,397$. Сечения и отображения Пуанкаре приведенные на рис. 13а–б и рис. 13г–д имеют квазиленточную структуру и являются, как и проекции фазовых портретов соответствующих аттракторов, симметричными относительно оси абсцисс. В отличие от них проекции сечения (рис. 13в) и отображения (рис. 13е) Пуанкаре "двойного" хаотического аттрактора имеют значительно более сложную структуру. Однако внимательное изучение рис. 13в и рис. 13е позволяет обнаружить в структуре данных точечных хаотических множеств фрагменты качественно подобные структурам соответствующих сечений и отображений симметричных "одинарных" аттракторов. Эти фрагменты четко видны в центре и справа на рис. 13в и в центре на рис. 13е. Данные фрагменты соответствуют грубо — ламинарным фазам. Соответственно отдельные точки образующие "полумесяц" слева на рис. 13в и отдельные точки в правой верхней и в левой нижней частях рис. 13е соответствуют турбулентной фазе.

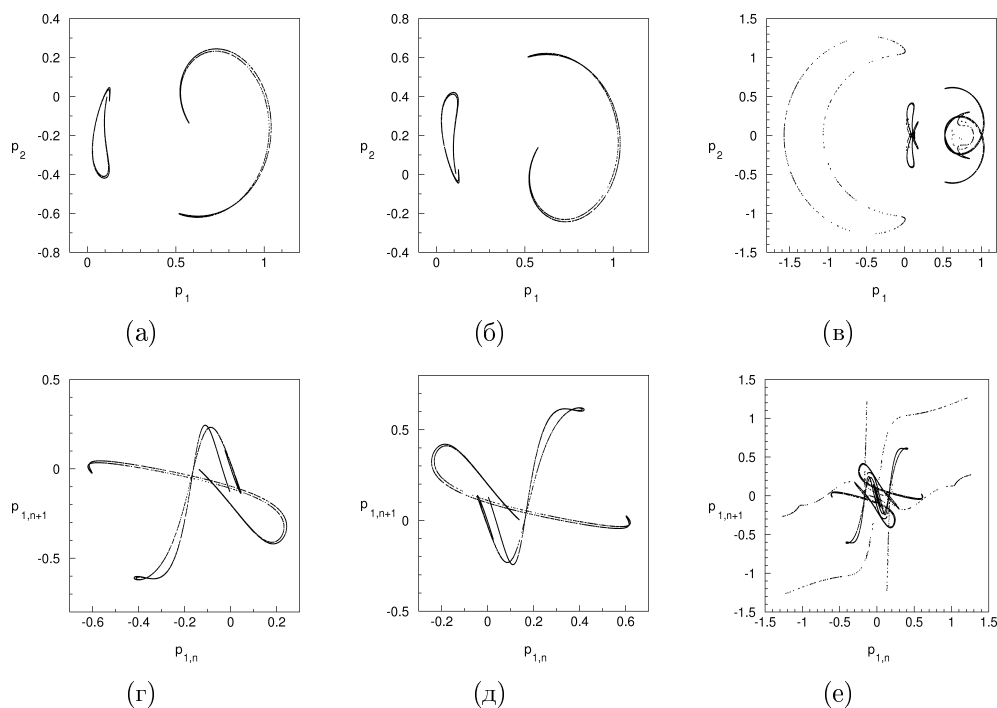


Рис. 13. Проекция сечения Пуанкаре хаотических аттракторов при: $N_3 = -0,39161$ (а–б), $N_3 = -0,397$ (в); отображения Пуанкаре хаотических аттракторов при: $N_3 = -0,39161$ (г–д), $N_3 = -0,397$ (е)

5. Выводы

Рассмотренная неидеальная гидродинамическая система «бак с жидкостью — электродвигатель» обладает большим разнообразием регулярной и хаотической динамики. Построенная карта динамических режимов позволяет наглядно представить области существования различных типов динамических режимов, как регулярных так и хаотических. Для данной системы найдены новые особенности реализации сценариев переходов от регулярных режимов к хаотическим и сценариев переходов в хаосе.

Список цитируемых источников

1. *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наукова думка, 2010. — 407 с.
2. *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2008. — 280 с.
3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — Москва: Физматлит, 2006. — 356 с.
4. *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракет — носителей космических аппаратов. — Москва: Машиностроение, 1983. — 296 с.

5. *Швец А.Ю.* Сценарии переходов "порядок — хаос" при резонансных колебаниях жидкости в цилиндрических баках // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 216—249.
6. *Feigenbaum M.J* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. — 1979. — Vol. 21, № 6. — P. 669—706.
7. *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. — Cambridge University Press. — 2005. — 970p.
8. *Kononenko V.O.* Vibrating system with a limited power — supply. — London: Pliffe, 1969. — 236 p.
9. *Krasnopol'skaya T.S., Shvets A.Yu.* Chaotic surface waves in limited power — supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids & Structures — 1994. — Vol. 8, № 1. — P. 1—18.
10. *Krasnopol'skaya T.S., Shvets A.Yu.* Dynamical chaos for a limited power supply oscillations in cylindrical tanks // Journal of Sound and Vibration.— 2009. — Vol. 322. — P. 532—553.
11. *Miles J.W.* Internally resonant surface waves in circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 149, P. 1—14.
12. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Comm. Math. Phys. — 1980. — Vol. 74, № 2. — P. 189—197.

Получена 25.10.2010