Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 103–114

УДК 517.977

Достатні умови існування оптимального керування з оберненим зв'язком для деяких класів систем стохастичних диференціальних рівнянь

О. О. Самойленко
Київський національний унівенрситет ім. Тараса Шевченка,
Київ 03022. *E-mail: anelka.s@mail.ru*

Анотація. Доведено існування оптимального керування з оберненим зв'язком для систем стохастичних диференціальних рівнянь на необмеженому проміжку часу в термінах коефіцієнтів вихідної системи. Результат був отриманий без використання методу динамічного програмування Беллмана та принципу максимуму Понтрягіна. Для доведення використовувались прямі методи розв'язання екстремальних задач.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння, існування оптимального керування, керування з оберненим зв'язком.

1. Вступ

В данній работі розглядається задача оптимального керування системою стохастичних дифференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dx = (A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t, x))dt + \sigma(t, x(t), u(t, x))dW(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

З критерієм якості

$$J(u) = E\int_0^\infty L(t, x, u(t, x))dt \to \inf, \tag{1.2}$$

де x_0 — фіксований вектор, $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u(t, x) \in \mathbb{R}^m$ — керування з оберненим зв'язком, $f(t, x, u)$ — вектор із $\mathbb{R}^d$, $A(t)$ — квадратна матриця вимірності d, $\sigma(t, x, u) - d \times r$ — вимірна матриця, $W(t)$ — стандартний вінерівський процес вимірності r з незалежними компонентами, визначений на деякому ймовірнісному просторі (Ω, F, P) при $t \geq 0$.

Більш точна постановка буде дана в основній частині роботи.

Дана задача розглядалася в роботах багатьох авторів, відмітимо лише деякі роботи [6], [12], [4], де є обширна бібліографія, в яких розглядалася система стохастичних диференціальних рівнянь (1.1) з критерієм якості вигляду

$$J(u) = \mathbb{E}\left\{ \int_0^\tau L(s, x, u)ds + \psi(\tau, x(\tau)) \right\} \to \inf,$$

де $x \in Q$ — обмежена область, а τ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ із Q. Для доведення існування оптимального допусимого керування автори використовують метод динамічного програмування. даний метод вимагає розв'язку відповідного рівняння

Беллмана, що є досить складною задачею. Тому представляє інтерес отримання умов існування оптимального керування стохастичними системами без розв'язку рівняння динамічного програмування, а використовуючи прямі методи розв'язання екстремальних задач. При цьому досить важко отримати такі умови в термінах коефіцієнтів вихідної системи і функції L, що входить в критерій якості (1.2). В цьому напрямку відомо досить мало результатів. Так в роботах [7], [6] з використанням стохастичної експоненти отримані подібні умови при відсутності керування в стохастичному члені. В роботі [10] ці результати узагальнені на випадок дробового вінерівського процесу, знову ж таки при входженні керування лише в коефіцієнт зносу. В нашій роботі можливе керування і в стохастичному члені.

Робота складається із вступу, додаткових відомостей, постановки задачі і основного результату.

2. Додаткові відомості

Нехай $(\Omega, F, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, G — деяка σ-алгебра, $G \subset F$, ξ — випадкова величина, $\mathbb{E}(\xi \mid G)$ — умовне математичне сподівання ξ відносноо G. Тоді відомо ([3, ст. 115]), що співвідношення

$$\mathbb{E}(\eta\mathbb{E}\{\xi \mid G\}) = \mathbb{E}\eta\xi,$$

виконується для довільної, обмеженої, G-вимірної випадкової величини η повністю визначає умовне математичне сподівання випадкової величини ξ відносно σ-алгебри G.

В даній роботі слабкий розв'язок задачі Коші (1.1) ми розуміємо в сенсі наступного означення.

Означення 1. Якщо існує такий ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbb{P})$ на якому можна задати процес броунівського руху $W(t)$ для $t \in [0, T]$ і випадковий процес $\{x(t),\, t \in [0, T]\}$ так, що з ймовірністю 1 мала місце рівність

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t, x))ds + \int_0^t \sigma(t, x(t), u(t, x))dW(s),$$

то даний процес будемо називати *слабким розв'язком задачі* (1.1).

Дамо означення оптимального допустимого керування.

Означення 2. Припустимо, що для задачі (1.1), (1.2) існує керування з оберненим зв'язком $u(t, x)$, що дає розв'язок задачі оптимального керування. Якщо $\mathbf{x(t)}$ — роз'язок рівняння (1.1), то $u(t, x) = u(t, \mathbf{x(t)})$ є оптимальним керуванням з оберненим зв'язком.

Далі визначимо множину випадкових процесів $M_2^{c,loc}$.

$M_2^{c,loc} = \{X = X(t), t \geq 0\}$; де X — локально квадратично інтегровний мартингал $X(0) = 0$ м.н., а також відображення $t \to X(t)$ є неперервним майже напевно.

Через $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ позначимо простір обмежених, двічі неперервно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ функцій.

Визначимо далі оператор L_u, що діє на функції f із класу $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ наступним чином

$$L_u f(x) = \sum_{i=1}^{d} f_i(t,x,u)\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x,u)\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}, \tag{2.1}$$

$x^{(i)}$ — i-ий елемент вектора x, $A_i(t,x,u)$ відповідно i-ий елемент вектора $f(t,x,u)$,

$$a_{ij} = \sum_{n=1}^{r} \sigma_{ni}(t,x,u)\sigma_{nj}(t,x,u),$$

тобто a_{ij} — елементи матриці $\sigma\sigma^T$

Нам також знадобиться означення слабкого розв'язку в мартингальній формі, з використанням наступного результату [2, ст.160, Предложение 2.1].

Лема 1. *Існування слабкого розв'язку рівняння* (1.1) *еквівалентно існуванню d-вимірного неперервного процесу $x(t)$, що задовольняє співвідношення*

$$f(x(t)) - f(x(0)) - \int_0^t L_u f(x(s))ds \in M_2^{c,loc} \tag{2.2}$$

для довільної функції $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$.

3. Постановка задачі

Отже, розглядається задача оптимального керування (1.1), (1.2), де $u(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to U$, U — деяка множина із $\mathbb{R}^m$ і $0 \in U$, вектор-функція $f(t,x,u) : [0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times U \to \mathbb{R}^d$ та матриці $A(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ і $\sigma(t,x,u) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ — неперервні за сукупністю змінних.

Позначимо $|\cdot|$ — евклідова норма d — вимірного вектора, $||\cdot||$ — норма матриці, узгоджена з нормою вектора.

Будемо вважати, що для функцій $f(t,x,u)$ та $\sigma(t,x,u)$ виконується умова лінійного росту, тобто існує така стала $C > 0$, що для будь-яких $t \in [0,\infty)$, $x \in \mathbb{R}^d$ і $u \in U$ виконується

$$\begin{aligned} &|f(t,x,u)| \le C(|x| + |u|),\\ &||\sigma(t,x,u)|| \le C(|x| + |u|) \end{aligned} \tag{3.1}$$

та умова Ліпшица по змінній $x \in \mathbb{R}^d$.

Функція $L(t,x,u)$ є неперервною за сукупністю змінних, невід'ємною та задовольняє наступну умову

$$L(t,x,u) \le K(|x| + |u|)^k, \tag{3.2}$$

для деяких $K > 0$ і $k \ge 1$ і для всіх $x \in \mathbb{R}^d$ та $u \in U$.

Визначимо множину допустимих керувань $u = u(t,x)$ з оберненим зв'язком.

Означення 3. Допустимими керуваннями будемо вважати такі функції $u(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to U$, що

1) для $u(t,x)$ рівняння (1.1) з початковою умовою $x(0) = x_0$ має слабкий розв'язок;

2) для $u(t,x)$ виконується умова лінійного росту по x, тобто існує таке $N > 0$, що для будь-якого $t \in [0,\infty)$ і $x \in \mathbb{R}^d$ виконується нерівність

$$|u(t,x)| \leq N|x|; \tag{3.3}$$

3) функція $u(t,x)$ задовольняє по своїм змінним локальну умову Ліпшица, тобто для будь-якого $R > 0$ існує таке $K_R > 0$, що для будь-яких $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ і $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ таких, що $|x_1| \leq R$, $|x_1| \leq R$ виконується умова

$$|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)| \leq K_R(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|).$$

Множину керувань, що задовольняють умови 1)-3) будемо називати множиною допустимих керувань для задачі (1.1), (1.2) і позначатимемо її через V.

Будемо також вважати, що матрицант $X(t,s)$ системи

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{3.4}$$

задовольняє наступну умову:

існують такі константи $K_1 > 0$ і $\gamma > 0$, що має місце оцінка

$$|X(t,s)| \leq K_1 e^{-\gamma(t-s)}, t \geq s. \tag{3.5}$$

4. Основний результат

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для системи* (1.1) *з критерієм якості* (1.2), *виконуються умови пункту 2. Тоді якщо виконується умова*

$$3K_1^2 C^2 (1+N)^2 \frac{1+\gamma}{\gamma} - \gamma \leq 0, \tag{4.1}$$

то задача (1.1), (1.2) *має розв'язок в класі допустимих керувань V. Тобто існує допустиме керування $u^*(t,x) \in V$, що мінімізує критерій якості* (1.2).

Доведення. Так як $J(u) \geq 0$, то існує невід'ємна нижня границя m значень $J(u)$, а тому існує послідовність допустимих керувань $u_n(t,x) \in V$ така, що $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$.

Із означення множини допустимих керувань (умова2)) випливає, що для будь-яких $t \in [0,\infty)$ і $x \in \mathbb{R}^d$: $|x| \leq R$ виконується

$$\sup_{n \geq 0} |u_n(t,x)| \leq N|x| \leq NR.$$

отже, послідовність $\{u_n(t,x), n \geq 0\}$ є рівномірно локально обмеженою для будь-яких $t \in [0,\infty)$ і $x \in \mathbb{R}^d$: $|x| \leq R$.

Умова 3) цього ж означення гарантує рівномірну неперервність сім'ї функцій $u_n(t,x)$, $t \in [0,T]$ для довільного $T > 0$ і будь-якого $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \leq R$.

Тоді із послідовності $\{u_n(t,x), n \geq 0\}$, використовуючи діагональний метод, можна виділити підпослідовність (яку також будемо позначати через $\{u_n(t,x), n \geq 0\}$), що збігається поточково до $u^*(t,x)$, для будь-яких $t \in [0,\infty)$ і $x \in \mathbb{R}^d$.

Граничне керування $u^*(t,x)$, очевидно, задовольняє умови допустимості 2) і 3). Покажемо, що існує слабкий розв'язок рівняння (1.1) з керуванням $u^*(t,x)$.

Оскільки керування $u_n(t,x)$ допустимі, то для кожного з них існує слабкий розв'язок рівняння (1.1) $x_n(t)$ і для них має місце наступне інтегральне представлення

$$x_n(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)f(s,x_n(s),u_n(s,x))ds + \int_0^t X(t,s)\sigma(s,x_n(s),u_n(s,x))dW_n(s).$$

Доведемо рівномірну обмеженість за ймовірністю розв'язків $x_n(t)$. Тобто покажемо, що

$$\sup_{n\geq 0} P\{x_n(t) > R\} \to 0, \text{ при } R \to \infty.$$

Маємо

$$E|x_n(t)|^2 = E\Bigg|X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)f(s,x_n(s),u_n(s,x))ds +$$

$$+ \int_0^t X(t,s)\sigma(s,x_n(s),u_n(s,x))dW_n(s)\Bigg|^2 \leq$$

$$\leq 3E|X(t,0)x_0|^2 + 3E\Bigg|\int_0^t X(t,s)f(s,x_n(s),u_n(s,x))ds\Bigg|^2 +$$

$$+ 3E\Bigg|\int_0^t X(t,s)\sigma(s,x_n(s),u_n(s,x))dW_n(s)\Bigg|^2 \leq$$

$$\leq 3K_1^2E|e^{-\gamma t}x_0|^2 + 3K_1^2C^2E\left(\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}(|x_n(s)| + |u_n(s,x)|)ds\right)^2 +$$

$$+ 3K_1^2C^2E\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}(|x_n(s)| + |u_n(s,x)|)^2ds \leq 3K_1^2C^2\Bigg(E|e^{-\gamma t}x_0|^2C^{-2} +$$

$$+ (1+N)^2E\left(\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|x_n(s)|ds\right)^2 + (1+N)^2E\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}|x_n(s)|^2ds\Bigg) \leq$$

$$\leq 3K_1^2C^2\Bigg(E|e^{-\gamma t}x_0|^2C^{-2} + (1+N)^2e^{-2\gamma t}E\left(\int_0^t e^{\gamma s/2}e^{\gamma s/2}|x_n(s)|ds\right)^2 +$$

$$+ (1+N)^2e^{-2\gamma t}E\int_0^t e^{2\gamma s}|x_n(s)|^2ds\Bigg) \leq 3K_1^2C^2\Bigg(E|e^{-\gamma t}x_0|^2C^{-2} +$$

$$+ (1+N)^2 e^{-2\gamma t} E\left(\int\limits_0^t e^{\gamma s}\, ds\right) E\left(\int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^2 ds\right) +$$

$$+ (1+N)^2 e^{-2\gamma t} E \int\limits_0^t e^{2\gamma s}|x_n(s)|^2\, ds\Bigg) \le 3K_1^2 C^2 \Bigg(E|e^{-\gamma t}x_0|^2 C^{-2} +$$

$$+ \frac{(1+N)^2 e^{-\gamma t}}{\gamma} E \int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^2\, ds + (1+N)^2 e^{-2\gamma t} E \int\limits_0^t e^{2\gamma s}|x_n(s)|^2 ds\Bigg) \le$$

$$\le 3K_1^2 C^2 e^{-\gamma t}(E|x_0|^2 C^{-2} + \frac{(1+N)^2}{\gamma} E \int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^2 ds + (1+N)^2 E \int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^2 ds)$$

або

$$e^{\gamma t} E|x_n(t)|^2 \le 3K_1^2 E|x_0|^2 + 3K_1^2 C^2 (1+N)^2 \frac{1+\gamma}{\gamma} E \int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^2 ds.$$

Нехай

$$A = 3K_1^2 E|x_0|^2$$
$$B = 3K_1^2 C^2 (1+N)^2 \frac{1+\gamma}{\gamma}.$$

Тоді за лемою Гронуола-Беллмана маємо

$$e^{\gamma t} E|x_n(t)|^2 \le A e^{Bt}$$

або

$$E|x_n(t)|^2 \le A e^{(B-\gamma)t} \le A.$$

Тому

$$\sup_{n\ge 0, t\ge 0} P\{x_n(t) > R\} \le \sup_{n\ge 0, t\ge 0} \frac{E|x_n(t)|^2}{R^2} \le \frac{A e^{(B-\gamma)t}}{R^2} \to 0, \text{ при } R \to \infty.$$

Отже, сім'я розв'язків $x_n(t)$ є рівномірно обмеженою за ймовірністю.

Покажемо тепер, що для довільних $T > 0$ і $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{h\to 0} \sup_{n\ge 0} P\left\{ \max_{t_1,t_2\in[0,T], |t_1-t_2|<h} |x_n(t_2) - x_n(t_1)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Використовуючи інтегральне представлення

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t [A(s)x_n(s) + f(s, x_n(s), u_n(s, x_n))]ds + \int\limits_0^t \sigma(s, x_n(s), u_n(s, x_n)) dW_n(s)$$

та нерівності (2.1), (3.1) та Гельдера, маємо

$$E\left(\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}|x_n(t_2)-x_n(t_1)|\right)^2 = E\left(\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\left|\int_{t_1}^{t_2}A(s)x_n(s)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t_1}^{t_2}f(s,x_n(s),u_n(s,x_n))ds+\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s,x_n(s),u_n(s,x_n))dW_n(s)\right|\right)^2 \le$$

$$\le 3E\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\left|\int_{t_1}^{t_2}A(s)x_n(s)\,ds\right|^2+3E\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\left|\int_{t_1}^{t_2}f(s,x_n(s),u_n(s,x_n))ds\right|^2+$$

$$+3E\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\left|\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s,x_n(s),u_n(s,x_n))dW_n(s)\right|^2\le$$

$$\le 3E\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\left(\int_{t_1}^{t_2}|A(s)|^2ds\right)E\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\int_{t_1}^{t_2}|x_n(s)|^2ds+$$

$$+3C^2(1+N)^2E\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\left(\int_{t_1}^{t_2}|x_n(s)|ds\right)^2+$$

$$+3C^2(1+N)^2E\left(\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\int_{t_1}^{t_2}|x_n(s)|dW_n(s)\right)^2\le 3\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}|A(s)|^2(t_1-t_2)^2A+$$

$$+3C^2(1+N)^2(t_1-t_2)^2A^2+3C^2(1+N)^2E\left(\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}\int_{t_1}^{t_2}|x_n(s)|dW_n(s)\right)^2\le$$

$$\le 3\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}|A(s)|^2h^2A+3C^2(1+N)^2h^2A^2+12C^2(1+N)^2\int_0^h E|x_n(s)|^2ds\le$$

$$\le 3\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}|A(s)|^2h^2A+3C^2(1+N)^2h^2A^2+12C^2(1+N)^2Ah.$$

Тоді

$$\sup_{n\ge0}P\left\{\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}|x_n(t_2)-x_n(t_1)|>\varepsilon\right\}\le$$

$$\le\varepsilon^{-2}\left[\max_{\substack{t_1,t_2\in[0,T],\\|t_1-t_2|<h}}|A(s)|^2h^2A+3C^2(1+N)^2h^2A^2+12C^2(1+N)^2Ah\right]\to0,\quad h\to0.$$

Отже, сім'я розв'язків $\{x_n(t),t\ge0\}$ задовольняє умови теореми 4.2 [2, ст. 25]. Тоді існують підпослідовність $n_k, k\to\infty$, ймовірнісний простір $(\widetilde{\Omega},\widetilde{F},\widetilde{\mathbb{P}})$ і d — вимірні неперервні процеси $\{\widetilde{x}_{n_k}(t), t \geq 0\}$ та процес $x^*(t)$ такі, що $\widetilde{x}_{n_k}(t) \to x^*(t), n_k \to \infty$ за ймовірністю для будь-якого $t \geq 0$, а скінченновимірні розподіли $\widetilde{x}_{n_k}(t)$ і $x^*(t)$ співпадають при всіх $n_k \geq 0$.

Перепозначимо послідовність $\{\widetilde{x}_{n_k}(t), t \geq 0\}$ через $\{\widetilde{x}_n(t), t \geq 0\}$.

Покажемо тепер, що $x^*(t)$ — розв'язок рівняння, що відповідає керуванню $u^*(t)$, тобто

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t [A(s)x^*(s) + f(s, x^*(s), u^*(s, x^*))]ds + \int_0^t \sigma(s, x^*(s), u^*(s, x^*))d\widetilde{W}(s),$$

з деяким вінерівським процесом $\widetilde{W}(t)$, заданим на ймовірнісному просторі $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{F}, \widetilde{\mathbb{P}})$.

Визначимо сім'ю операторів

$$L_{u_n} f(x) = \sum_{i=1}^{d} (A_i(t)x_i + f_i(t, x, u_k)) \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t, x, u_n) \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}.$$

Нехай $Z^d = C([0, \infty) \to \mathbb{R}^d)$ — простір всіх неперервних функцій g, визначених на $[0, \infty)$, зі значеннями в $\mathbb{R}^d$. Також нехай $B(Z^d)$ — σ-алгебра на K^d, а $B_t(Z^d)$ — під-σ-алгебра $B(Z^d)$, порождена $g(s)$, при $0 \leq s \leq t$.

Нехай $s < t$, і $F_1 : Z^d \to \mathbb{R}$ — обмежена, $B_s(Z^d)$ — вимірна функція на W^d. Також для кожної функції $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ існує така стала R_1, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}^d$, і будь-яких $i, j = \overline{1, d}$:

$$|f(x)| \leq R_1, \ |\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}| \leq R_1, \ |\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}| \leq R_1.$$

Тоді маємо

$$E\left|\left\{ f(\widetilde{x}_n(t)) - f(\widetilde{x}_n(s)) - \int_s^t L_{u_k} f(\widetilde{x}_n(z))\, dz \right\}\right|^2 \leq 3E \mid f(\widetilde{x}_n(t)) \mid^2 +$$

$$+ 3E \mid f(\widetilde{x}_n(s)) \mid^2 + 3E \left| \int_s^t \left[\sum_{i=1}^{d} (A_i(z)\widetilde{x}_i(z) + f_i(s, \widetilde{x}_n(s), u_n(s, x_n))) \frac{\partial f(\widetilde{x_k}(z))}{\partial x^{(i)}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(z, \widetilde{x}_n(z), u_n(z, \widetilde{x}_n(z))) \frac{\partial^2 f(\widetilde{x}_n(t))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} \right] dz \right|^2 \leq 6R_1^2 +$$

$$+ 6E \left| \int_s^t \sum_{i=1}^{d} (A_i(z)\widetilde{x}_i(z) + f_i(s, \widetilde{x}_n(s), u_n(s, x_n))) \frac{\partial f \widetilde{x}_n(z)}{\partial x^{(i)}} dz \right|^2 +$$

$$+ 6E \left| \int_s^t \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(z, \widetilde{x}_n(z), u_n(z, \widetilde{x}_n(z))) \frac{\partial^2 f(\widetilde{x}_n(t))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, dz \right|^2,$$

де a_{ij} — елементи матриці $\sigma\sigma^T$.

Оцінимо окремо другий і третій доданки в останній нерівності. Маємо

$$E\left|\int\limits_s^t \sum_{i=1}^d (A_i(z)\widetilde{x}_n(z) + f_i(z,\widetilde{x}_n(z),u_n(z,x_n)))\frac{\partial f\widetilde{x}_n(z)}{\partial x^{(i)}}\,dz\right|^2 \le$$
$$\le R_1^2 E\left(\int\limits_s^t \sum_{i=1}^d (|A_i(z)||\widetilde{x}_n(z)| + C(|\widetilde{x}_n(z)| + |u_n(z,x_n)|))\,dz\right)^2 \le$$
$$\le R_1^2 dE\sum_{i=1}^d \left(\int\limits_s^t |A_i(z)||\widetilde{x}_n(z)| + C(|\widetilde{x}_n(z)| + |u_n(z,x_n)|)\,dz\right)^2 \le$$
$$\le R_1^2 dE\sum_{i=1}^d \left(\int\limits_s^t (|A_i(z)||\widetilde{x}_n(z)| + C(1+N)|\widetilde{x}_n(z)|)\,dz\right)^2 \le$$
$$\le R_1^2 dE\sum_{i=1}^d \left(\int\limits_s^t (|A_i(z)| + C(1+N))\,|\widetilde{x}_n(z)|)\,dz\right)^2 \le$$
$$\le R_1^2 d(t-s)\sum_{i=1}^d E\left(\int\limits_s^t (|A_i(z)| + C(1+N))^2|\widetilde{x}_n(z)|^2 dz\right) \le$$
$$\le R_1^2 d(t-s)(M+C(1+N))^2\sum_{i=1}^d E\int\limits_s^t |\widetilde{x}_n(z)|^2 dz \le$$
$$\le R_1^2 d(t-s)(M+C(1+N))^2\sum_{i=1}^d E\int\limits_s^t A dz \le$$
$$\le R_1^2 d^2(t-s)(M+C(1+N))^2 A = R_1^2 d^2(t-s)A(M+C(1+N))^2.$$

Для третього доданку аналогічно маємо:

$$E\left|\int\limits_s^t \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(z,\widetilde{x}_n(z),u_n(z,\widetilde{x}_n(z)))\frac{\partial^2 f(\widetilde{x}_n(z))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}} dz\right|^2 \le$$
$$\le R_1^2 E\left|\int\limits_s^t \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(z,\widetilde{x}_n(z),u_n(z,\widetilde{x}_n(z)))dz\right|^2 \le$$
$$\le R_1^2 (t-s)E\int\limits_s^t \left(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(z,\widetilde{x}_n(z),u_n(z,\widetilde{x}_n(z)))\right)^2 dz \le$$
$$\le R_1^2 (t-s)d^2 E\int\limits_s^t \sum_{i,j=1}^d |a_{ij}(z,\widetilde{x}_n(z),u_n(z,\widetilde{x}_n(z)))|^2 dz \le$$

$$\leq R_1^2(t-s)d^2E\int\limits_s^t ||\sigma(z,\widetilde{x}_n(z),u_n(z,\widetilde{x}_n(z))||^2dz \leq$$

$$\leq R_1^2(t-s)d^2C^2E\int\limits_s^t (E|\widetilde{x}_n(z)|+E|u_n(z,\widetilde{x}_n)|)^2dz \leq$$

$$\leq R_1^2(t-s)d^2C^2E\int\limits_s^t E(1+N)^2|\widetilde{x}_n(z)|^2dz \leq R_1^2(t-s)^2d^2C^2(1+N)^2A.$$

Отже,

$$E\left|\{f(\widetilde{x}_n(t))-f(\widetilde{x}_n(s))-\int\limits_s^t L_{u_k}f(\widetilde{x}_n(z))dz\}\right|^2 \leq$$
$$\leq 6R_1^2+R_1^2d^2(t-s)A(M+C(1+N))^2+R_1^2(t-s)^2d^2C^2(1+N)^2A.$$

Із рівномірної по n обмеженості другого моменту випливає можливість граничного переходу в рівності

$$E\left\{(f(x^*(t))-f(x^*(s))-\int\limits_s^t L_{u^*}f(u^*(z))dz)F_1(x^*)\right\}=$$

$$=E\left\{\lim_{n\to\infty}(f(\widetilde{x}_n(t))-f(\widetilde{x}_n(s))-\int\limits_s^t L_{u_n}f(u_n(z))dz)F_1(\widetilde{x}_n(t))\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}E\left\{(f(\widetilde{x}_n(t))-f(\widetilde{x}_n(s))-\int\limits_s^t L_{u_n}f(u_n(z))dz)\right\}=0.$$

Отже,

$$f(x^*(t))-f(x^*(s))-\int\limits_s^t L_{u^*}f(u^*(z))dz \in M_2^{c,loc}.$$

Із Леми випливає тепер, що $x^*(t)$ — слабкий розв'язок рівняння (1.1), що відповідає керуванню $u^*(t,x)$, для будь-якого $t\geq 0$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t,x)$ є оптимальним.

Оскільки функція $L(t,x,u)$ є неперервною за всіма змінними, то

$$L(t,\widetilde{x}_n(t),u_n(t,\widetilde{x}_n))\to L(t,x^*(t),u^*(t,x^*))$$

Маємо

$$J(u_n)=E\int\limits_0^\infty L(t,\widetilde{x}_n(t),u_n(t,\widetilde{x}_n))dt\to m, \text{ при } n\to\infty.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $k > N$ виконується

$$E\int_0^\infty L(t, \widetilde{x}_n(t), u_n(t, \widetilde{x}_n))dt \le m + \varepsilon.$$

За лемою Фату маємо

$$E\int_0^\infty L(t, x^*(t), u^*(t, x^*))dt \le m + \varepsilon.$$

Оскільки ε ми обирали довільним чином, то отримаємо

$$E\int_0^\infty L(t, x^*(t), u^*(t, x^*))dt = m = J(u^*).$$

Таким чином $u^*(t, x)$ є оптимальним керуванням. □

5. Висновок

Основним результатом даної роботи є теорема існування оптимального керування з оберненим зв'язком для стохастичних систем диференціальних рівнянь. Дана теорема дає достатні умови існування оптимального керування в термінах коефіцієнтів вихідної системи, а також функції, що входить в критері й якості. Тому, використовуючи даний результат, ми можемо впевнитись в існуванні оптимального керування перш ніж шукати його, застосовуючи, як правило, досить громіздкі методи.

Перелік цитованих джерел

1. *Барсегян В. Р.* Оптимальное управление линейных систем со стохастической обратной связью. — Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 54 (2). 2001 — 63-69pp.
2. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы-1986 год —448 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Том 3. — М.: Наука,Главная редакция физ.-мат. литературы-1975 год —654 с.
4. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука-1977 год —654 с.
5. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. — Киев:Изд-во ун-та, 1961. — 216 с.
6. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминироваными и стохастическими системами. — М.:Мир,1978. — 216 с.
7. *Benes V. E.* Existence of optimal stochastic control laws. // SIAM Journal Control. — 1971. — V.9.-N3-P.446-472.
8. *S.Chen and J.Yang.* Stochastic Linear Quadratic Optimal Control Problems. // Appl.Math.Optim. — 2001. — 43 — p. 21–45.
9. *T.Duncan T., P.Varaiya P.* On solution of a stochastic control system. // SIAM Journal Control. — 1971. — V.9.-N3 —P. 354–371.

10. *P.S.Knopov P. S., O.M.Derieva O. M.* On the control problem for stochastic differential equations with additive fractional brownian motion. // International conference "Modern stochastic: theory and applications September —2010 — 7-11, Kiev, Ukraine
11. *J.Luo J., Feng E.* Generalized differential Riccati equation and indefinite stochastic LQ control with cross term. // Appl.Math.and Computation — 155(2004) — p. 121-135.
12. *Fleming W. H., Soner H. Mete* . Controlled Markov processes and viscosity solutions. — New York: Springer, —2005 —p. 448.
13. *Wonham W. M.* Optimal stationary control of a linear system with state-dependent noise. // Appl.Math.and Computation, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. —(1967) —5 —pp. 486-500.

Получена 06.06.2013