Динамические системы, вып. 28 (2010), 89–98

УДК 539.3

Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы

С. О. Папков

Севастопольский национальный технический университет,
E-mail: stanislav.papkov@gmail.com

Аннотация. Получено решение первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы. При помощи метода суперпозиции задача сводится к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Обобщение закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича дает возможность построить двучленную асимптотическую формулу для неизвестных системы

Ключевые слова: бесконечная система, асимптотика, прямоугольная призма

1. Введение

Задача о равновесии упругого призматического бруса постоянного поперечного сечения является одной из важнейших задач теории упругости. Работы Ламе, Матье, Б.М. Кояловича, И.Г.Бубнова, Генки, Инглиса и С.П.Тимошенко и ряда других авторов посвящены развитию методов решения этой задачи (подробный обзор истории бигармонической проблемы представлен в статье [9]). При этом основную трудность представляет собой не построение общего решения дифференциальных уравнений, а оценка коэффициентов рядов, которые, в частности, могут быть выражены через решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Заметим, что при решении бесконечных систем

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z_n + b_m, \quad m = 1,\, 2,\, ... \tag{1.1}$$

зачастую используется метод простой редукции, предложенный впервые Фурье еще в 1807 году. Суть данного метода состоит в том, что решение бесконечной системы приближают решением конечной системы

$$z_m^R = \sum_{n=1}^{N} c_{mn} z_n^R + b_m, \quad m = 1,\, 2,\, ...N \tag{1.2}$$

При некоторых условиях можно доказать [3], что метод простой редукции имеет сходимость. Однако на практике использование такого подхода во многих случаях приводит к появлению существенной погрешности в решении. В частности, данный факт имеет место, если неизвестные в бесконечной системе стремятся к ненулевому пределу $\lim_{m\to\infty} z_m = G$. В монографии В.Т. Гринченко [2], на основе закона асимптотических выражений Б.М.Кояловича [4], доказывается существование ненулевого предела для неизвестных в бесконечной системе, соответствующей второй основной граничной задаче для призмы. Использование данного асимптотического закона дало возможность найти с большой точностью неизвестные и провести улучшение сходимости рядов, представляющих напряжения на границе. В данной работе, на основе обобщения закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича, исследуется первая основная граничная задача для призмы.

2. Постановка задачи и сведение к бесконечной системе

Рассмотрим плоскую деформацию прямоугольной призмы (рис.1) под воздействием приложенных к торцам перемещений Для упрощения задачи положим,

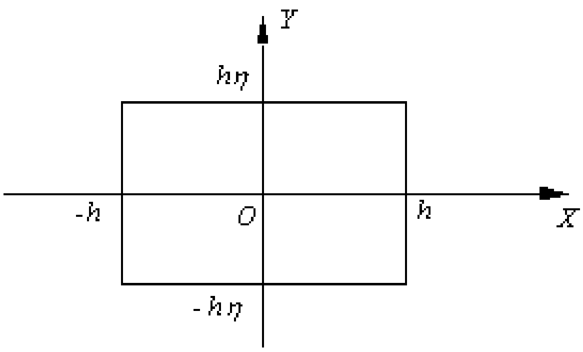

Рис.1 Сечение прямоугольной призмы

что напряженно-деформированное состояние призмы имеет симметрию по координатным осям, тогда в безразмерных координатах $x = X/h; \quad y = Y/h$ получаем следующую краевую задачу для уравнений теории упругости относительно безразмерного вектора перемещений:

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = 0 \tag{2.1}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

$$\begin{array}{l} G\mathbf{u}_x|_{x=\pm1} = \pm f_1(y) \quad G\mathbf{u}_y|_{x=\pm1} = f_2(y); \\ G\mathbf{u}_x|_{y=\pm\eta} = g_1(x); \quad G\,\mathbf{u}_y|_{y=\pm\eta} = \pm g_2(x). \end{array} \tag{2.2}$$

Следуя методу суперпозиции [2], общее решение $\vec{u} = u_x(x,y)\vec{i} + u_y(x,y)\vec{j}$ уравнений (2.1) для прямоугольной области представляется в виде суммы общих решений для полос $x \in [-1;1]$ и $y \in [-\eta;\eta]$:

$$Gu_x = D_0 x - \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \operatorname{ch}\alpha_m y + C_m\left(\frac{3-4\nu}{\alpha_m} + y\operatorname{sh}\alpha_m y\right)\right)\sin\alpha_m x + \tag{2.3}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m \operatorname{sh}\beta_m x + D_m x\operatorname{ch}\beta_m x\right)\cos\beta_m y;$$

$$Gu_y = C_0 y + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\operatorname{sh}\alpha_m y + C_m y\operatorname{ch}\alpha_m y\right)\cos\alpha_m x - \tag{2.4}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m\operatorname{ch}\beta_m x + D_m\left(\frac{3-4\nu}{\beta_m}\operatorname{ch}\beta_m x + x\operatorname{sh}\beta_m x\right)\right)\sin\beta_m y;$$

где $\alpha_m = \pi m$, $\beta_n = \frac{\pi n}{\eta}$. Пусть для граничных перемещений справедливы разложения в ряды Фурье

$$f_1(y) = f_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}\cos\beta_m y; \quad f_2(y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m}\sin\beta_m y;$$

$$g_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{1m}\sin\alpha_m x; \quad g_2(x) = g_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m}\cos\alpha_m x.$$

Из равенства коэффициентов Фурье в соотношениях (2.2) для нормальных перемещений можно найти связь между неопределенными коэффициентами:

$$C_0 = g_{20}/\eta; \quad D_0 = f_{10}; \tag{2.5}$$

$$C_m = \frac{g_{2m}}{\eta\operatorname{ch}\alpha_m\eta} - A_m\frac{\operatorname{th}\alpha_m\eta}{\eta}; D_m = \frac{f_{1m}}{\operatorname{ch}\beta_m} - B_m\operatorname{th}\beta_m. \tag{2.6}$$

Функциональные равенства (2.2) после разложения входящих в них функций по полной системе тригонометрических функций и подстановки (2.5),(2.6) приводят к парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_m = \frac{4\beta_m}{\Delta_m^1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2} + \frac{P_m\eta}{\Delta_m^1}; \\ y_m = \frac{4\alpha_m}{\Delta_m^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} + \frac{Q_m}{\Delta_m^2}. \end{cases} \tag{2.7}$$

где $x_n = (-1)^n\eta B_n\beta_n\operatorname{th}\beta_n\operatorname{sh}\beta_n$; $\quad y_n = \frac{(-1)^n A_n\alpha_n\operatorname{th}\alpha_n\eta\operatorname{sh}\alpha_n\eta}{\eta}$; $P_m = \frac{2g_{20}}{\eta\beta_m} + (-1)^m f_{2m} + (-1)^m f_{1m}\left(\frac{3-4\nu}{\beta_m} + \operatorname{th}\beta_m\right) + \frac{2\beta_m}{\eta^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n g_{2n}(\eta(\alpha_n^2+\beta_m^2)-2\alpha_n\operatorname{th}\alpha_n\eta)}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2}$; $Q_m = \frac{2f_{10}}{\alpha_m} + (-1)^m g_{1m} + (-1)^m g_{2m}\left(\frac{3-4\nu}{\eta\alpha_m)+\operatorname{th}\alpha_m\eta}\right) + 2\alpha_m\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n f_{1n}(\alpha_m^2+\beta_n^2-2\beta_n\operatorname{th}\beta_n)}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}$; $\Delta_m^1 = \frac{3-4\nu}{\beta_m^2}\operatorname{cth}\beta_m - \frac{1}{\beta_m\operatorname{sh}^2\beta_m}$; $\Delta_m^2 = \frac{3-4\nu}{\alpha_m^2}\operatorname{cth}\alpha_m\eta - \frac{\eta}{\alpha_m\operatorname{sh}^2\alpha_m\eta}$.

3. Исследование бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

Для обоснования метода суперпозиции (2.3), (2.4) исследуем регулярность системы (2.7). Согласно [3], бесконечная система линейных алгебраических уравнений (1.1) называется регулярной, если выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{mn}| < 1, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{3.1}$$

В частности, если найдется такая положительная константа θ, что выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{mn}| \le \theta < 1, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{3.2}$$

тогда бесконечная система называется вполне регулярной. Для вполне регулярных бесконечных систем известно, что из ограниченности свободных членов следует единственность ограниченного решения, к которому сходятся численные методы редукции и последовательных приближений. Чтобы исследовать регулярность (2.7) используем значение ряда [6]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}\mathrm{cth}\,\pi\, a - \frac{1}{2a^4} + \frac{\pi^2}{4a^2\mathrm{sh}^2\pi\, a}.$$

Учтем также, что коэффициенты системы (2.7) строго положительны, тогда значения рядов из модулей коэффициентов можно вычислить точно:

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= \tfrac{4\beta_m}{\Delta_m^1}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2} = \tfrac{1}{3-4\nu}\left(1-\tfrac{4(3-4\nu)\mathrm{sh}^2\beta_m-8(1-\nu)\beta_m^2}{(3-4\nu)\beta_m\mathrm{sh}\,2\beta_m-2\beta_m^2}\right);\\ S_{2m} &= \tfrac{4\alpha_m}{\Delta_m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} = \tfrac{1}{3-4\nu}\left(1-\tfrac{4(3-4\nu)\mathrm{sh}^2\alpha_m\eta-8(1-\nu)\eta^2\alpha_m^2}{(3-4\nu)\eta\alpha_m\mathrm{sh}\,2\alpha_m\eta-2\eta^2\alpha_m^2}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

В силу того, что функция $f(x) = \frac{4(3-4\nu)\mathrm{sh}^2x-8(1-\nu)x^2}{(3-4\nu)x\mathrm{sh}2x-2x^2}$ для любого значения ν принимает значения в интервале $(0;1)$ из формул (3.3) следует что система (2.7) вполне регулярна:

$$S_m \le \frac{1}{3-4\nu} \tag{3.4}$$

Таким образом, система (2.7) при условии ограниченности свободных членов, согласно [3], имеет единственное ограниченное решение. Чтобы исследовать асимптотическое поведение неизвестных в системе, проведем замену переменных:

$$x_n = a_0 + \frac{\tilde{x}_n}{n^\lambda} + (-1)^n f_{1n}\alpha_n \mathrm{th}\,\beta_n; \quad y_n = -a_0 + \frac{\tilde{y}_n}{n^\lambda\eta^\lambda} + (-1)^n g_{2n}\beta_n \mathrm{th}\,\alpha_n\eta. \tag{3.5}$$

После замены (3.5) бесконечная система принимает вид:

$$\begin{cases} \tilde{x}_m = \frac{4\beta_m\eta^{-\lambda}m^\lambda}{\Delta_m^1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-\lambda}\tilde{y}_n}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2} + \tilde{P}_m; \\ \tilde{y}_m = \frac{4\alpha_m m^\lambda\eta^{\lambda-1}}{\Delta_m^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-\lambda}\tilde{x}_n}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} + \tilde{Q}_m \end{cases} \quad (3.6)$$

Константа a_0 в замене (3.5), определяющая главный член асимптотики для неизвестных, подбирается таким образом, чтобы обеспечить порядок убывания свободных членов системы (3.6) как $O(m^{\lambda-1})$ при $m \to \infty$. Показатель степени λ определим таким образом, чтобы полученная система являлась регулярной, но не удовлетворяла условию вполне регулярности. Для оценки регулярности системы (3.6) используем формулу Эйлера-Маклорена, учитывая значение табличного интеграла [6], получаем значение ряда

$$\tilde{S}_N(a) = \sum_{k=N}^{\infty}\frac{k^{-\lambda}}{(k^2+a^2)^2} = \frac{N^{-(3+\lambda)}}{3+\lambda}{}_2F_1\left(2, \frac{3+\lambda}{2}, \frac{5+\lambda}{2}; -\left(\frac{a}{N}\right)^2\right) +$$
$$+\frac{N^{-\lambda}}{2(N^2+a^2)^2}\left(1+\frac{\lambda}{6N}\right) + \frac{N^{1-\lambda}}{3(N^2+a^2)^3} - \frac{1}{720}\left(\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)N^{-(\lambda+3)}}{(N^2+a^2)^2} + \frac{12\lambda^2N^{-(\lambda+1)}}{(N^2+a^2)^3} - \frac{72(1-\lambda)N^{1-\lambda}}{(N^2+a^2)^4}\right). \quad (3.7)$$

Исследование асимптотики (3.7) при $a \to \infty$ позволяет построить оценку

$$\tilde{S}_N(a) = \frac{\pi(1+\lambda)}{4\cos\frac{\pi\lambda}{2}}a^{-(3+\lambda)} + k_N a^{-4} + O\left(a^{-(5+\lambda)}\right) \quad (3.8)$$

где $k_N = \frac{N^{1-\lambda}}{\lambda-1} + \frac{1}{2}N^{-\lambda} + \frac{\lambda}{12}N^{(-1+\lambda)} - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{720}N^{-(3+\lambda)}$. Формулы (3.7) дают возможность вычислить значение рядов в условиях регулярности

$$S_{2m-1}^* = \frac{4\beta_m\eta^{-\lambda}m^\lambda}{\Delta_m^1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-\lambda}}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2} = \quad (3.9)$$

$$= \frac{4\beta_m\eta^{-\lambda}m^\lambda}{\Delta_m^1}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n^{-\lambda}}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2} + \frac{4\beta_m\eta^{-\lambda}m^\lambda}{\Delta_m^1\pi^4}\tilde{S}_N\left(\frac{m}{\eta}\right);$$

$$S_{2m}^* = \frac{4\alpha_m m^\lambda\eta^{\lambda-1}}{\Delta_m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-\lambda}}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} = \quad (3.10)$$

$$= \frac{4\alpha_m m^\lambda\eta^{\lambda-1}}{\Delta_m^2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n^{-\lambda}}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} + \frac{4\alpha_m m^\lambda\eta^{3+\lambda}}{\Delta_m^2\pi^4}\tilde{S}_N(m\eta).$$

При помощи формулы (3.8) можно исследовать поведение данных рядов при больших номерах m:

$$\frac{4\beta_m\eta^{-\lambda}m^\lambda}{\Delta_m^1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-\lambda}}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2} = \frac{1+\lambda}{(3-4\nu)\cos\frac{\pi\lambda}{2}} + \quad (3.11)$$

$$+\frac{4\eta^{1-\lambda}}{\pi(3-4\nu)}\left(\sum_{n=1}^{N-1} n^{-\lambda}+k_N\right)\frac{1}{m^{1-\lambda}}+o\left(\frac{1}{m^{1-\lambda}}\right);$$

$$\frac{4\alpha_m m^{\lambda}\eta^{\lambda-1}}{\Delta_m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-\lambda}}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}=\frac{1+\lambda}{(3-4\nu)\cos\frac{\pi\lambda}{2}}+ \tag{3.12}$$

$$+\frac{4\eta^{\lambda-1}}{\pi(3-4\nu)}\left(\sum_{n=1}^{N-1} n^{-\lambda}+k_N\right)\frac{1}{m^{1-\lambda}}+o\left(\frac{1}{m^{1-\lambda}}\right).$$

Следует заметить, что коэффициент при втором члене асимптотики является отрицательным в силу оценки:

$$\sum_{n=1}^{N-1} n^{-\lambda}+k_N \le \int_1^N x^{-\lambda}dx+k_N=-\tfrac{1}{1-\lambda}+\tfrac{1}{2}N^{-\lambda}+\tfrac{\lambda}{12}N^{-(1+\lambda)}-\tfrac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{720}N^{-(3+\lambda)}<$$
$$<-\tfrac{1}{1-\lambda}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\lambda}{12}=-\tfrac{(\lambda+2)(\lambda+3)}{12(1-\lambda)},$$

которая справедлива для любого $\lambda\in[0;\ 1)$. Таким образом, для регулярности системы (2.7) необходимо, чтобы неопределенный показатель λ удовлетворял уравнению

$$\cos\frac{\pi\lambda}{2}=\frac{\lambda+1}{3-4\nu}. \tag{3.13}$$

Данный факт позволяет использовать для исследования асимптотических свойств ограниченного решения (3.6) следующую теорему [5], которая является обобщением достаточного признака существования ненулевого предела у ограниченного решения парной регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений Б.М. Кояловича [4].

Теорема 1. *Если коэффициенты регулярной парной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} x_m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}y_n+P_m\\ y_m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{mn}x_n+Q_m\end{cases}$$

неотрицательны и удовлетворяют условию

(a) Найдутся последовательности $\{r_n\},\{\rho_n\},\{q_m\},\{\xi_m\}$ и числа $L\ge l>0$ такие, что $\forall\quad m,n\in\mathbf{N}$ $(m>n)$ коэффициенты бесконечной системы допускают оценки

$$lr_n\le a_{mn}q_m\le Lr_n;\quad l\rho_n\le b_{mn}\xi_m\le L\rho_n;$$

причем последовательности $\{q_m\},\{\xi_m\}$ таковы что

$$q_mP_m\le K,\ q_m\varphi_m\le K,\ \xi_mQ_m\le K,\ \xi_m\psi_m\le K$$

($\varphi_m = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$; $\psi_m = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{mn}$, K - некоторая положительная константа), а последовательности $\{r_n\}, \{\rho_n\}$:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} r_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\rho_n = \infty; \quad r_{N+1} = o\left(\sum_{n=1}^{N} r_n\right),\ \rho_{N+1} = o\left(\sum_{n=1}^{N}\rho_n\right),$$

то существует ограниченное главное решение данной бесконечной системы $\{x_m, y_m\}$. Если это решение является единственным ограниченным решением и дополнительно к условию (a) выполняется условие: (b) $\frac{\sum\limits_{n=1}^{m-1}\rho_n}{\sum\limits_{n=1}^{m-1} r_n} = O\left(\frac{\inf\limits_{n\geq m}\xi_n}{q_m}\right)$, $m\to\infty$. Тогда существует положительный предел решения

$$\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m = a_1.$$

Главное, чем отличается предлагаемое достаточное условие от известного признака — наличие в условии (a) последовательностей r_n, ρ_n, которые в исходной формулировке признака [4] полагались тождественно равными единице. Система (3.6) удовлетворяет условиям данной теоремы. Действительно, пусть последовательности $q_m = m^{1-\lambda}; \xi_m = m^{1-\lambda}$, тогда справедливы оценки при $n < m$:

$$\begin{array}{l} \frac{4\eta^{1-\lambda}\mathrm{th}\beta_1\, n^{-\lambda}}{\pi(3-4\nu)(\eta^2+1)^2} \leq \frac{4\beta_m\eta^{-\lambda} m n^{-\lambda}}{\Delta_m^1(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2} \leq \frac{4\eta^{1-\lambda}n^{-\lambda}}{\pi\left(3-4\nu-\beta_1/\mathrm{sh}^2\beta_1\right)} \\ \frac{4\eta^{3+\lambda}\mathrm{th}\alpha_1\eta\, n^{-\lambda}}{\pi(3-4\nu)(\eta^2+1)^2} \leq \frac{4\alpha_m m\eta^{\lambda-1}n^{-\lambda}}{\Delta_m^2(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2} \leq \frac{4\eta^{\lambda-1}n^{-\lambda}}{\pi\left(3-4\nu-\eta\alpha_1/\mathrm{sh}^2\alpha_1\eta\right)} \end{array}$$

откуда следует, что $r_n = \rho_n = n^{-\lambda}$ и

$$\begin{array}{l} l = \frac{4\eta^2}{\pi(3-4\nu)(\eta^2+1)^2}\min\left(\eta^{-(\lambda+1)}\mathrm{th}\beta_1,\ \eta^{\lambda+1}\mathrm{th}\alpha_1\eta\right); \\ L = \frac{4}{\pi}\max\left(\frac{\eta^{1-\lambda}}{3-4\nu-\beta_1/\mathrm{sh}^2\beta_1}, \frac{\eta^{\lambda-1}}{3-4\nu-\alpha_1/\mathrm{sh}^2\alpha_1\eta}\right). \end{array}$$

Для последовательностей r_n, ρ_n условия теоремы выполняются так как $\lambda \in [0;1)$. Последовательности φ_m, ψ_m убывают как $O(m^{\lambda-1})$, также при больших номерах m ведут себя и свободные члены (3.6). Таким образом, при положительных свободных членах системы (3.6) выполнены условия и на последовательности q_m, ξ_m. Так как система (3.6) получена заменой переменных из вполне регулярной бесконечной системы (2.7), то согласно теореме Бондаренко [1] система (3.6) имеет единственное ограниченное решение. При этом условие (б) выполняется тождественно. Следовательно, из условия положительности свободных членов системы (3.6), следует существование общего ненулевого предела у неизвестных:

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{x}_m = \lim_{m\to\infty}\tilde{y}_m = a_1. \tag{3.14}$$

Из формулы (3.14) можно получить оценку асимптотического поведения неизвестных в исходной бесконечной системе (2.7):

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{n^\lambda} + O\left(\frac{1}{n}\right); \quad y_n = -a_0 + \frac{a_1}{n^\lambda \eta^\lambda} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.15}$$

4. Численные примеры

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{array}{l} G\mathbf{u}_x|_{x=\pm 1} = \pm(y/\eta)^2;\, G\mathbf{u}_y|_{x=\pm 1} = y/\eta; \\ G\mathbf{u}_x|_{y=\pm\eta} = x; \quad G\,\mathbf{u}_y|_{y=\pm\eta} = \pm x^2. \end{array} \tag{4.1}$$

Данная задача не имеет точного решения в полиномах [7], хотя вынуждающие смещения имеют достаточно простой вид. Полагая $a_0 = \frac{1-\eta}{\eta(1-\nu)}$ можно добиться того, чтобы свободные члены системы приняли вид:

$$\begin{array}{l} \tilde{P}_m = \frac{2(1-2\nu+\eta)m^{\lambda-1}}{\pi(1-\nu)\left((3-4\nu)\mathrm{cth}\,\beta_m - \beta_m/\mathrm{sh}^2\,\beta_m\right)}; \\ \tilde{Q}_m = \frac{2(1-2\nu+\eta)\eta^{\lambda-2}m^{\lambda-1}}{\pi(1-\nu)\left((3-4\nu)\mathrm{cth}\,\alpha_m\eta - \alpha_m\eta/\mathrm{sh}^2\alpha_m\eta\right)}. \end{array} \tag{4.2}$$

Из формул (4.2) следует положительность свободных членов. Таким образом, оказывается справедливым асимптотический закон (3.15) и задача сводится к отысканию первых значений неизвестных $\tilde{x}_m, \tilde{y}_m$ и предельного значения a_1. Для оценки первых неизвестных и предельного значения воспользуемся методом предельных лимитант, предложенным в работе [8]. Ниже представлены оценки для неизвестных в системе (3.6), полученные методом простой редукции $\tilde{\mathrm{x}}_m^R$, и интервал для неизвестных, полученный методом предельных лимитант при $a = 1, \quad \nu = 0,25$ (для данной геометрии призмы, в силу симметрии граничных условий, четные и нечетные уравнения бесконечной системы совпадают и следовательно $\tilde{x}_m = \tilde{y}_m$). В вычислениях полагалось $N = 5$. В последнем столбце таблицы представлена совпадающая оценка снизу и сверху для неизвестных при $N = 400$, которая соответствует точным значениям неизвестных.

Таблица 1. Значения неизвестных

m	$\tilde{x}_m^R$	Оценка по методу предельных лимитант	$\tilde{x}_m$
1	0,785725	0,786390 - 0,786408	0,786391
2	0,751691	0,756592 - 0,756725	0,756595
3	0,741500	0,756367 - 0,756769	0,756377
4	0,725936	0,756560 - 0,757388	0,756583
5	0,705969	0,756705 - 0,758077	0,756747
∞	0	0,756828 - 0,777292	0,765714

Из данных 1 следует, что различия между нижними и верхними оценками несколько увеличиваются с ростом порядкового номера, достигая наибольших значений для предельного значения. Увеличивая порядок вспомогательных систем метода лимитант удается добиться совпадения первых значащих цифр нижней и верхней оценок для предельного значения и первых неизвестных. Так как при $\eta = 1$ величина $a_0 = 0$, тогда асимптотическое поведение неизвестных в бесконечной системе (2.7) описывается вторым членом асимптотики $x_n = a_1 n^{-\lambda} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, что позволяет учесть остатки рядов в выражениях перемещений и напряжений.

Таблица 2. Выполнение граничных условий $G\mathbf{u}_x(x, \eta) = x$

x	простая редукция	предельные лимитанты
0,2	0,200695	0,200002
0,4	0,398494	0,400005
0,6	0,602612	0,600001
0,8	0,795593	0,800064
1,0	0,999999	0,999999

В первой колонке таблицы представлено решение задачи, где бесконечная система (2.7) решалась методом простой редукции при удержании в расчетах $N = 5$ первых уравнений и неизвестных. Во второй колонке дано решение с учетом остатков рядов на основе асимптотического закона (3.9), где неизвестные в бесконечной системе (2.7) определялись при помощи замены (3.5) и применения алгоритма предельных лимитант к системе (3.6). Данные таблицы показывают значительное улучшение точности при одинаковом порядке решаемых конечных систем.

5. Заключение

Таким образом, получена асимптотическая формула, описывающая асимптотическое поведение неизвестных в исследуемой бесконечной системе. Главный член асимптотики, представляет, как и для второй граничной задачи, константу. Представленный пример, показывает, что в некоторых случаях данная константа может обратиться в нуль, и асимптотическое поведение неизвестных описывается вторым членом, имеющим степенной характер убывания. Представленные численные результаты показывают, что использование метода предельных лимитант дает возможность найти первые неизвестные и обеспечить требуемую точность решения первой основной граничной задачи.

Список цитируемых источников

1. *Бондаренко П.С.* К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Мат. Сборник — 1951. — 29, № 2 . — С. 403 - 418.

2. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. —Киев: Наук. думка, 1978. — 264с.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. —М.: Наука., 1984. — 752с.
4. *Коялович Б.М.* Исследования о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений// Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1930. — №3. — С.41-167.
5. *Папков С.О., Чехов В.Н.* Про існування ненульової границі для розв'язку парної нескінченної системи алгебраїчних рівнянь // Вісник ЗДУ — 2000.— №1. —- С. 78 - 85.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. —М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981, — 800 с.
7. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. —Л.-М.:ОНТИ,—1934.—451с.
8. *Чехов В.Н., Пан А.В.* Про граничні вирази лімітант Кояловича // Доповіді НАН України — 2007.—№3.—-С. 31-36.
9. *Meleshko V.V.* Biharmonic problem in a rectangle //Appl. Sci. Res. — 1998. — 58. —P. 217-249.

Получена 27.01.2010