Динамические системы, вып. 21 (2006), 77–82

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

K-сходимость в гильбертовом пространстве

И.В. Орлов

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: oiv@crimea.edu*

Аннотация. Доказано, что гильбертово пространство с K-топологией можно рассматривать как регулярный индуктивный предел. Описано сопряженное пространство.

Исследование экстремальных задач для вариационных функционалов в гильбертовых (и, в особенности, в соболевских) пространствах [1]–[5] приводит, в частности, к обобщениям понятий локального экстремума, непрерывности и сильной дифференцируемости в гильбертовом пространстве, опирающимся на особый тип сходимости — K–сходимость (компактную сходимость) [6]–[8]. Основной результат настоящей заметки (теорема 3) утверждает, что гильбертово пространство с K–топологией можно рассматривать как регулярный индуктивный предел. Это позволяет получить эффективное описание сопряженного пространства и позволяет надеяться на эффективное описание топологии более сложных пространств, связанных с K–сходимостью.

Всюду далее под индуктивной шкалой (прямым спектром) банаховых пространств понимается система банаховых пространств, индуктивно упорядоченная в соответствии с непрерывными вложениями; под проективной шкалой (обратным спектром), соответственно, — система банаховых пространств, индуктивно упорядоченная противоположно непрерывным вложениям. Через $\varinjlim$ и $\varprojlim$ обозначаются, соответственно, локально выпуклый индуктивный и проективный пределы этих шкал.

Приведем вначале основное определение K–топологии в гильбертовом бесконечномерном сепарабельном пространстве H (вещественном либо комплексном). Всюду далее $K(H)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в H.

Определение 1. Для каждого $C \in K(H)$ обозначим $H_C = \operatorname{span} C$, $\|\cdot\|_C$ — норма в H_C, порожденная множеством C. Индуктивную (по поглощению C) шкалу банаховых ([9], л.1) пространств $\{(H_C, \|\cdot\|_C)\}_{C\in K(H)}$ обозначим $\overrightarrow{H}_K$, а ее индуктивный предел — H_K. Таким образом

$$\overrightarrow{H}_K = \{(H_C, \|\cdot\|_C)\}_{C\in K(H)}; \qquad H_K = \varinjlim_{C\in K(H)} (H_C, \|\cdot\|_C) = \varinjlim \overrightarrow{H}_K.$$

Наша основная цель — выяснить тип вложений в шкале $\overrightarrow{H}_K$. Напомним вначале, что при заданном ортонормированном базисе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в H, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$, канонический эллипсоид в H задается условием:

$$C_\varepsilon = \{x \in H| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \leq 1\}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}. \tag{1}$$

Хорошо известно [10], что эллипсоид (1) компактен в H тогда и только тогда, когда $\varepsilon_k \to 0$. Кроме того, известно, что компактные эллипсоиды являются универсальными компактами в H, т.е. любой компакт C в H (в том числе $C \in K(H)$) содержится в некотором компактном эллипсоиде $C_\varepsilon \in K(H)$. Отсюда легко вытекает следующий факт.

Предложение 1. *Для любого $C \in K(H)$ найдется такой компактный эллипсоид $C_\varepsilon \in K(H)$, что верно непрерывное вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varepsilon}$.*

Доказательство. Выбрав $C_\varepsilon \supset C$, $\varepsilon_k \to 0$, имеем, очевидно, $H_{C_\varepsilon} \hookleftarrow H_C$ (векторно). При этом $\|\cdot\|_{C_\varepsilon} \leq \|\cdot\|_C$, откуда вложение $(H_C, \|\cdot\|_C) \hookrightarrow (H_{C_\varepsilon}, \|\cdot\|_{C_\varepsilon})$ непрерывно. □

Следствие 1. *Шкала $\overrightarrow{H}_{K_\varepsilon} = \{(H_{C_\varepsilon}, \|\cdot\|_{C_\varepsilon})\}_{C_\varepsilon \in K(H)}$ образует конфинальную подшкалу шкалы $\overrightarrow{H}_K$, и, следовательно, их индуктивные пределы совпадают:*

$$H_K = \varinjlim_{C_\varepsilon \in K(H)} (H_{C_\varepsilon}, \|\cdot\|_{C_\varepsilon}) = \varinjlim \overrightarrow{H}_{K_\varepsilon}. \tag{2}$$

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением вложений в шкале $\overrightarrow{H}_{K_\varepsilon}$. Имеет место следующее важное утверждение.

Теорема 1. *Пусть C_{ε^1} и C_{ε^2} — компактные эллипсоиды в H. Тогда*

(i) $(\varepsilon_k^1 = o(\varepsilon_k^2)) \Rightarrow ($ *вложение* $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$ *компактно);*

(ii) $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{\varepsilon_k^1}{\varepsilon_k^2})^p < +\infty, 1 \leq p < \infty) \Rightarrow$ *(вложение* $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$ *принадлежит классу* $\mathfrak{S}_p$*).*

Доказательство. (i). Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in C_{\varepsilon^1}$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (|x_k|^2/(\varepsilon_k^1)^2) \leq 1$ (см. (1)). Т.к. $\{e'_k = \varepsilon_k^2 e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H_{C_{\varepsilon^2}}$, то представление x в этом базисе имеет вид

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k/\varepsilon_k^2) e'_k =: \sum_{k=1}^{\infty} x'_k e'_k, \text{ откуда } \sum_{k=1}^{\infty} (|x'_k|^2/(\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2)^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k|^2/(\varepsilon_k^1)^2) \leq 1,$$

т.е. в пространстве $H_{C_{\varepsilon^2}}$ эллипсоид $C_{\varepsilon^1} \subset H$ принимает вид эллипсоида $\widetilde{C}_{\varepsilon^1/\varepsilon^2}$ с полуосями $(\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2) \to 0$ по условию. Таким образом, единичный шар C_{ε^1} в $H_{C_{\varepsilon^1}}$ при тождественном вложении переходит в компактный эллипсоид $\widetilde{C}_{\varepsilon^1/\varepsilon^2}$ в $H_{C_{\varepsilon^2}}$, поэтому вложение компактно, т.е. принадлежит классу $\mathfrak{S}_\infty$.

(ii). В силу тождественности вложения $T: H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$, s–числа ([11], §20) оператора $|T| = (T^*T)^{1/2}$ совпадают с собственными числами вложения $H_{C_{\varepsilon^2}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^1}}$, равными, как показано выше, $\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Поскольку, согласно условию, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2|^p < \infty$, то ([12], 8.2) оператор T принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$. □

Возникает естественный вопрос: насколько распространены типы вложений, рассмотренные в теореме 1. Обозначим далее $K_p(H) = \{C_\varepsilon \in K(H) | \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k)^p < \infty\}$.

Теорема 2. *Для любого $C_{\varepsilon^1} \in K(H)$*

(i) существует $C_{\varepsilon^2} \in K(H)$ такой, что вложение $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$ компактно.

(ii) Для любого $C_{\varepsilon^1} \in K_p(H)$ существует $C_{\varepsilon^2} \in K(H)$ такой, что вложение $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ $(1 \le p < \infty)$.

Доказательство. (i). Если $C_{\varepsilon^1} \in K(H)$, то положим $\varepsilon_k^2 = \sqrt{\varepsilon_k^1}$, $\varepsilon^2 = (\varepsilon_k^2)_{k=1}^{\infty}$. Т.к. $\varepsilon_k^2 \to 0$, то $C_{\varepsilon^2} \in K(H)$; при этом $\varepsilon_k^1 = o(\varepsilon_k^2)$, откуда, по теореме 1(i), следует компактность вложения $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$.

(ii). Если $C_{\varepsilon^1} \in K_p(H)$, $1 \le p < \infty$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^1)^p < \infty$, то положим $\varepsilon_k^2 = (\sum\limits_{n=k}^{\infty} (\varepsilon_k^1)^p)^{1/2p}$, $\varepsilon^2 = (\varepsilon_k^2)_{k=1}^{\infty}$. Тогда $\varepsilon_k^2 \to 0$, т.е. $C_{\varepsilon^2} \in K(H)$. При этом, согласно [13], ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2)^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left((\varepsilon_k^1)^p / \sqrt{\sum_{n=k}^{\infty} (\varepsilon_k^1)^p} \right)$$

сходится, откуда, по теореме 1(ii), вложение $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$. □

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3. *Пространство H_K — регулярный ([14],[15]) индуктивный предел (с точностью до эквивалентности).*

Доказательство. Действительно, согласно (2), $H_K = \varinjlim \overrightarrow{H}_{K_\varepsilon}$. Введем в шкале $\overrightarrow{H}_{K_\varepsilon} = \{H_{C_\varepsilon}\}$ новый частичный порядок: $(C_{\varepsilon^1} \prec C_{\varepsilon^2}) \Leftrightarrow (\varepsilon_k^1 = o(\varepsilon_k^2))$, индуктивность которого следует из соотношения

$$(\varepsilon_k^1 \to 0,\, \varepsilon_k^2 \to 0) \Rightarrow (\varepsilon_k^1 = o(\sqrt{\varepsilon_k^1} + \sqrt{\varepsilon_k^2}),\, \varepsilon_k^2 = o(\sqrt{\varepsilon_k^1} + \sqrt{\varepsilon_k^2})).$$

Согласно теореме 1(i), $(C_{\varepsilon^1} \prec C_{\varepsilon^2}) \Rightarrow$ (вложение $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$ компактно).

Согласно теореме 2(i), с учетом того, что $(C_{\varepsilon^1} \prec C_{\varepsilon^2}) \Rightarrow (C_{\varepsilon^2} \supset \lambda \cdot C_{\varepsilon^1}$ при некотором $\lambda > 0$, т.е. C_{ε^2} поглощает $C_{\varepsilon^1})$, при переходе к новому отношению порядка индуктивный предел не изменяется, т.е.

$$H_K = \varinjlim(\overrightarrow{H}_{K_\varepsilon}, \prec). \tag{3}$$

По известной теореме Н.Бурбаки ([16], гл.III, §2), в шкале $(\overrightarrow{H}_{K_\varepsilon}, \prec)$ можно выделить частично вполне упорядоченную подшкалу $(\overrightarrow{H}'_{K_\varepsilon}, \prec)$, конфинальную исходной шкале. Это означает, что любая линейно упорядоченная ветвь шкалы $\overrightarrow{H}'_{K_\varepsilon}$ вполне упорядочена. Выделив по лемме Цорна [17] максимальную вполне упорядоченную ветвь $\overrightarrow{H}''_{K_\varepsilon}$ шкалы $\overrightarrow{H}'_{K_\varepsilon}$, мы получаем, таким образом, вполне упорядоченную шкалу $\overrightarrow{H}''_{K_\varepsilon}$ с компактными вложениями, конфинальную исходной шкале.

По классической теореме С.Э'Сильва [14] индуктивный предел $\varinjlim \overrightarrow{H}''_{K_\varepsilon}$ регулярен. Поскольку, в силу (3),

$$H_K = \varinjlim(\overrightarrow{H}_{K_\varepsilon}, \prec) = \varinjlim(\overrightarrow{H}''_{K_\varepsilon}, \prec),$$

то, с точностью до эквивалентности, пространство H_K является регулярным индуктивным пределом. □

Теперь нетрудно выяснить структуру сопряженного пространства H_K^*.

Теорема 4. *Для каждого $C \in K(H)$ обозначим $\|\cdot\|^C$ — ко-норму в сопряженном пространстве H_C^*. Тогда имеет место топологический изоморфизм*

$$H_K^* \cong \varprojlim_{C \in K(H)} (H_C^*, \|\cdot\|^C), \tag{4}$$

при этом вложения в проективном пределе (4) *— компактные (с точностью до эквивалентности).*

Доказательство. Ввиду регулярности, по теореме 3, индуктивного предела (3), по известной теореме Л.Шварца [14],

$$H_K^* \cong \varprojlim_{C \in K(H)} H_{K_\varepsilon}^* = \varprojlim_{C \in K(H)} H_C^*. \tag{5}$$

Далее, т.к. компактность вложений $H_{C_{\varepsilon^1}} \hookrightarrow H_{C_{\varepsilon^2}}$ влечет ([18], т.4.19) компактность сопряженных вложений $H^*_{C_{\varepsilon^2}} \hookrightarrow H^*_{C_{\varepsilon^1}}$, то вложения в первом индуктивном пределе в (5) (а значит, с точностью до эквивалентности, во втором пределе в (5)) — компактные. □

Заметим в заключение, что результат теоремы 4 можно интерпретировать следующим образом: линейный функционал на H K–непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывно его сужение на каждое подпространство $(H_C, \|\cdot\|_C)$, $C \in K(H)$. При этом сходимость сети $f_\alpha \to 0$ в H_K^* означает равномерную сходимость на каждом $C \in K(H)$, и из всякой сети $\{f_\alpha\}$, ограниченной на некотором $C_{\varepsilon^2} \succ C_{\varepsilon^2}$ можно выделить подсеть $\{f_{\alpha_i}\}$, равномерно сходящуюся на C_{ε^1}. Возникает естественный вопрос о возможности переноса этих результатов на пространства K–непрерывных линейных операторов вида $(H_K^1; H^2)$.

Список цитируемых источников

1. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. — Москва: Наука, 1972. — 415 с.
2. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973. — 219 с.
3. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наукова думка, 1999. — 630 с.
4. *Khruslov E. Ya., Pankratov L. S.* Homogenization of the Dirichlet variational problems in Orlicz–Sobolev spaces //Oper.Theory: Adv. & Appl. — Providence (R.I.): AMS,2000. — P. 345–346.
5. *Ricceri B.* Integral functionals on Sobolev spaces having multiple local minima //arXiv:math.OC/0402445, Feb2004. — V.1. — 26 p.
6. *Орлов И. В.* K–дифференцируемость и K–экстремумы //Укр. мат. вiсник. — 2006. — Т.3, № 1. — С. 97–115.
7. *Orlov I. V.* Extreme problems and Scales of the Operator Spaces //North–Holland Math.Studies.Funct.Anal& Appl. — Amsterdam–Boston–...: Elsevier, 2004. — Vol.197. — P. 209–228.
8. *Орлов И. В., Божонок Е. В.* Условия существования K–непрерывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1 //Ученые Записки ТНУ. — 2006. — Т.19(58), № 2. — С.–.
9. *Орлов И. В., Божонок Е. В.* Пространства K–непрерывных линейных операторов и функционалов //Динамические системы /Симферополь: ТНУ, 2006. — Вып.20. — С.—.
10. *Богданський Ю. В., Подколзiн Г. Б., Чаповський Ю. А.* Функцiональний аналiз. Сбiрник вправ. — Київ: Полiтехнiка, 2005. — 68 с.
11. *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Москва: Наука, 1984, — 256 с.
12. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. — Москва: Мир, 1967. — 266 с.
13. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва: Мир, 1976. — 360 с.
14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. — Москва: Физматгиз, 1959. — 684 с.
15. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. — Москва: Наука, 1994. — 334 с.
16. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — Москва: Мир, 1965. — 455 с.

17. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — Москва: Мир, 1971. — 359 с.
18. *Рудин У.* Функциональный анализ. — Москва: Мир, 1975. — 443 с.

Получено 1.10.2006