Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 89–120

УДК 517.98:517.972

Компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных

Е. М. Кузьменко

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: kuzmenko.e.m@mail.ru*

Аннотация. Обобщаются понятия классов Вейерштрасса $WK_p(z)$, $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$, введенные ранее И. В. Орловым и Е. В. Божонок для одномерного случая. Вводится понятие общего класса Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ над областью $D \subset \mathbb{R}^n$. Доказано, что принадлежность K-псевдополиномиального интегранта вариационного функционала подходящему классу Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ гарантирует n-кратную K-дифференцируемость данного фунционала в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$. Вычислена n-я K-вариация вариационного функционала. Рассмотрен ряд примеров и частных случаев.

Ключевые слова: индуктивный предел, вариационный функционал, компактная непрерывность, пространство Соболева.

Введение. Предварительные сведения

Известно (см., например, [1]), что вариационные функционалы в пространствах Соболева, как правило, не обладают обычными аналитическими свойствами. В работах И. В. Орлова и Е. В. Божонок [2]–[5] исследованы общие условия корректной определенности вариационных функционалов в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a,b] = H^1[a,b]$. При этом от классической жесткой оценки интегранта $f(x,y,z) \le \alpha + \beta z^2$ классического вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx\,, \quad y(\cdot) \in W^{1,2}[a,b]$$

был совершен переход к значительно более общему классу псевдоквадратичных по z интегрантов. Было показано, что псевдоквадратичность гарантирует корректную определенность функционала $\Phi(y)$ в данном пространстве Соболева [3]. Также для интегранта $f(x,y,z)$ одномерного вариационного функционала $\int_a^b f(x,y,y')dx$, действующего в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a,b]$, были введены так называемые классы Вейерштрасса $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$. Эти классы содержат псевдоквадратичные по z интегранты ($f \in K_2(z)$), коэффициенты которых обладают доминантной по z смешанной гладкостью нужного порядка (см. общее определение доминантной смешанной гладкости в [6]).

Оказалось, что принадлежность интегранта f подходящему классу Вейерштрасса гарантирует компактную дифференцируемость (K-дифференцируемость) соответствующего порядка для вариационного функционала. Заметим, что хотя K-дифференцируемость и слабее сильной дифференцируемости (она занимает промежуточное место между дифференцируемостью по Фреше и дифференцируемостью по Гато), но позволяет решать вариационные экстремальные задачи в пространствах Соболева [2], [5].

В работе упомянутые результаты обобщаются по следующим направлениям:

1) Вводится класс K-псевдополиномиальных по z интегрантов порядка p, для которых функционал
$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y)dx \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(D))$$
также корректно определен.

2) Условие компактной непрерывности вариационных функционалов в $H^1(D)$ переносится на случай пространств Соболева $W^{1,p}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ функций многих переменных.

3) Обобщаются понятия классов Вейерштрасса $WK_p(z)$, $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$, введенные ранее для одномерного случая, и вводится понятие общего класса Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ над областью $D \subset \mathbb{R}^n$.

4) Доказано, что принадлежность K-псевдополиномиального интегранта вариационного функционала подходящему классу Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ гарантирует n-кратную K-дифференцируемость данного вариационного фунционала в пространстве Соболева $W^{1,p}$. Вычисляется n-я K-вариация вариационного функционала.

Таким образом, обобщается построенная указанными авторами теория компактных экстремумов вариационных функционалов в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a, b]$ на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$ над произвольной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ с липшицевой границей.

Приведем общее определение компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и кратной компактной дифференцируемости функционала в полном ЛВП.

Определение 1. [2] Пусть E — полное вещественное ЛВП, $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Скажем, что функционал Φ *компактно непрерывен, компактно дифференцируем (дважды K-дифференцируем и т.д.)* в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + spanC)$ [2], дифференцируемо по Фреше (дважды дифференцируемо по Фреше и т.д.) в точке y относительно нормы $\|\cdot\|_C$ в пространстве $E_C = spanC$, порожденном C.

Далее обозначим через $\mathfrak{C}(E)$ систему всех абсолютно выпуклых компактов в E и через $L_k(E)$ — пространство k-линейных непрерывных форм на E. Выпишем в явной форме важное для нас в дальнейшем определение n-ной K-производной:

$$(\Phi^{(n-1)}(y+h_1)-\Phi^{(n-1)}(y))\cdot(h_2,\dots h_n)=$$

$$=\Phi_K^{(n)}(y)\cdot(h_1,h_2,\dots,h_n)+0(\|h_1\|_{C_1}\cdot\ldots\cdot\|h_n\|_{C_n}) \qquad (0.1)$$

для любых абсолютно выпуклых компактов $C_1\dots,C_n\in\mathfrak{C}(E)$.

1. Псевдополиномиальность. Условия корректной определенности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных

Корректная определенность вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$:

$$\Phi(y)=\int_D f(x,y,\nabla y)dx, \qquad (y(\cdot)\in W^{1,p}) \qquad (1.1)$$

тесно связывается, как известно [7], с оценкой интегранта f через $\|\nabla y\|^p$. Однако классическое достаточное условие корректной определенности

$$f(x,y,z)\geq\alpha+\beta\|z\|^p, \quad (\beta>0)$$

жестко ограничивает класс допустимых интегралов. Мы введем здесь значительно более обширный класс K-*псевдополиномиальных по* z интегрантов порядка p, для которых функционал (1.1) также корректно определен. Далее, для произвольного вещественного банахова пространства Z обозначим через Z_k^* — банахово пространство всех k-линейных симметричных непрерывных вещественных форм, действующих в Z, $k\in\mathbb{N}_0$, $Z_0^*=\mathbb{R}$.

Определение 2. Пусть X,Y,Z — вещественные банаховы пространства; $D_x\subset X$, $D_y\subset Y$, $D_z\subset Z$ — открытые области; $f:D_x\times D_y\times D_z\to\mathbb{R}$; $p\in\mathbb{N}_0$. Назовем функционал f K-*псевдополиномом порядка* p, если f допускает представление вида

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}R_k(x,y,z)(z)^k\,, \qquad (1.2)$$

где коэффициенты $R_k:D_x\times D_y\times D_z\to Z_k^*$, $(k=\overline{0,p})$ — борелевские отображения, удовлетворяющие условию *доминантной по* x,y *смешанной ограниченности* (см. общее определение пространств с доминантной смешанной гладкостью [6]): для любых компактов $C_x\subset D_x$, $C_y\subset D_y$ коэффициенты R_k ограничены на $C_x\times C_y\times D_z$ независимо от выбора $z\in D_z$. В этом случае примем обозначение: $f\in K_p(z)$.

Пример 1. В случае $Z = \mathbb{R}$ имеем $Z_k^* = \mathbb{R}$ $(k = \overline{0,p})$ и представление (1.2) примет вид

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z) \cdot z^k \,.$$

Пример 2. В случае $Z = \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ $R_k(x,y,z) \cdot (z)^k$ есть однородные K-псевдополиномы k-ого порядка по $z = (z_1, z_2, \dots z_m)$ и представление (1.2) примет вид

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{k_1+\ldots+k_m=k} r_k(x,y,z) z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \ldots z_m^{k_m} \right) ,$$

что может быть переписано в виде K-псевдополинома

$$f(x,y,z_1,\dots z_m) = \sum_{k_1+\ldots+k_m \le p} a_{k_1\ldots k_m}(x,y,z_1,\dots z_m) z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \ldots z_m^{k_m} \,.$$

Пример 3. Пусть функционал f сильно дифференцируем p раз по z. Рассмотрим его многочлен Тейлора p-го порядка по z:

$$P_p^z(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,y,z)(z)^k \,. \tag{1.3}$$

Здесь $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,y,z) : D_x \times D_y \times D_z \to Z_k^*$ $(k = \overline{0,p})$. Если частные производные f по z удовлетворяют условию доминантной по x, y смешанной ограниченности (например, если $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}$ непрерывны по совокупности переменных и периодичны по z), то многочлен Тейлора (1.3) является K-псевдополиномом порядка $p:$ $P_p^z \in K_p(z)$.

Замечание 1. Представление (1.2) интегранта f можно, не меняя общности, упростить:

$$f(x,y,z) = R_0(x,y,z) + R_p(x,y,z)(z)^p \,. \tag{1.4}$$

Покажем, что K-псевдополиномиальность порядка p интегранта f гарантирует корректную определенность основного вариационного функционала в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}$.

Теорема 1. *Если интегрант $f : D_x \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_z \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $K_p(z)$, где $D_x = D$ — компактная область в $\mathbb{R}^n_x$ то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int_D f(x,y,\nabla y)dx \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(D)\,,\, p \in \mathbb{N}) \tag{1.5}$$

корректно определен всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$. При этом для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$ справедлива следующая оценка по норме $\|y\|$:

$$|\Phi(y)| \le \alpha_{C_\Delta} + \beta_{C_\Delta} \cdot \|y\|^p_{W^{1,}} \quad (y(\cdot) \in C_\Delta)\,, \tag{1.6}$$

где коэффициенты $\alpha_{C_\Delta} \ge 0$, $\beta_{C_\Delta} \ge 0$ зависят только от выбора компакта C_Δ.

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и обозначим $C_y = y(D)$ — компакт в $\mathbb{R}$. Тогда, в соответствии с определением 2, найдутся такие константы M_k, $k = \overline{0,p}$, что $\forall x \in D$:

$$|R_0(x, y, \nabla y)| \leq M_0\,, \qquad \|R_k(x, y, \nabla y)\| \leq M_k\,, \quad (k = \overline{1,p}). \tag{1.7}$$

Используя для f K-псевдополиномиальное представление (1.2), имеем

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \int_D \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k\right) dx. \tag{1.8}$$

Используя (1.7), с учетом свойств k-линейных непрерывных форм и неравенства Гельдера–Минковского [2]), имеем:

a) при $k = 0$,

$$\left|\int_D R_0(x, y, \nabla y) dx\right| \leq \int_D |R_0(x, y, \nabla y)| dx \leq M_0 \cdot mes(D). \tag{1.9}$$

b) при $1 \leq k \leq p$,

$$\left|\int_D \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k\right) dx\right| \leq \int_D \left|(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k)\right| dx \leq$$

$$\leq \int_D \left(\|R_k(x, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^k\right) dx \leq M_k \cdot \int_D \|\nabla y\|^k dx \leq$$

$$\leq M_k \left[\int_D \left(\|\nabla y\|^k\right)^{\frac{p}{k}} dx\right]^{\frac{k}{p}} \cdot \left|\int_D (dx)\right|^{\frac{p-k}{p}} \leq M_k \left[mes(D)\right]^{\frac{p-k}{p}} \|y\|^k_{W^{1,p}}. \tag{1.10}$$

Из (1.7)–(1.10) получаем:

$$|\Phi(y)| = \left|\sum_{k=0}^{p} \int_D \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k\right) dx\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} \left|\int_D (R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k) dx\right| \leq \sum_{k=0}^{p} M_k \left[mes(D)\right]^{\frac{p-k}{p}} \|y\|^k_{W^{1,p}} < \infty. \tag{1.11}$$

Таким образом, $|\Phi(y)| < \infty$, т.е. функционал (1.5) корректно определен всюду на $W^{1,p}$. Получим теперь оценку по норме (1.6), коэффициенты которой зависят лишь от выбора компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$. Так как $C_\Delta \subset W^{1,p}$ — компакт, то множество $C^y_\Delta = \{y(x) \mid x \in D, y(\cdot) \in C_\Delta\}$ — компакт. Поскольку коэффициенты $R_k(x, y, \nabla y)$, представления (1.8) ограничены локально компактно по x, y и глобально по z, то на множестве $D \times C^y_\Delta \times \mathbb{R}$ также выполнены оценки типа (1.7):

$$\forall x \in D : |R_0(x, y, \nabla y)| \leq \widetilde{M}_0\,, \qquad \|R_k(x, y, \nabla y)\| \leq \widetilde{M}_k\,, \quad (1 \leq k \leq p). \tag{1.12}$$

Воспользовавшись оценками (1.12), где константы $\widetilde{M_k}$ зависят только от выбора компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D,F)$) и оценкой (1.11), мы получаем:

$$|\Phi(y)| \le \widetilde{A_C^0} + \widetilde{A_C^1}\|y\|_{W^{1,p}} + \ldots + \widetilde{A_C^p}\|y\|^p_{W^{1,p}}\,, \tag{1.13}$$

где коэффициенты $\widetilde{A_C^0}, \widetilde{A_C^1}, \ldots \widetilde{A_C^p}$ — константы, зависящие только от выбора компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}$. Средние члены (1.13) при малой норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ поглощаются увеличением свободного члена $\widetilde{A_C^0} \to A_C^0$, а при большой норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ поглощаются увеличением старшего коэффициента $\widetilde{A_C^p} \to A_C^p$. Таким образом мы переходим к оценке (1.6). $\square$

Итак, K-псевдополиномиальность интегранта вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, кроме корректной определенности функционала, гарантирует степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

2. Условия компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных

Перейдем к условиям K-непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева. С этой целью введем подходящий класс гладкости $WK_p(z)$ K-псевдополиномиальных интегрантов порядка p.

Определение 3. Пусть, в обозначениях определения 2, интегрант f непрерывен и принадлежит классу $K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Назовем f *вейерштрассовским псевдополиномом порядка* p ($f \in WK_p(z)$), если коэффициенты R_k в K-псевдополиномиальном представлении (1.2) можно выбрать таким образом, что при любом выборе компактов $C_x \subset D_x$, $C_y \subset D_y$ коэффициенты R_k ($k = \overline{0,p}$) равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$ (независимо от выбора $z \in D_z$).

В этом случае введем также обозначения для соответствующего класса *доминантной смешанной непрерывности:* $R_k \in W_K(z)$. Заметим, что здесь также представление (1.2) можно заменить упрощенным представлением (1.4) (см. замеч. 1), где R_0, $R_k \in W_K(z)$. Докажем теперь важную лемму, на которую будет опираться доказательство последующих теорем о K-непрерывности и K-дифференцируемости вариационного функционала в $W^{1,p}$.

Лемма 1. *Пусть заданы отображения* $\varphi : D_x \times F_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *и* $\psi : D_x \longrightarrow \mathbb{R}$ *(*$V = \varphi(x,u)$, $y = \psi(x)$, F_1 *— банахово пространство) такие, что:*

i) $\varphi(x,u) = o(\|u\|^k)$, $0 \le k \le p$, *при* $u \to 0$ *равномерно по* $x \in D_x$*;*

ii) $\psi \in L_1(D_x,\mathbb{R})$*;*

iii) отображение $\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot, \widetilde{h}) \cdot \psi$ *— непрерывное отображение компакта* $\widetilde{C} \subset L_p(D, F_1)$, $1 \le p < \infty$, *в* $L_1(D, \mathbb{R})$.

Тогда

$$\int_{D_x} \overbrace{\varphi(x, \widetilde{h}(x)) \cdot \psi(x)}^{\chi(\widetilde{h})(x)} dx = o\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}\right)^k \text{ при } \|\widetilde{h}\|_{L_p} \to 0, \text{ равномерно по } \widetilde{h} \in \widetilde{C}\,. \quad (2.1)$$

Доказательство. Ввиду непрерывности отображения χ, множество $\chi(\widetilde{C}) \subset L_1(D, \mathbb{R})$ компактно. Поэтому к интегралу (2.1) можно применить усиленное свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега на функциональном компакте [8]. С этой целью обозначим, для всякого $N > 0$,

$$E_N = \{x \in D_x \Big| |\psi(x)| \le N\}, \quad e_N = \{x \in D_x \Big| |\psi(x)| > N\}\,.$$

Поскольку $\psi \in L_1$, то $mes(e_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, согласно упомянутому свойству, найдется такое $N > 0$, для которого:

$$\Big|\int_{e_N} \chi(\widetilde{h}) dx\Big| \le \frac{1}{2} \int_{D_x} |\chi(\widetilde{h})| dx\,. \quad (2.2)$$

Поскольку $D_x = E_N \cup e_N$, то из (2.2) легко следует:

$$\Big|\int_{D_x} \chi(\widetilde{h}) dx\Big| \le \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \int_{E_N} |\chi(\widetilde{h})| dx = 2 \cdot \int_{E_N} |\chi(\widetilde{h})| dx\,. \quad (2.3)$$

2)Фиксируем $\widetilde{h} \in \widetilde{C}$, и для произвольного $\delta > 0$ положим:

$$E_{N_\delta} = \{x \in E_N \Big| \|\widetilde{h}(x)\| < \delta\}\,,\ e_{N_\delta} = \{x \in E_N \Big| \|\widetilde{h}(x)\| \ge \delta\}\,.$$

Очевидно, $E_N = E_{N_\delta} \bigcup e_{N_\delta}$. Кроме этого, проверим, что

$$\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p} < \delta^{\frac{p+1}{p}}\right) \Rightarrow (mes\,(e_{N_\delta}) < \delta) \quad (2.4)$$

Действительно, допуская противное, имеем:

$$\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}\right)^p = \int_{D_x} \|\widetilde{h}\|^p dx \ge \int_{e_{N_\delta}} \|\widetilde{h}\|^p dx \ge \delta^p \cdot mes(e_{N_\delta}) \ge \delta^{p+1}\,,$$

что противоречит оценке слева в (2.4). Воспользуемся теперь вновь, уже для интеграла справа в (2.3), усиленным свойством абсолютной непрерывности интеграла Лебега. С учетом (2.4), найдется такое $\delta_1 > 0$, что при всех $\delta \le \delta_1$:

$$\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p} < \delta^{\frac{p+1}{p}}\right) \Rightarrow (mese_{N_\delta} < \delta) \Rightarrow \left(\int_{e_{N_\delta}} |\chi(\widetilde{h})| dx \le \frac{1}{2} \cdot \int_{E_N} |\chi(\widetilde{h})| dx\right)\,. \quad (2.5)$$

Из (2.5), аналогично рассмотренному в п.1) случаю, легко следует:

$$\int_{E_N} |\chi(\widetilde{h})|dx \leq 2\int_{E_{N_\delta}} |\chi(\widetilde{h})|dx\,. \tag{2.6}$$

3) Фиксируем теперь $\varepsilon > 0$ и , используя свойство i) отображения φ, найдем такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $\|u\| < \delta(\varepsilon)$ и $x \in D_x$:

$$|\varphi(x,u)| \leq \varepsilon \cdot \|u\|^k.$$

В частности, при $x \in E_{N_\delta}$, $\delta > \delta(\varepsilon)$ имеем:

$$|\varphi(x,\widetilde{h}(x))| \leq \varepsilon \cdot \|\widetilde{h}(x)\|^k\,. \tag{2.7}$$

4) Наконец, из (2.3), (2.6), (2.7) находим такое $\delta < \delta_1(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta(\varepsilon))$, что:

$$\int_D |\chi(\widetilde{h})|dx \leq 2\int_{E_N} |\chi(\widetilde{h})|dx \leq 4\int_{E_{N_\delta}} |\chi(\widetilde{h})|dx \leq 4N \cdot \int_{E_{N_\delta}} |\varphi(x,\widetilde{h})|dx \leq$$

$$\leq 4N\varepsilon \cdot \int_{E_{N_\delta}} \|\widetilde{h}\|^k dx \leq 4N\varepsilon \cdot \int_D \|\widetilde{h}\|^k dx\,,$$

откуда, применяя неравенство Гельдера–Минковского, получаем:

$$\left|\int_D \varphi(x,\widetilde{h}(x)) \cdot \psi(x)dx\right| \leq \left[4N \cdot (mes(D))^{\frac{p-k}{p}}\right] \cdot \varepsilon \cdot \left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}\right)^k$$

при $\|\widetilde{h}\|_{L_p} < (\delta_1(\varepsilon))^{\frac{p+1}{p}}$,$\widetilde{h} \in C$. Из последней оценки вытекает утверждение леммы. □

Теорема 2. *Если интегрант вариационного функционала*

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx,$$

где D — компактная область в $\mathbb{R}^n$, принадлежит классу Вейерштрасса $WK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, то функционал $\Phi(y)$ K-непрерывен всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$.

Доказательство. 1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}$. Воспользуемся каноническим представлением интегранта f:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k\,, \tag{2.8}$$

где коэффициенты $R_k : T := D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}_n^*$, согласно условию $f \in WK_p(z)$, равномерно непрерывны и ограничены доминантно по x, y (т.е. локально компактно по x, y и глобально по z). Заметим, что в силу компактности множества C_Δ в пространстве $W^{1,p}$, множество:

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y+h)(D) \qquad (K^\Delta = K^{0,\Delta})$$

также компактно. Следовательно, на множестве $T^{y,\Delta} = D \times K^{y,\Delta} \times F$ ($T^{\Delta} := T^{0,\Delta}$) все коэффициенты R_k ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки

$$\|R_k(x,y,z)\| \le M_k < \infty \quad \left(k = \overline{0,p}; \quad (x,y,z) \in T^{y,\Delta}\right). \tag{2.9}$$

Подставляя теперь в (1.5) представление (2.8), найдем приращение вариационного функционала Φ в точке $y(\cdot)$ при $h \in C_{\Delta}$:

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \int_D f(x, y+h, \nabla y + \nabla h)dx - \int_D f(x,y,\nabla y)dx =$$

$$= \int_D \left(\sum_{k=0}^{p} R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y + \nabla h)^k\right) dx - \int_D \left(\sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k\right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \int_D \overbrace{\left[R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y + \nabla h)^k - R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k\right]}^{\Delta_k} dx\,. \tag{2.10}$$

Фиксируем k и преобразуем выражение Δ_k:

$$\Delta_k = R_k(x, y+\nabla y, h+\nabla h) \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l (\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}\right) - R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \underbrace{C_k^l R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{\left[R_k(x, y+\nabla y, h+\nabla h) - R_k(x,y,\nabla y)\right]}^{\Delta R_k} (\nabla y)^k}_{B_k}\,. \tag{2.11}$$

2) Проведем вначале оценку для интегралов от A_{kl} $\quad (l = \overline{0,k-1})$.
Поскольку ввиду (2.9),

$$|A_{kl}| \le M_k \cdot \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l},$$

то

$$\left| \int_D \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl}\right) dx \right| \le \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot \int_D \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l} dx\,. \tag{2.12}$$

Применяя к интегралам справа в (2.12) неравенство Гельдера–Минковского [3]: при $p_1 = \frac{p}{k-l}$, получаем:

$$\left| \int_D \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl}\right) dx \right| \le \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \left(\int_D \|\nabla h\|^{p'} dx\right)^{\frac{k-l}{p}} \cdot \left(\int_D \|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l}} dx\right)^{\frac{p-k+l}{p}} \le$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot (\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}})^l \cdot (\|h\|_{W^1,\mathrm{p}})^{k-l}. \tag{2.13}$$

Поскольку $\frac{pl}{p-k+l} \leq p$, то

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}} \leq N_{kl} \cdot (\|y\|_{W^1,\mathrm{p}}), \tag{2.14}$$

где N_{kl} — константы, связывающие соответствующие соболевские нормы. Окончательно, из (2.13) и (2.14) находим:

$$\left| \int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^1,\mathrm{p}})^l \cdot (\|h\|_{W^1,\mathrm{p}})^{k-l} \longrightarrow 0$$

$$\text{при} \quad \|h\|_{W^1,\mathrm{p}} \to 0, \qquad h \in C_\Delta\,. \tag{2.15}$$

3) Теперь проведем оценку интегралов от B_k, используя основную лемму. Имеем:

$$\left| \int\limits_D B_k dx \right| \leq \int\limits_D |\Delta R_k \cdot (\nabla y)^k| dx \leq \int\limits_D \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx,$$

что позволяет, в рамках леммы, положить:

$$\varphi(x,u) = \|R_k(x, y(x) + u_1, \nabla y(x) + u_2) - R_k(x, y(x), \nabla y(x))\|\,,$$

$$(u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n = F_1)\,,$$

$$\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^k.$$

Пусть $\tau(h) = (h, \nabla h) : W^{1,p}(D) \to L_p(D, F_1)$, τ — изометрия. Тогда $\tau(C_\Delta)$ — компакт в $L_p(D, F_1)$. Проверим выполнение условий основной леммы на множестве T^Δ.

i) В силу равномерной непрерывности R_k на множестве $T^{y,\Delta}$, $\varphi(x,u) = o(1) = o(\|u\|^0)$ при $u = (u_1, u_2) \to 0$, $(u_1, u_2) \in \tau(C_\Delta)$, равномерно по $x \in D$.

ii) Функция $\psi = \|\nabla y\|^k \in L_1(D)$, ввиду $\nabla y \in L_p$, $k \leq p$.

iii) Отображение

$$\chi(\widetilde{h}) = \|R_k(\cdot, y + h, \nabla y + \nabla h) - R_k(\cdot, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^k \qquad (\widetilde{h} = (h, \nabla h) \in \tau(C_\Delta))$$

— непрерывное отображение из $\tau(C_\Delta)$ в $L_1(D)$ ввиду непрерывности и ограниченности R_k и суммируемости $\|\nabla y\|^k$. Таким образом, основная лемма применима, откуда

$$\int\limits_D \varphi(x, \widetilde{h}) \psi(x) dx = \int\limits_D \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx = o((\|\widetilde{h}\|_{L_p})^0) = o(1)$$

$$\text{при} \quad \|\widetilde{h}\|_{L_p} = \|h\|_{W^{1,p}} \to 0, \text{равномерно по} \quad h \in C_\Delta\,. \tag{2.16}$$

4) Наконец, из тождеств (2.10) и (2.11) и оценок (2.15) и (2.16) получаем:

$$\Phi(y+h)-\Phi(y)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{D}A_{kl}dx+\sum_{k=0}^{p}\int\limits_{D}B_{k}dx\to 0$$

$$\text{при}\quad \|h\|_{W^{1,p}}\to 0\,,\qquad h\in C_{\Delta}\,. \tag{2.17}$$

Поскольку C_Δ — компакт в $W^{1,p}(D)$, то норма $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ мажорирует норму $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$, поэтому условие (2.17) тем более выполнено при $\|h\|_{C_\Delta}\to 0$. В силу произвольности выбора C_Δ, это означает K-непрерывность вариационного функционала (1.5) в произвольной точке $y(\cdot)\in W^{1,p}(D)$. □

Замечание 2. Таким образом, K-непрерывность вариационного функционала (1.5) гарантируется принадлежностью интегранта к классу вейерштрассовских псевдополиномов. Отметим, что в действительности, в теореме доказано более сильное утверждение — классическая непрерывность всех сужений функционала (1.5) на подпространства $span(C_\Delta)$, $C_\Delta\in\mathcal{C}(W^{1,p}(D))$, с индуцированной топологией. Однако эти подпространства, в бесконечномерном случае, незамкнуты, что делает более удобным использование именно K-непрерывности (и далее, K-дифференцируемости).

В заключение, проведем более детальное сравнение условия полиномиальности (1.2) с классическими оценками роста интегранта вариационного функционала в пространствах Соболева.

Корректная определенность $\Phi(y)$ в $W^{1,p}$ в задачах на абсолютный экстремум либо условный абсолютный экстремум обеспечивается, как правило степенной оценкой по z сверху:

$$f(x,y,z)\geq\alpha+\beta\|z\|^{p}\quad(\beta>0). \tag{2.18}$$

В псевдополиномиальном же случае подобная оценка должна выполнятся лишь локально компактно по y.

Теорема 3. *Если, в обозначениях теоремы 1, $f\in K_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$, то для любого компакта $C_y\subset\mathbb{R}_y$ справедлива оценка*

$$|f(x,y,z)|\geq\alpha+\beta\|z\|^{p}\quad((x,y,z)\in D_x\times C_y\times\mathbb{R}^n_z)\,, \tag{2.19}$$

где коэффициенты $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ зависят только от выбора компакта $C_y\subset\mathbb{R}_y$.

Доказательство. Воспользуемся K-псевдополиномиальным представлением (1.2) интегранта f:

$$|f(x,y,z)|=\left|\sum_{k=0}^{p}R_k(x,y,z)(z)^k\right|\leq\sum_{k=0}^{p}|R_k(x,y,z)\cdot(z)^k|\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{p}\sup_{x\in D_x,y\in C_y,z\in\mathbb{R}^n_z}\|R_k(x,y,z)\|\cdot\|z\|^k=:\sum_{k=0}^{p}m_k\cdot\|z\|^k\,. \tag{2.20}$$

Далее, как уже отмечалось в аналогичной ситуации в доказательстве теоремы 1, средние члены в оценке (2.20) при $\|z\| \le 1$ поглощаются увеличением свободного члена $m_0 \to \alpha$, а при $\|z\| > 1$ поглощаются увеличением старшего коэффициента $m_p \to \beta$, что приводит к оценке (2.19). $\square$

Рассмотрим несколько конкретных примеров (везде $n = 1$).

Пример 4. Интегрант $f_1(x, y, z) = e^y \cdot z^p + \sin(x+y+z)$ локально по y удовлетворяет двухсторонней оценке:

$$(y \in [m; M]) \Rightarrow \left(e^m |z|^p - 1 \le f_1(x, y, z) \le e^M |z|^p + 1\right),$$

при этом глобальная оценка отсутствует.

Пример 5. Интегрант $f_2(x, y, z) = e^y \cdot z^p \cdot \sin(xyz)$ также локально по y удовлетворяет оценке по модулю:

$$(y \in [m; M]) \Rightarrow \left(|f_2(x, y, z)| \le e^M |z|^p\right),$$

при этом глобальная оценка также отсутствует.

Отметим, что оба рассмотренных примера интегрантов принадлежат классу $WK_p(z)$.

3. Класс Вейерштрасса $W^1K_p(z)$. Условия K-дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных

Здесь мы переходим от введенного ранее начального класса Вейерштрасса $WK_p(z)$ к следующему классу $W^1K_p(z)$, попадание интегранта в который гарантирует K-дифференцируемость вариационного функционала.

Определение 4. Пусть, в обозначениях определения 2, функционал $f : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \longrightarrow \mathbb{R}$ является K-псевдополиномом по z порядка p ($f \in K_p(z)$). Скажем,что f — *вейерштрассовский псевдополином класса* $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, если f допускает K-псевдополиномиальное представление вида

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k,$$

коэффициенты R_k которого удовлетворяют *условию доминантной (по x, y) смешанной гладкости первого порядка*: при любом выборе компактов $C_x \subset \mathbb{R}^n_x$ и $C_y \subset \mathbb{R}_y$, и без каких-либо ограничений на $z \in \mathbb{R}^n_z$, отображения $R_k(x, y, z)$ вместе с градиентами $\nabla R_k = \nabla_{yz} R_k,\ k = \overline{0, p}$, равномерно непрерывны и ограничены в $C_x \times C_y \times \mathbb{R}^n_z$.

Приведем простейший пример.

Пример 6. Пусть $f(z) = R_p(z) \cdot (z)^p$, $z \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$, причем $R_p \in C^1$ и :

$$\lim_{z\to\infty} R_p(z) = \lim_{z\to\infty} R'_p(z) = 0$$

Тогда R_p и R'_p — непрерывные функции с нулевыми пределами на бесконечности, откуда следует их равномерная непрерывность и ограниченность глобально по z. Следовательно, $f \in W^1K_p(z)$. Очевидное обобщение:

$$f(x,y,z) = R_p(x,y,z) \cdot (z)^p \qquad z \in \mathbb{R}^n,\, p \in \mathbb{N}\,,$$

где $R_p \in C^1$ и:

$$\lim_{z\to\infty} R_p(x,y,z) = \lim_{z\to\infty} \nabla_{yz} R_p(x,y,z) = 0$$

локально по x, y.

Отметим, что в определении 4, как и в случае классов $K_p(z)$ и $WK_p(z)$, можно ограничиться представлением вида

$$f(x,y,z) = R_0(x,y,z) + R_p(x,y,z) \cdot (z)^p \qquad \big(R_0, R_p \in W^1_K(z)\big)\,.$$

Приведем примеры интегрантов класса $W^1K_p(z)$.

Пример 7. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k, \quad \text{где} \quad R_k \in C^1_{xy}\,(k = \overline{0,p})\,.$$

Тогда независимость R_k от z автоматически влечет $R_k \in W^1_K(z)$, откуда $f \in W^1K_p(z)$.

Пример 8. Обобщим предыдущий пример:

Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k\in\chi} R_k(x,y)(z)^k + \sum_{k'\in\chi'} R_k(x,y,z)(z')^k \qquad (\chi \dot\cup \chi' = \overline{0,p}),$$

где $R_k \in C^1_{xy}$ при $k \in \chi$, $R'_k \in W^1_K(z)$ при $k \in \chi'$. Тогда $f \in W^1K_p(z)$.

Пример 9. Пусть

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k \overbrace{(r_k(x,y,z))}^{t}(z)^k \quad \varphi_k \in C^1_t\,, r_k \in W^1_K(z)\,.$$

Тогда, очевидно, $R_k = \varphi_k(r_k) \in W_K(z)$ и $\nabla_{yz} R_k = \frac{d\varphi_k}{dt}$, $\nabla_{yz} r_k \in W_K(z)$, откуда $f \in W^1K_p(z)$.

Докажем теперь K-дифференцируемость в пространстве $W^{1,p}(D)$ основного вариационного функционала с интегрантом из класса $W^1K_p(z)$. В доказательстве мы вновь будем опираться на основную лемму 1.

Теорема 4. *Пусть интегрант f вариационного функционала* (1.5) *в пространстве $W^{1,}(D)$ принадлежит классу Вейерштрасса $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y) dx$$

K-дифференцируем всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$. При этом сохраняется классическая формула первой вариации:

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y)h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \cdot \nabla h\right] dx \qquad \left(h \in W^{1,p}(D)\right). \quad (3.1)$$

В обозначениях псевдополиномиального представления (1.2) *интегранта f равенство* (3.1) *принимает вид:*

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \Bigg(\sum_{k=0}^{p} \Big[\nabla_{y,z} R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+ k \cdot R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h\Big]\Bigg) dx. \quad (3.2)$$

Доказательство. 1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт C_Δ в данном пространстве. Воспользуемся K-псевдополиномиальным представлением (1.2) для интегранта f:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k, \quad \left(R_k : T = D_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to (\mathbb{R}^n_z)^*\right), \quad (3.3)$$

где, для коэффициентов R_k, согласно условию $f \in W^1K_p(z)$, джеты первого порядка $(R_k, \nabla_{yz} R_k)$ равномерно непрерывны и ограничены в T локально по x,y и глобально по z (т.е. доминантно по x,y).

Как уже отмечалось(в аналогичной ситуации) в доказательстве теоремы 2, в силу компактности множества $y + C_\Delta$, числовое множество

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y + h)(D)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T^{y,\Delta} = D \times K^{y,\Delta} \times \mathbb{R}^n_z$, $\quad (T^\Delta := T^{0,\Delta})$ все джеты $(R_k, \nabla_{yz} R_k)$ ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки:

$$\left|R_k(x, y, z) \cdot (\zeta)^k\right| \le M_{k0} < \infty, \quad \left(k = \overline{0, p}; \quad (x, y, z) \in T^{y,\Delta}_D, \, \zeta \in \mathbb{R}^n_z\right),$$

$$\|\nabla_{yz} R_k(x,y,z)\cdot(h,\nabla h)\| \le M_{k1} < \infty, \quad \left(k=\overline{0,p}; \quad (x,y,z)\in T^{y,\Delta},\, h\in C_\Delta\right). \tag{3.4}$$

Воспользуемся представлениями (2.8)–(2.11) из нашего доказательства теоремы о K-непрерывности :

$$\Phi(y+h)-\Phi(y) = \int_D f(x,y+h,\nabla y+\nabla h)dx - \int_D f(x,y,\nabla y)dx = \sum_{k=0}^{p}\int_D \Delta_k dx, \tag{3.5}$$

где

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l R_k(x,y+h,\nabla y+\nabla h)(\nabla y)^l(\nabla h)^{k-l} +$$
$$+[R_k(x,y+h,\nabla y+\nabla h)-R_k(x,y,\nabla y)](\nabla y)^k. \tag{3.6}$$

Преобразуем последнее выражение учитывая, что

$$R_k(x,y+u_1,z+u_2)-R_k(x,y,z)=$$
$$=\nabla_{xy}R_k(x,y,z)\cdot(u_1,u_2)+r_k(x,y,z;u_1,u_2)\cdot(u_1,u_2), \tag{3.7}$$

где $\|r_k(x,y,z;u_1,u_2)\|\to 0$ при $\|(u_1,u_2)\|\to 0$ равномерно по $(x,y{+}u_1,z{+}u_2)\in T^{y,\Delta}$.

Таким образом подставляя (3.7) в (3.6) и выделяя в (3.6) последний член суммы (при $k\ge 2$), получаем:

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2}\underbrace{C_k^l R_k(x,y+h,\nabla y+\nabla h)(\nabla y)^l(\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$
$$+\underbrace{k[R_k(x,y+h,\nabla y+\nabla h)-R_k(x,y,\nabla y)](\nabla y)^{k-1}(\nabla h)}_{B_k} +$$
$$+\underbrace{\nabla_{xy}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{C_k}+\underbrace{r_k(x,y,\nabla y;h,\nabla h)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{D_k}+$$
$$+\underbrace{kR_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)}_{E_k}. \tag{3.8}$$

Теперь дадим оценку интегралов от каждого из слагаемых в этом выражении.

2) Используем оценку (2.15) для интегралов от A_{kl} $\quad (l=\overline{0,k-2})$ полученную в нашем доказательстве теоремы о K-непрерывности:

$$\left|\int\limits_D\left(\sum_{l=0}^{k-2}A_{kl}\right)dx\right| \le \sum_{l=0}^{k-2}C_k^l\cdot M_{k0}\cdot\int\limits_D(\|\nabla y\|_{W^{1,p}})^l\cdot(\|\nabla h\|_{W^{1,p}})^{k-l}dx. \tag{3.9}$$

Применяя к интегралам справа в (3.9) неравенство Гельдера–Минковского при $p_{kl} = \frac{p}{k-l}$, получаем:

$$\left|\int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-2} A_{kl}\right) dx\right| \le \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot \left(\int\limits_D \|\nabla h\|^p\right)^{\frac{k-l}{p}} \cdot \left(\int\limits_D \|\nabla y\|\right)^{\frac{p-k+l}{p}} \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot (N_{kl}^p)^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l}, \tag{3.10}$$

где N_{kl}^p — константы, связывающие соболевские нормы (с учетом $\frac{lp}{p-k+l}$):

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}} \le N_{kl}^p \cdot \|y\|_{W^{1,p}}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) следует

$$\left|\sum_{l=0}^{k-2} \int\limits_D A_{kl} dx\right| = o\left(\|h\|_{W^{1,p}}\right) \qquad \text{при} \|h\|_{W^{1,p}} \to 0,\ h \in C_\Delta. \tag{3.12}$$

3) Проведем оценку интеграла от B_k в (3.8) с помощью основной леммы. Имеем, прежде всего:

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| \le k \cdot \int\limits_D \| \overbrace{R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h) - R_k(x, y, \nabla y)}^{\Delta R_k} \| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\| dx.$$

Это позволяет, в рамках леммы 1, положить

$$\varphi(x; u) = \|R_k(x, y(x)+u_1, \nabla y+u_2) - R_k(x, y, \nabla y)\| \cdot \|u_2\|, \quad (u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n = F_1)$$

$$\psi(x) = k \cdot \|\nabla y(x)\|^{k-1}.$$

Проверим выполнение условий основной леммы.

i) В силу равномерной непрерывности R_k на множестве $T^{y,\Delta}$,

$$\varphi(x; u) = o(\|u_2\|) = o(\|(u_1, u_2)\|) \quad \text{при} \quad \|u\| = \|(u_1, u_2)\| \to 0$$

равномерно по $x \in D$, $u \in J(C_\Delta)$.

ii) Функция $\psi = k \cdot \|\nabla y(x)\|^{k-1} \in L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду $\nabla y \in L_p$ и $k - 1 \le p$.

iii) Отображение (далее $\widetilde{h} = (h, \nabla h) \in J(C_\Delta)$)

$$\chi(\widetilde{h}) = \|R_k(\cdot, y+h, \nabla y + \nabla h) - R_k(\cdot, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\|$$

— непрерывное отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D,\mathbb{R})$, ввиду непрерывности и ограниченности R_k, непрерывности отображения $\widetilde{h} \mapsto \|\nabla h\|$ и суммируемости произведения $\|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\|$. Таким образом, основная лемма 1 применима, откуда

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| \le \int\limits_D \varphi(x,\widetilde{h}) \cdot \psi(x) dx = k \int\limits_D \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\| dx =$$

$$= o(\|(h,\nabla h)\|_{L_p}) = o(\|h\|_{W^{1,p}}) \tag{3.13}$$

при $\|h\|_{W^{1,p}} \to 0$, $h \in C_\Delta$.

4) Теперь проведем оценку интеграла от C_k в (3.8) с помощью неравенства Гёльдера-Минковского. Имеем, используя оценку (3.3):

$$\left|\int\limits_D C_k dx\right| \le \int\limits_D |\nabla_{yz} R_k(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k dx \le M_{k1} \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^k dx \le$$

$$\le M_{k1} \cdot (mesD)^{\frac{p-k}{p}} \cdot (\|\nabla y\|_{L_p})^k \le [M_{k1} \cdot mesD]^{\frac{p-k}{p}} \cdot (\|y\|_{W^1,p})^k < \infty.$$

Таким образом, $\int\limits_D C_k dx$ — ограниченный линейный функционал от h на подпространстве $span(C_\Delta)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{C_\Delta}$. В силу произвольности выбора $C_\Delta \in \mathcal{C}(W^{1,p}(D))$, это означает K-непрерывность функционала $\int\limits_D C_k dx$, что, ввиду его линейности, равносильно его обычной непрерывности в пространстве $W^{1,p}(D)$.

5) Проведем оценку интеграла от $\int\limits_D E_k dx$ в (3.8) с помощью основной леммы 1. Имеем, прежде всего:

$$\left|\int\limits_D D_k dx\right| \le \int\limits_D |r_k(x,y,\nabla y; h,\nabla h) \cdot (h,\nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k dx\,.$$

Заметим также, что ввиду непрерывной дифференцируемости R_k и компактности C_Δ,

$$|r_k(x,y,\nabla y; h,\nabla h)| = o(\|(h,\nabla h)\|) \tag{3.14}$$

равномерно по $x \in D$. Это позволяет, в рамках леммы , положить

$$\varphi(x;u) = |r_k(x,y,\nabla y; u_1,u_2) \cdot (u_1,u_2)|, \quad (u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \times = F_1)\,,$$

$$\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^k\,.$$

Проверим выполнение основной леммы.

i) Из оценки (3.14) следует непосредственно

$$\varphi(x;u) = o(\|u\|) \quad \text{при} \quad \|u\| \to 0$$

равномерно по $x \in D$.

$ii)$ Функция $\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^k \in L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду $\nabla y \in L_p$ и $k \leq p$.

$iii)$ При $\widetilde{h} = (h, \nabla h) \in J(C_\Delta)$ отображение

$$\chi(\widetilde{h}) = |r_k(\cdot, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k \tag{3.15}$$

— непрерывное отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду непрерывности и ограниченности первого сомножителя справа в (3.15) и суммируемости второго множителя. Таким образом, основная лемма 1 применима, откуда

$$\left|\int\limits_D D_k dx\right| \leq \int\limits_D \varphi(x, \widetilde{h}) \cdot \psi(x) dx = \int\limits_D |r_k(x, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h)| \cdot \|\nabla y\|^k dx =$$

$$= o(\|(h, \nabla h)\|_{L_p}) = o(\|h\|_{W^{1,p}}) \tag{3.16}$$

при $\|h\|_{W^{1,p}} \to 0$, $h \in C_\Delta$.

6) Наконец, оценим интеграл от E_k в (3.8), используя первую оценку в (3.4) и неравенство Гельдера-Минковского. Имеем, учитывая $\|\nabla h\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \in L_1$:

$$\left|\int\limits_D E_k dx\right| \leq k \int\limits_D \|R_k(x, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \|\nabla h\| dx \leq k \cdot M_{k0} \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^{k-1} \|\nabla h\| dx \leq$$

$$\leq k \cdot M_{k0} \cdot \|\nabla h\|_{L_p} \left(\|\nabla y\|\right)^{k-1} \leq \left[k \cdot M_{k0} \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\right] \cdot \|h\|_{W^{1,p}}.$$

Таким образом, $\int\limits_D E_k dx$ — ограниченный линейный функционал от h на подпространстве $span(C_\Delta)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$, и тем более, относительно нормы $\|\cdot\|_{C_\Delta}$. Отсюда, аналогично п.4) доказательства, вытекает K-непрерывность функционала $\int\limits_D E_k dx$, что ввиду его линейности равносильно его обычной непрерывности в пространстве $W^{1,p}(D)$.

7) Итак, из полученных оценок (3.12)–(3.16) и результатов пунктов 4), 6) доказательства вытекает

$$\Phi(y + h) - \Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Delta_k dx =$$

$$= \int\limits_D \left(\sum_{k=0}^{p} \left[\nabla_{yz} R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k dx + k \cdot R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h\right]\right) dx +$$

$$+ o(\|h\|_{W^{1,}}), \tag{3.17}$$

где интегральный функционал справа в (3.17) непрерывен. Поскольку, ввиду компактности C_Δ, норма $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ мажорирует норму $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ в $span(C_\Delta)$, то малый член справа в (3.17) есть $o(\|h\|_{C_\Delta})$.

Поэтому, суммируя равенства (3.17) по $k = \overline{0,p}$, мы приходим к K-дифференцируемости Φ и равенству (3.2):

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \Bigg(\sum_{k=0}^{p} \Big[\nabla_{yz} R_k(x,y,\nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k dx +$$

$$+ k \cdot R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h \Big] \Bigg) dx\,. \tag{3.18}$$

8) Покажем, наконец, что равенство (3.18) можно преобразовать к стандартному виду (3.1). Из K-псевдополиномиального представления (3.3) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h = \frac{\partial R_0}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y) \cdot h \cdot (\nabla y)^k\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h = \frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y) \cdot \nabla h \cdot (\nabla y)^k + k \cdot R_k(x,y,\nabla y) \cdot \nabla h \cdot (\nabla y)^{k-1} \right];$$

отсюда следует :

$$\nabla_{yz} f(x,y,\nabla y)(h,\nabla h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h =$$

$$= \left[\frac{\partial R_0}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h \right] + \sum_{k=1}^{p} \Bigg[\Big(\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y) \cdot h \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+ \frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y) \cdot \nabla h \cdot (\nabla y)^k \Big) + k \cdot R_k(x,y,\nabla y) \cdot \nabla h \cdot (\nabla y)^{k-1} \Bigg] = \nabla R_0(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \left[\nabla R_k(x,y,\nabla y)(h,\nabla h) \cdot (\nabla y)^k + k \cdot R_k(x,y,\nabla y) \cdot \nabla h \cdot (\nabla y)^{k-1} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \left[\nabla R_k(x,y,\nabla y) \cdot (h,\nabla h) \cdot (\nabla y)^k + k \cdot R_k(x,y,\nabla y) \cdot \nabla h \cdot (\nabla y)^{k-1} \right],$$

что совпадает с подинтегральным выражением в (3.18).

Теорема доказана. Случай $p = 1$ может быть рассмотрен аналогичным образом. □

4. Классы Вейерштрасса $W^n K_p(z)$. Условия кратной K-дифференцируемости вариационных функционалов функций многих переменных

Для перехода к K-производным высших порядков вариационных функционалов нам понадобится соответствующее обобщение классов Вейерштрасса.

Определение 5. Пусть, в обозначениях определения 2, функционал $f : D_x \times D_y \times D_z \longrightarrow \mathbb{R}$ является K-псевдополиномом порядка $p : f \in K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, причем $f \in C^n(D_x \times D_y \times D_z)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Скажем, что f принадлежит классу Вейерштрасса $W^n K_p(z)$, если возможно такое K-псевдополиномиальное представ-ление f:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z) \cdot (z)^k \qquad (R_k : D_x \times D_y \times D_z \longrightarrow Z_k^*)\,, \tag{4.1}$$

для всех коэффициентов R_k которого джеты n–го порядка по y, z

$$(R_k, \nabla_{yz} R_k, \ldots \nabla_{yz}^n R_k) \qquad (k = \overline{0, p}) \tag{4.2}$$

принадлежат классу Вейерштрасса $W_K(z)$. В этом случае примем обозначение: $R_k \in W_K^n(z)$.

Другими словами, коэффициенты $R_k(x, y, z)$ представления (4.1) принадлежат пространству отображений доминантной по x, y смешанной гладкости n-го порядка. Более подробно: для любых компактов $C_x \subset D_x$, $C_y \subset D_y$ джеты (4.2) равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$.

Замечание 3. Очевидно, $W^o K_p(z) = W K_p(z)$, $W^n K_p(z) \subset W^{n-1} K_p(z)$; $W_K^o(z) = W_K(z)$, $W_K^n(z) \subset W_K^{n-1}(z)$. Кроме того, в определении 5, аналогично случаю классов $W K_p(z)$ и $W^1 K_p(z)$, можно ограничиться вейерштрассовскими псевдополиномами вида

$$f(x, y, z) = R_0(x, y, z) + R_p(x, y, z) \cdot (z)^p \qquad (R_0, R_p \in W_K^n(z))\,.$$

Приведем простейший пример (обобщающий пример 6) интегранта класса $W^n K_p(z)$.

Пример 10. Пусть $f(z) = R_p(z) \cdot (z)^p$, $z \in \mathbb{R}^m$, причем $R_p \in C^n$, и

$$\lim_{z\to\infty} R_p(z) = \lim_{z\to\infty} R_p'(z) = \ldots = \lim_{z\to\infty} R_p^{(n)}(z) = 0\,. \tag{4.3}$$

Тогда $R_p, R_p'(z), \ldots R_p^{(n)}(z)$ — непрерывные отображения с нулевыми пределами на бесконечности, откуда следует их равномерная непрерывность и ограниченность глобально по z. Следовательно, $f \in W^n K_p(z)$. В частности, любая быстро убывающая функция $R_p \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условиям (4.3). Очевидное обобщение:

$$f(x, y, z) = R_p(x, y, z) \cdot (z)^p, \quad (z \in \mathbb{R}^m,\, h \in \mathbb{N})\,,$$

где $R_p \in C^n$ и $\lim\limits_{z\to\infty} R_p(x, y, z) = \lim\limits_{z\to 0} \nabla_{yz} R_p(x, y, z) = \ldots = \lim\limits_{z\to 0} \nabla_{yz}^n R_p(x, y, z) = 0$ доминантно по x, y.

Нетрудно также обобщить на данный случай примеры предыдущего пункта. Рассмотрим примеры интегрантов класса $W^n K_p(z)$.

Пример 11. Пусть

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p} R_k(x,y)(z)^k\,, \quad \text{где} \quad R_k\in C^n_{xy} \quad (k=\overline{0,p}).$$

Тогда независимость $\nabla^m_{yz}R_k\,(m=\overline{0,n})$ от z автоматически влечет $R_k\in W^n_K(z)$, откуда $f\in W^nK_p(z)$.

Обобщим предыдущий пример:

Пример 12. Пусть

$$f(x,y,z)=\sum_{k\in\chi} R_k(x,y)(z)^k+\sum_{k'\in\chi'} R_k(x,y,z)(z')^k, \qquad (\chi\dot{\cup}\chi'=\overline{0,p})$$

где $R_k\in C^n_{xy}$ при $k\in\chi$, $R'_k\in W^n_K(z)$ при $k'\in\chi'$.Тогда $f\in W^nK_p(z)$.

Пример 13. Пусть

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}\varphi_k\overbrace{(r_k(x,y,z))}^{t}(z)^k \quad (\varphi_k\in C^n_t, \quad r_k\in W^n_K(z))\ .$$

Тогда, очевидно, $R_k=\varphi_k(r_k)\in W_K(z)$.

Далее, как известно, формула производной m-го порядка от композиции имеет вид

$$\varphi(\psi)^{(m)}=\sum_{l_0=\overline{0,m};l_1+\ldots l_m=m} a_{l_0l_1\ldots l_m}\cdot\varphi^{(l_0)}(\psi)\cdot\left[(\psi')^{l_1}\cdot(\psi'')^{l_2}\ldots(\psi^m)^{l_m}\right] \qquad (l_i\in\mathbb{N}_0).$$

Отсюда

$$\nabla^m_{yz}R_k=\sum_{l_0=\overline{0,m};l_1+\ldots l_m=m} a_{l_0l_1\ldots l_m}\cdot\varphi^{(m)}_k(r_k(x,y,z))\cdot\left[\prod_{s=1}^{m}\left(\nabla^s_{yz}r_k(x,y,z)\right)^{l_s}\right]. \qquad (4.4)$$

Поскольку $\varphi^{(m)}_k(r_k)\in W_K(z)$ и $\nabla^s_{yz}r_k\in W_K(z)$, то из (4.4) следует $\nabla^m_{yz}R_k\in W_K(z)$ при $m=\overline{0,n}$, т.е. $R_k\in W^n_K(z)\,(k=\overline{0,p})$, откуда $f\in W^nK_p(z)$.

Пример 14. Отметим еще один очевидный пример: пусть $f(x,y,z)=R_p(x,y,z)\cdot(z)^p$, где $R_p\in C^n_{xyz}$ и отображение R_p периодично по z (с периодом, не зависящим от x,y). Тогда также $f\in W^nK_p(z)$.

Покажем теперь, что попадание интегранта в класс Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ гарантирует n-кратную K-дифференцируемость основного вариационного функционала.

Теорема 5. *Пусть интегрант f вариационного функционала (1.5) принадлежит классу Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ ($n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$). Тогда функционал Эйлера–Лагранжа (1.5) n раз K-дифференцируем всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$. При этом справедлива формула n-ой вариации:*

$$\Phi_K^{(n)}(y) \cdot (h_1, \dots h_n) =$$

$$= \int\limits_D \left[\sum_{l=0}^{n} \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l} \partial z^l}(x, y, \nabla y) \cdot \left(\sum_{i=(i_1,\dots i_n):|i|=l} \left(h_1^{(i_1)}, h_2^{(i_2)}, \dots, h_n^{(i_n)} \right) \right) \right] dx. \quad (4.5)$$

В частности, на диагонали $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = h$ K-производная $\Phi_K^{(n)}(y)$ принимает вид:

$$\Phi_K^{(n)}(y) \cdot (h)^n = \int\limits_D \left[\sum_{l=0}^{n} C_n^l \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l} \partial z^l}(x, y, \nabla y) \cdot (h)^{n-l} (h)^l \right] dx. \quad (4.6)$$

При этом подстановка в (4.6) K-псевдополиномиального представления (1.2) приводит к формуле:

$$\Phi_K^{(n)}(y) \cdot (h)^n = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Big[\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l \Big(\nabla_{yz} R_k^{n-1-l,l}(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+ k \cdot R_k^{n-1-l,l}(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla h) \cdot (\nabla y)^{k-1} \Big) \cdot (h)^{n-1-l} \cdot (\nabla h)^l \Big] dx\,. \quad (4.7)$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции.

При $n = 1$ формула (4.5) приводит к уже доказанной ранее формуле первой K-вариации (3.1) с её K-псевдополиномиальным вариантом (3.2)

$$\Phi'_K(y)h = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Big[\nabla_{y,z} R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+ k \cdot R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h \Big] dx = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Big[\Big(\frac{\partial R_k}{\partial y}(x, y, \nabla y) \cdot (h) \cdot (\nabla y)^k +$$

$$+ \frac{\partial R_k}{\partial z}(x, y, \nabla y) \cdot (h) \cdot (\nabla y)^k \Big) + k \cdot R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h \Big] dx\,.$$

Допустим, по предложению индукции, что при заданном n формула (4.7) в условиях теоремы доказана, и докажем аналогичное равенство для порядка $n + 1$, в предположении, что $f \in W^{n+1}K_p(z)$. Напомним, что симметричная n-форма однозначно восстанавливается (с сохранением непрерывности) по своему значению на диагонали.

1) Как и в доказательстве теоремы 4, фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт C_Δ в данном пространстве. При этом, согласно предположению $f \in W^{n+1}K_p(z)$, джеты $(n+1)$-ого порядка по (y,z) коэффициентов $R_k : T = D_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to (\mathbb{R}^n_z)^*$

$$\left(R_k, \nabla_{yz} R_k, \dots \nabla^{n+1}_{yz} R_k\right) \qquad (k = \overline{0,p}) \tag{4.8}$$

равномерно непрерывны и ограничены в T локально компактно по x,y и глобально по z.

Как уже отмечалось ранее (в доказательствах теорем 2 и 4), в силу компактности множества $y + C_\Delta$, числовое множество

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y+h)(D)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T^{y,\Delta} = D \times K^{y,\Delta} \times \mathbb{R}^n_z$, $(T^\Delta := T^{0,\Delta})$ все джеты (4.8) ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки:

$$\left\| \frac{\partial^{s+t} R_k}{\partial y^s \partial z^t}(x,y,z) \cdot (h)^s \cdot (\nabla h)^t \right\| \le M^k_{st} < \infty$$
$$((x,y,z) \in T^{y,\Delta},\ h \in C_\Delta,\ s+t \le n+1,\ k = \overline{0,p})\,. \tag{4.9}$$

2) Отметим, до начала основного преобразования, еще одно важное свойство классов Вейерштрасса:

$$\text{если} f \in W^n K_p(z)\,, \quad \text{то} \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l} \partial z^l} \in W^{n-l} K_p(z)\,.$$

Действительно, используя формулу Лейбница, имеем:

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l} \partial z^l}(x,y,z) = \frac{\partial^l}{\partial z^l}\left[\frac{\partial^{n-l}}{\partial y^{n-l}}\left(\sum_{k=0}^p R_k(x,y,z)\cdot(z)^k\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\sum_{k=0}^p \frac{\partial^{n-l} R_k}{\partial y^{n-l}}(x,y,z)\cdot(z)^k\right) = \sum_{k=0}^p \frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{\partial^{n-l} R_k}{\partial y^{n-l}}(x,y,z)\cdot(z)^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^l C^m_l \cdot k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-m+1) \cdot \frac{\partial^{n-m} R_k}{\partial y^{n-l} \partial z^{l-m}}(x,y,z)\cdot(z)^{k-m}\,,$$

откуда перегруппировкой слагаемых по степеням z приходим к выражению вида:

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l} \partial z^l}(x,y,z) = \sum_{k=0}^p R^{n-l,l}_k(x,y,z)\cdot(z)^k, \quad \text{где} \quad R^{n-l,l}_k \in W^{n-l}_K(z)\,(k = \overline{0,p})\,. \tag{4.10}$$

При этом из оценок (4.9) следуют оценки

$$\|R^{n-l,l}_k(x,y,z)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\| \le M^{k0}_{n-l,l} < \infty\,,$$

$$\|\nabla R_k^{n-l,l}(x,y,z)\cdot(h,\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\| \le M_{n-l,l}^{k1} < \infty\,,$$
$$((x,y,z)\in T^{y,\Delta},\ h\in C_\Delta,\ 0\le l\le n,\ k=\overline{0,p})\,. \tag{4.11}$$

3) Используя предположения индукции и представление (4.5), запишем приращение функционала $\Phi_K^{(n)}(y)$ на диагональном поливекторе $(h)^n$ в виде:

$$\Big[\Phi_K^{(n)}(y+h)-\Phi_K^{(n)}(y)\Big]\cdot(h)^n =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_n^l \cdot \int\limits_D \overbrace{\left[\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)-\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\right](h)^{n-l}(\nabla h)^l}^{\Delta(f^{n-l,l})}\,dx\,. \tag{4.12}$$

Преобразуем выражения под знаком интегралов справа в (4.12), используя представление (4.11) и разложение на главную и малую часть:

$$R_k^{n-l,l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)-R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)=$$
$$=\nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)+\nabla r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y;h,\nabla h)\cdot(h,\nabla h)\,,$$

где ∇ — градиент по переменным y, z. Имеем:

$$\Delta(f^{n-l,l}) = \sum_{k=0}^{p}\Delta\Big(R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k\Big)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l =$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\Big[R_k^{n-l,l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)\cdot\left((\nabla y)^k+k(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)+\sum_{m=0}^{k-2}C_k^m(\nabla y)^m(\nabla h)^{k-m}\right)-$$
$$-R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k\Big]\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\Big[\nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k+\nabla r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y;h,\nabla h)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k+$$
$$+k\cdot\Delta R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)+k\cdot r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)+$$
$$+R_k^{n-l,l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)\cdot C_k^m(\nabla y)^m(\nabla h)^{k-m}\Big]\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\Big[\overbrace{\nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l}^{A_{kl}}+$$
$$+\overbrace{k\cdot R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)^{l+1}(h)^{n-l}}^{B_{kl}}\Big]+$$

$$+\sum_{k=0}^{p}\Big[\overbrace{k\cdot\Delta R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)^{l+1}(h)^{n-l}}^{C_{kl}}+$$

$$+\overbrace{\nabla r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y;h,\nabla h)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h)^l(h)^{n-l}}^{D_{kl}}+$$

$$+\sum_{m=0}^{k-2}\overbrace{C_k^m R_k^{n-l,l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)(h)^{n-l}(\nabla h)^{l+k-m}(\nabla y)^m}^{E_{klm}}\Big]. \tag{4.13}$$

Здесь в первых скобках справа собраны главные члены разложения — A_{kl}, B_{kl}, во вторых — малые члены разложения — C_{kl}, D_{kl}, E_{klm}. Оценим интегралы от каждого из слагаемых.

4) Вначале оценим интегралы от A_{kl}, B_{kl}.

a) Заметим, что функционал от h

$$\int\limits_D A_{kl}dx=\int\limits_D \nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l dx$$

— однородный $(n+1)$-го порядка. Проверим его непрерывность, используя оценки (4.11) и неравенство Гельдера-Минковского (поскольку $\|\nabla y\|^k\in L_1$ при $k\le p$):

$$\left|\int\limits_D A_{kl}dx\right|\le\int\limits_D\left\|\nabla R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\right\|\cdot\|\nabla y\|^k dx\le$$

$$\le M_{n-l,l}^{k1}\cdot\int\limits_D\|\nabla y\|^k dx\le[M_{n-l,l}^{k1}\cdot(mesD)^{\frac{p-k}{p}}]\cdot(\|y\|_{W^{1,p}})^k \qquad \text{при}\, h\in C_\Delta\,,$$

откуда следует ограниченность данного функционала на подпространстве $span(C_\Delta)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{C_\Delta}$. В силу произвольности выбора $C_\Delta\in\mathfrak{C}(W^{1,p}(D)$ это означает K-непрерывность функционала, а ввиду его однородности — непрерывность данного функционала в $W^{1,p}$.

b) Аналогичным образом оценивается однородный функционал от h $(n+1)$-го порядка

$$\int\limits_D B_{kl}\,dx=k\cdot\int\limits_D R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)^{l+1}(h)^{n-l}dx\,.$$

Имеем:

$$\left|\int\limits_D B_{kl}dx\right|\le k\cdot\int\limits_D\left\|R_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)^l(h)^{n-l}\right\|\cdot\|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\|dx\le$$

$$\le k\cdot M_{n-l,l}^{k0}\cdot\int\limits_D\|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\|dx\le k\cdot M_{n-l,l}^{k0}\cdot\|\nabla h\|_{L_p}\cdot(\|\nabla y\|_{L_{\frac{(k-1)p}{p-1}}})^{k-1}\le$$

$$\leq \left[k \cdot M^{k0}_{n-l,l} \cdot \|\nabla y\|_{W^{1,\frac{(k-1)p}{p-1}}} \right] \cdot \|\nabla h\|_{W^{1,p}}\,,$$

откуда следует непрерывность по норме $\|\cdot\|_{W^{1,}}$, а значит, и непрерывность по норме $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ в подпространстве $span(C_\Delta)$. Повторяя рассуждения п.а), приходим к непрерывности данного функционала в $W^{1,p}(D)$.

5) Приступим к оценке интегралов от малых членов разложения C_{kl}, D_{kl}, E_{klm} . Здесь мы будем опираться на основную лемму 1.

а) Оценка

$$\left| \int\limits_D C_{kl} dx \right| \leq k \cdot \int\limits_D \left(\|\Delta R^{n-l,l}_k(x, y, \nabla y)\|(h, \nabla h)\| \cdot \|\nabla h\|^l \cdot \|\nabla h\| \cdot \|h\|^{n-l} \right) \|\nabla y\|^{k-1} dx$$

позволяет в рамках леммы, использовать функции

$$\varphi(x; u) = \|\Delta R^{n-l,l}_k(x, \overbrace{(u_1, u_2)}^{u}) \cdot (u_1)^{n-l} \cdot (u_2)^l\| \cdot \|u_2\|, \qquad ((u_1, u_2) \in \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z = F_1)$$

$$\psi = \|\nabla y\|^{k-1} \in L_1(D, \mathbb{R})\,.$$

Проверим выполнение условий $i)$–$iii)$ леммы 1 для φ, ψ .

$i)$ Ввиду равномерной непрерывности $R^{n-l,l}_k$ на $T^{y,\Delta}$,

$$\|\Delta R^{n-l,l}_k(x, u)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|u\| \to 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in D\,.$$

Поэтому из оценки

$$\varphi(x; u) \leq \|\Delta R^{n-l,l}_k(x, u)\| \cdot \|u_1\|^{n-l} \cdot \|u_2\|^{l+1}\| \leq \|\Delta R^{n-l,l}_k(x, u)\| \cdot \|\overbrace{u_1, u_2}^{u}\|^{n+1}$$

следует

$$\varphi(x; u) = o(\|u^{n+1}\|) \quad \text{при} \quad \|u\| \to 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in D\,.$$

$ii)$ Функция $\psi = \|\nabla y(x)\|^{k-1} \in L_1$, поскольку $\nabla y \in L_p$ и $k - 1 \leq p$.

$iii)$ Отображение

$\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot; (h, \nabla h)) \cdot \psi =$

$$= \|(R^{n-l,l}_k(\cdot, y + h, \nabla y + \nabla h) - R^{n-l,l}_k(\cdot, y, \nabla y)) \cdot (h)^{n-l} \cdot (\nabla h)^l\| \cdot (\|\nabla h\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1})\,,$$

очевидно, есть непрерывное отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду непрерывности по h и ограниченности на C_Δ первого множителя и суммируемости второго множителя (вытекающей из $\|\nabla y\|, \|\nabla h\| \in L_p$; $1 + (k - 1) = k \leq p$).

Таким образом, основная лемма 1 применима, откуда при $h \in C_\Delta$:

$$\left| \int\limits_D C_{kl} dx \right| \leq \int\limits_D \varphi(x; (h, \nabla h)) \cdot \psi(x) dx = o\left((\|(h, \nabla h)\|_{L_p})^{n+1} \right) = o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1} \right)\,. \tag{4.14}$$

b) Оценка

$$\left|\int\limits_D D_{kl}dx\right| \le \int\limits_D \|\nabla r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y;h,\nabla h)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla h)^l(h)^{n-l}\|\cdot\|\nabla y\|^k dx$$

позволяет, в рамках леммы, использовать функции

$$\varphi(x;u) = \|\nabla r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y;\overbrace{(u_1,u_2)}^{u})\cdot(u_1,u_2)\cdot(u_2)^l(u_1)^{n-l}\| \quad (u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n = F_1),$$

$$\psi = \|\nabla y\|^k.$$

Проверим выполнение условий $i)$–$iii)$ леммы 1 для φ,ψ.

$i)$ Ввиду равномерной непрерывности $\nabla r_k^{n-l,l}$ на $T^{y,\Delta}$, оценка

$$\varphi(x;u) \le \|\overbrace{\nabla r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y,u)}^{o(1)}\|\cdot\|(u_1,u_2)\|\cdot\|u_1\|^{n-l}\cdot\|u_2\|^l\|$$
$$\le \|\nabla r_k^{n-l,l}(x,y,\nabla y,u)\|\cdot\|u\|^{n+1} = o(\|u\|^{n+1})$$

равномерно по $x\in D$ показывает выполнения условия $i)$.

$ii)$ Функция $\psi=\|\nabla y(x)\|^k\in L_1$, поскольку $\nabla y\in L_p$ и $k\le p$.

$iii)$ Отображение

$$\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot\,;(h,\nabla h))\cdot\psi = \|\nabla r_k^{n-l,l}(\cdot,y,\nabla y;h,\nabla h)\cdot(h,\nabla h)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\|\cdot\|\nabla y\|^k,$$

очевидно, есть непрерывное отображение из $J(C_\Delta)$ в $L_1(D,\mathbb{R})$, ввиду непрерывности по h и ограниченности на C_Δ первого множителя и суммируемости второго множителя.

Таким образом, основная лемма 1 применима, откуда при $h\in C_\Delta$:

$$\left|\int\limits_D D_{kl}dx\right| \le \int\limits_D \varphi(x;(h,\nabla h))\cdot\psi(x)dx = o\left((\|(h,\nabla h)\|_{L_p})^{n+1}\right) = o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1}\right). \tag{4.15}$$

c) Оценка

$$\left|\int\limits_D E_{klm}dx\right| \le C_k^m\cdot\int\limits_D \|R_k^{n-l,l}(x,y+h,\nabla y+\nabla h)(h)^{n-l}(\nabla h)^l\|\cdot\|\nabla h\|^{k-m}\cdot\|\nabla y\|^m dx$$

позволяет, в рамках леммы, использовать функции

$$\varphi(x;u) = \|R_k^{n-l,l}(x,y+u_1,\nabla y+u_2)(u_1)^{n-l}(u_2)^l\|\cdot\|u_2\|^{k-m},$$

$$(u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n = F_1),\ \ \psi(x) = \|\nabla y(x)\|^m\in L_1(D,\mathbb{R}).$$

Проверим выполнение условий $i)$–$iii)$ леммы 1 для φ, ψ .

$i)$ Используя оценку (4.11) для $R_k^{n-l,l}$ на $T^{y,\Delta}$, получаем

$$\varphi(x;u) = \leq \|R_k^{n-l,l}(x, y+u_1, \nabla y + u_2)\| \cdot \|(u_1)^{n-l}\| \cdot \|(u_2)^{l+k-m}\| \leq$$

$$\leq M_{n-l,l}^{k0} \cdot (\|u_1\| + \|u_2\|)^{n+\overbrace{k-m}^{\geq 2}} = O((\|u\|)^{n+2}) = o((\|(u\|)^{n+1})$$

$$\text{при} \quad \|u\| \to 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in D\,.$$

$ii)$ Функция $\psi(x) = \|\nabla y(x)\|^m \in L_1$, поскольку $\nabla y \in L_p$ и $m \leq p$.

$iii)$ Отображение (далее $\widetilde{h} = (h, \nabla h) \in J(C_\Delta)$)

$$\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot\,; (h, \nabla h)) \cdot \psi = \|R_k^{n-l,l}(\cdot\,, y+h, \nabla y + \nabla h)(h)^{n-l}(\nabla h)^l\| \cdot \left(\|\nabla h\|^{k-m} \cdot \|\nabla y\|^m\right)\,,$$

очевидно, есть непрерывное отображение по $\widetilde{h} \in J(C_\Delta)$ в $L_1(D, \mathbb{R})$, ввиду непрерывности по $\widetilde{h}$ (вытекающей из равномерной непрерывности $R_k^{n-l,l}$ на $T^{y,\Delta}$) первого множителя и суммируемости второго множителя (вытекающей из $\nabla y, \nabla h \in L_p$ и $(k-m) + m \leq p$).

Таким образом, основная лемма 1 применима, откуда при $h \in C_\Delta$:

$$\left|\int\limits_D E_{klm} dx\right| \leq C_k^m \cdot \int\limits_D \varphi(x; (h, \nabla h)) \cdot \psi(x) dx = o\left((\|(h, \nabla h)\|_{L_p})^{n+1}\right) = o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1}\right)\,. \tag{4.16}$$

6) Итак, из разложений (4.12)–(4.13), полученных оценок (4.14)–(4.16) и результатов п.4) вытекает

$$\left(\Phi_K^{(n)}(y+h) - \Phi_K^{(n)}(y)\right) \cdot (h)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \cdot \int\limits_D \left(\sum_{k=0}^{p} \left[\nabla R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k + \right.\right.$$

$$\left.\left. + k R_k^{n-l,l}(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\right] \cdot (h)^{n-l} \cdot (\nabla h)^l\right) dx + o\left((\|h\|_{W^{1,p}})^{n+1}\right)\,, \tag{4.17}$$

где интегральный функционал справа в (4.17) непрерывен.

Поскольку, ввиду компактности C_Δ , норма $\|\cdot\|_{C_\Delta}$ мажорирует норму $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ в $span(C_\Delta)$, то малый член справа в (4.17) есть $o\,((\|h\|_{C_\Delta})^{n+1})$. Таким образом, мы приходим к $(n+1)$-кратной K-дифференцируемости Φ и равенству:

$$\Phi_K^{(n+1)}(y) \cdot (h)^{n+1} = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \int\limits_D \left(\sum_{k=0}^{p} \left[\nabla R_k^{n-1-l,l}(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k + \right.\right.$$

$$\left.\left. + k \cdot R_k^{n-1-l,l}(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla h) \cdot (\nabla y)^{k-1}\right] \cdot (h)^{n-l} \cdot (\nabla h)^l\right) dx\,. \tag{4.18}$$

7) Покажем, наконец, что равенство (4.18) можно преобразовать к виду (4.6) (при переходе $n \mapsto n+1$).

a) Докажем вначале равенство:

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h) + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n-l}\partial z^{l+1}}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\left[\nabla R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k + k\cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)\cdot(\nabla y)^{k-1}\right]. \tag{4.19}$$

Имеем:

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}\right)(x,y,\nabla y)\cdot(h) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{k=0}^{p} R_k^{n-1-l,l}(x,y,z)\cdot(z)^k\right)\Big|_{z=\nabla y}(h) = \sum_{k=0}^{p}\frac{\partial R_k^{n-1-l,l}}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(h)\cdot(\nabla y)^k. \tag{4.20}$$

Аналогичным образом,

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n-l}\partial z^{l+1}}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}\right)(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k=0}^{p} R_k^{n-1-l,l}(x,y,z)\cdot(z)^k\right)\Big|_{z=\nabla y}(\nabla h) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{p}\left[\frac{\partial R_k^{n-1-l,l}}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(z)^k + k\cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(z)^{k-1}\right]\Big|_{z=\nabla y}\right)\cdot(\nabla h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\Big[\frac{\partial R_k^{n-1-l,l}}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k\cdot(\nabla h) +$$

$$+ k\cdot R_k^{n-1-l,l}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot(\nabla h)\Big]. \tag{4.21}$$

Складывая почленно равенства (4.20) и (4.21), получаем (4.19).

b) Теперь пользуясь равенствами (4.19), преобразуем правую часть (4.18). Имеем:

$$\Phi_K^{(n+1)}(y)\cdot(h)^{n+1} = \int\limits_D \Big(\sum_{l=0}^{n} C_n^l\Big[\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h) +$$

$$+ \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n-l}\partial z^{l+1}}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla h)\Big]\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\Big)dx =$$

$$= \sum_{l=0}^{n}\int\limits_D C_n^l\cdot\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h)^{n+1-l}(\nabla h)^l dx +$$

$$+\int\limits_D C_n^l\cdot\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{(n+1)-(l+1)}\partial z^{l+1}}(x,y,\nabla y)\cdot(h)^{(n+1)-(l+1)}(\nabla h)^{l+1}dx\,. \qquad (4.22)$$

Проводя, в заключение, в последних интегралах справа в (4.22) замену обозначений $(l+1)\mapsto(l)$, получаем:

$$\Phi_K^{(n+1)}(y)\cdot(h)^{n+1}=\sum_{l=0}^{n+1}(\underbrace{C_n^l+C_n^{l+1}}_{C_{n+1}^l})\cdot\int\limits_D\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h)^{(n+1)-(l)}(\nabla h)^l dx\,,$$

что соответствует формуле (4.6) при переходе от n к $n+1$. Таким образом, по индукции, формула (4.6), как и ее псевдополиномиальный вариант (4.7), доказана. $\square$

В качестве полезных примеров рассмотрим частные случаи теоремы 5 при $n=2$ и $n=3$.

Пример 15. При $n=2$ формула (4.6) принимает вид:

$$\Phi_K''(y)(h)^2=\int\limits_D\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)(h)(\nabla h)+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h)^2\Big]dx\,.$$

Соответственно, аналог равенства (4.5) принимает вид:

$$\Phi_K''(y)(h,k)=\int\limits_D\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,k)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)((\nabla h,k)+(\nabla k,h))+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla k)\Big]dx\,.$$

Пример 16. При $n=3$ формула (4.6) принимает вид:

$$\Phi_K'''(y)(h)^3=\int\limits_D\Big[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y,\nabla y)(h)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,\nabla y)(h)^2(\nabla h)+$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(x,y,\nabla y)(h)(\nabla h)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,\nabla y)(\nabla h)^3\Big]dx\,.$$

Соответственно, аналог равенства (4.5) принимает вид:

$$\Phi_K'''(y)(h,k,l)=\int\limits_D\Big[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y,\nabla y)(h,k,l)+$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,\nabla y)[(\nabla h,k,l)+(h,\nabla k,l)+(h,k,\nabla l)]+\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot$$

$$\cdot[(\nabla h,\nabla k,l)+(h,\nabla k,\nabla l)+(\nabla h,k,\nabla l)]+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla k,\nabla l)\Big]dx\,.$$

Можно получить также вариант формулы (4.6), в котором подинтегральное выражение представлено непосредственно через коэффициенты исходного K-псевдополиномиального представления f.

Замечание 4. Равенства (4.5)–(4.6) можно преобразовать к следующему виду:

$$\Phi_K^{(n)}(y)(h)^n = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Big[\sum_{l=0}^{n} C_n^l \cdot k \cdot (k-1) \ldots \cdot (k-l+1) \cdot$$

$$\cdot \nabla^{n-l} R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)^{n-l} \cdot (\nabla y)^{k-l}\Big] dx. \qquad (4.23)$$

В частности, при $n = 1$ получаем равенство (3.2), при $n = 2$ получаем равенство

$$\Phi_K''(y)(h)^2 = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Big[\nabla^2 R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)^2 (\nabla y)^k + 2k \nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^{k-1} +$$

$$+ k(k-1) R_k(x, y, \nabla y)(\nabla h)^2 (\nabla y)^{n-2}\Big] dx\,;$$

при $n = 3$ получаем равенство

$$\Phi_K'''(y)(h)^3 = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Big[\nabla^3 R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)^3 (\nabla y)^k + 3k \nabla^2 R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)^2 (\nabla y)^{k-1} +$$

$$+ 3k(k-1) \nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^{k-2} + k(k-1)(k-2) R_k(x, y, \nabla y)(\nabla y)^{n-3}\Big] dx\,.$$

Разумеется, число ненулевых слагаемых в сумме под знаком интеграла в (4.23) не превосходит k.

Выводы

Вводится понятие общих классов Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ над областью $D \subset \mathbb{R}^n$, обобщающее введенные ранее в одномерном случае И. В. Орловым и Е. В. Божонок классы Вейерштрасса $WK_p(z)\,, W^1 K_p(z)$ и $W^2 K_p(z)$. Доказано, что принадлежность K-псевдополиномиального интегранта вариационного функционала подходящему классу Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ гарантирует n–кратную K-дифференцируемость данного вариационного фунционала в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$. Вычислена n-я K-вариация вариационного функционала. Рассмотрен ряд примеров и частных случаев. Автор выражает благодарность И. В. Орлову и Е. В. Божонок за полезные обсуждения и замечания.

Список цитируемых источников

1. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

2. *Орлов И.В., Божонок Е.В.* Условия существования K–непрерывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1 // Ученые записки ТНУ. — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 121-136.
3. *Орлов И.В.* Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1: учебное пособие — Симферополь: ДИАЙПИ, 2010 — 156 с.
4. *Божонок Е.В.* Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства основного вариационного функционала в пространтсве Соболева H^1: дисс... канд.физ. -мат.наук: 01.01.02 – дифференциальные уравнения. — Симферополь, 2009. — 161 с.
5. *Orlov I.V.* Compact-analytical properties of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$ // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol.3, №2 (в печати).
6. *Schmeisser H.-J.* Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness. — Mathematical Institute, Praha, 2007. — pp.145–204.
7. *Кузьменко Е.М.* Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ // Ученые записки ТНУ, серия Физико-математические науки.Ё— 2011. — Т. 24(63), №1. — С.76–89.
8. *Богачев В.И.* Основы теории меры / Том 1 — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2003. — 544с.
9. *Кузьменко Е.М.* Условия K-дифференцируемости и повторной K-дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных // Ученые записки ТНУ, серия Физико-математические науки. — 2011. — Т. 24(63), №3. — С. 39–60.
10. *Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Магарил-Ильяев Г.Г. и др.* Оптимальное управление; под ред. Н.П.Осмоловского, В.М.Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

Получена 17.03.2012