Динамические системы, вып. 23 (2007), 87–93

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

О $*$-представлениях алгебры Темперли-Либа $TL_{A_n,\tau}$

М. В. Заводовский
Институт математики НАН Украины,
Киев 01601. *E-mail: mzv@imath.kiev.ua*

Аннотация. В настоящей заметке для $*$-алгебр Темперли-Либа, являющихся деформациями фактор-алгебр групповых алгебр симметрических групп, приведены формулы для неприводимых неэквивалентных $*$-представлений. Для этого между диаграммами Юнга, у которых не более двух столбцов, и всеми неприводимыми $*$-представлениями исследуемых алгебр устанавливается взаимно однозначное соответствие. В работе также получено описание множества параметров для которых существует не менее фиксированного числа представлений таких алгебр.

1. Введение

Ассоциативные алгебры, в частности, разделяют по свойствам их представлений в линейном пространстве. Например, если алгебра $\mathfrak{A}$ имеет конечное число неразложимых представлений в линейном пространстве, то говорят, что $\mathfrak{A}$ — алгебра конечного линейного типа, если размерности всех неразложимых представлений $\mathfrak{A}$ в линейном пространстве равномерно ограничены, то говорят, что $\mathfrak{A}$ — алгебра ограниченного линейного типа и т. д. (см., например, [8]).

Аналогично, если $*$-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет конечное число неприводимых унитарно неэквивалентных $*$-представлений, то будем говорить, что $*$-алгебра $\mathfrak{A}$ — алгебра конечного гильбертового типа (если таких $*$-представлений точно n, то будем говорить, что $\mathfrak{A}$ — алгебра гильбертового типа n), если размерности всех неприводимых $*$-представлений $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве равномерно ограничены, то говорят, что $\mathfrak{A}$ — алгебра ограниченного гильбертового типа и т. д.

Если $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_x\}$ семейство $*$-алгебр, зависящих от параметра $x \in X$, то обозначим $\Sigma_{\mathfrak{A},n} = \{x \in X \mid \mathfrak{A}_x$ имеет n унитарно неэквивалентных неприводимых $*$-представлений $\}$, а $\Sigma_{\mathfrak{A}}(n) = \{x \in X \mid \mathfrak{A}_x$ имеет не менее n унитарно неэквивалентных неприводимых $*$-представлений $\}$. Тогда $\Sigma_{\mathfrak{A}}(n) = \bigcup_{k \geq n} \Sigma_{\mathfrak{A},k}$ и

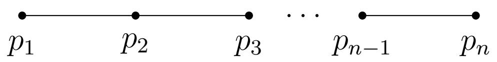
$$X \supset \Sigma_{\mathfrak{A}}(1) \supset \Sigma_{\mathfrak{A}}(2) \supset \dots \supset \Sigma_{\mathfrak{A}}(n) \supset \dots$$

В настоящей заметке для $*$-алгебр Темперли-Либа $TL_{A_n,\tau}$ (см. п. 2), зависящих от параметра $\tau \in [0,1]$, в п. 3 приведены формулы для неприводимых неэквивалентных $*$-представлений и в п. 4 приведено описание множеств $\Sigma_{A_n}(k)$.

2. Алгебры $TL_{A_n,\tau}$ $(0 \leq \tau \leq 1)$

1. Рассмотрим граф Дынкина A_n

A_n



С графом A_n ассоциируется алгебра Темперли-Либа $TL_{A_n,\tau}$, где $0 \leq \tau \leq 1$

$$TL_{A_n,\tau} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_k^2 = p_k,\ p_k p_{k\pm 1} p_k = \tau p_k,\ p_k p_j = p_j p_k,\ |k-j| \geq 2 \Big\rangle.$$

2. Рассмотрим групповую алгебру $\mathbb{C}[S_{n+1}]$ симметрической группы S_{n+1}

$$\mathbb{C}[S_{n+1}] = \mathbb{C}\Big\langle u_1, \ldots, u_n \mid u_k^2 = e,\ (u_k u_{k+1})^3 = e,\ u_k u_j = u_j u_k,\ |k-j| \geq 2 \Big\rangle.$$

Положим $p_k = \dfrac{u_k + 1}{2}$, тогда p_k — проектор. Алгебру $\mathbb{C}[S_{n+1}]$ перепишем через образующие p_k и профакторизуем по соотношениям $p_k p_{k\pm1} p_k = \frac{1}{4} p_k$. Тогда получим алгебру Темперли-Либа $TL_{A_n,\frac{1}{4}}$. Алгебра $TL_{A_n,\tau}$ является деформацией алгебры $TL_{A_n,\frac{1}{4}}$.

3. При $0 \leq \tau \leq 1$ все алгебры $TL_{A_n,\tau}$ конечномерны и имеют одинаковую размерность.

Предложение 1. $\dim TL_{A_n,\tau} = \dfrac{1}{n+2}\dbinom{2n+2}{n+1}$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Доказательство. Можно показать, что старшие слова базиса Гребнера алгебры $TL_{A_n,\tau}$ не содержат параметр τ. Но тогда и линейный базис, который является набором всевозможных слов не содержащих в качестве подслова старшие слова элементов из базиса Гребнера, алгебры $TL_{A_n,\tau}$ $p_1^2, \ldots, p_n^2$, $p_3 p_1, \ldots, p_n p_{n-2}$, $p_1 p_2 p_1, \ldots$, $p_n p_{n-1} p_n$, $p_3 p_2 p_1 p_3, \ldots$ не зависит от τ.

Чтобы найти размерность алгебры $TL_{A_n,\tau}$ достаточно сосчитать, например, размерность алгебры $TL_{A_n,\frac{1}{4}}$. Но $\dim TL_{A_n,\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{n+2}\dbinom{2n+2}{n+1}$ (см. [2]). □

4. В дальнейшем мы также будем рассматривать алгебру Темперли-Либа $TL_{A_n,\tau,\perp}$ с ортогональностью

$$TL_{A_n,\tau,\perp} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_k^2 = p_k^* = p_k,\ p_k p_{k\pm1} p_k = \tau p_k,\ p_k p_j = 0,\ |k-j| \geq 2 \Big\rangle.$$

Размерность алгебры $TL_{A_n,\tau,\perp}$ равна $\dim TL_{A_n,\tau,\perp} = 1 + n^2$.

5. При $0 < \tau \leq \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{2[\frac{n}{2}]+2}}$ алгебра $TL_{A_n,\tau}$ полупростая.

Замечание 1. Рассмотрим $*$-представление $\pi_{D_{k,k-2}}$ алгебры $TL_{A_n,\tau}$, соответствующее диаграмме $D_{k,k-2}$, при $2k+3=n$. Это представление имеет наибольшую размерность среди всех неприводимых представлений. Обозначим её через d_n. Тогда алгебра $TL_{A_n,\tau}$ является F_{2d_n}-алгеброй (см. следующий пункт).

3. Неприводимые $*$-представления $TL_{A_n,\tau}$

1. Алгебра $TL_{A_n,0}$ имеет $1+\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]+1}\prod_{i=0}^{k}(n-2i)$ тривиальных неприводимых неэквивалентных одномерных $*$-представлений (из которых $n+1$ представление ортогонально): все проекторы нулевые и представления когда один или несколько проекторов, которые не являются соседними, равны единичному оператору.

2. Алгебра $TL_{A_n,\frac{1}{4}}$ является фактор алгеброй алгебры $\mathbb{C}[S_{n+1}]$. Найти все неприводимые $*$-представления $\mathbb{C}[S_{n+1}]$ можно найти с помощью техники диаграмм Юнга (см., например, [4]). Из этих $*$-представлений удовлетворяют соотношениям алгебры $TL_{A_n,\frac{1}{4}}$ только те $*$-представления, которые соответствуют диаграммым Юнга, состоящим из не более двух столбцов. Таким образом, между диаграммами Юнга, у которых не более двух столбцов, и всеми неприводимыми $*$-представлениями алгебры $TL_{A_n,\frac{1}{4}}$ существует взаимно однозначное соответствие.

3. Обозначим через D_{n_1,n_2} диаграмму Юнга, у которой в первом столбце n_1 клетка, а во втором n_2 клеток и $n_1+n_2=n+1$. Положим $\tau_k=\dfrac{\tau}{1-\tau_{k-1}}$, $\tau_0=\frac{1}{4}$.

Пусть π — неприводимое $*$-представление алгебры $TL_{A_n,\tau}$, соответствующее диаграмме Юнга D_{n_1,n_2}, π_1 — неприводимое $*$-представление алгебры $TL_{A_{n-1},\tau}$, соответствующее диаграмме D_{n_1,n_2-1} и π_2 — неприводимое $*$-представление алгебры $TL_{A_{n-1},\tau}$, соответствующее диаграмме D_{n_1-1,n_2}. Тогда следующие формулы определяют ортопроекторы при $0\le\tau_{n-2n_2}\le 1$: $\pi(p_k)=\pi_1(p_k)\oplus\pi_2(p_k)$ при $k=1,\dots n-1$

1) если $n_1=n_2=k$, то $\pi(p_n)=\begin{pmatrix}0&0\\0&I_l\end{pmatrix}$, $l=\dfrac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}$

2) если $n_1>n_2$, то
$$\pi(p_n)=\begin{pmatrix}0_{m_1^{(1)}}&0&0&0\\0&(1-\tau_{n-2n_2})I_{m_1^{(2)}}&\sqrt{\tau_{n-2n_2}(1-\tau_{n-2n_2})}I_{m_1^{(2)}}&0\\0&\sqrt{\tau_{n-2n_2}(1-\tau_{n-2n_2})}I_{m_1^{(2)}}&\tau_{n-2n_2}I_{m_1^{(2)}}&0\\0&0&0&0_{m_2^{(2)}}\end{pmatrix},$$
где $m_1^{(1)}+2m_1^{(2)}+m_2^{(2)}=\dim\pi_{D_{n_1,n_2}}$.

Если неприводимое $*$-представление π алгебры $TL_{A_n,\tau}$ $(0<\tau<1)$ унитарно эквивалентно $\pi_{D_{n_1,n_2}}$, то будем говорить, что $*$-представление π имеют тип D_{n_1,n_2}

Обозначим через $H_{D_{n_1,n_2}}$ пространство $*$-представления $\pi_{D_{n_1,n_2}}$ алгебры $TL_{A_n,\tau}$ соответствующее диаграмме D_{n_1,n_2}. Тогда по формуле крюков (см. [4]) получаем, что $\dim H_{D_{n_1,n_2}} = \dfrac{(n_1+n_2)!(n_1-n_2+1)}{(n_1+1)!n_2!}$. Из этой формулы следует $\dim H_{D_{k,k}} = \dim H_{D_{k,k-1}}$.

Предложение 2. $\dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,n_2}} = \dim H_{D_{n_1-1,n_2-1}} = \dfrac{(n_1+n_2-2)!(n_1-n_2+1)}{n_1!(n_2-1)!}$.

Доказательство. Утверждение верно для диаграмм $D_{n_1,2}$ и $D_{n_1,3}$: $\dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,2}} = n_1 - 1 = \dim H_{D_{n_1-1,1}}$, $\dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,3}} = \dfrac{(n_1+1)(n_1-2)}{2} = \dim H_{Dn_1-1,2}$.

Предположим, что утверждение верно для диаграмм, у которых количество клеток меньше, чем у диаграммы D_{n_1,n_2}. Рассмотрим
$\dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,n_2}} = \dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,n_2-1}} + \dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1-1,n_2}} = \dim H_{D_{n_1-1,n_2-2}}$
$+ \dim H_{D_{n_1-2,n_2-1}} = \dim H_{D_{n_1-1,n_2-1}}$. □

Обобщенной размерностью $*$-представления $\pi_{D_{n_1,n_2}}$ алгебры $TL_{A_n,\tau}$, соответствующего диаграмме D_{n_1,n_2}, будем называть набор $(\dim \pi_{D_{n_1,n_2}}, \dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,n_2}}(p_1), \ldots, \dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,n_2}}(p_n)) = (\dim \pi_{D_{n_1,n_2}}, \dim \mathrm{Im}\pi_{D_{n_1,n_2}})$.

5. Пусть $0 < \tau \le \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{2[\frac{n}{2}]+2}}$, тогда имеет место утверждение

Предложение 3. *При* $0 < \tau \le \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{2[\frac{n}{2}]+2}}$ *существует взаимно однозначное соответствие между всеми неприводимым неэквивалентным $*$-представлениям алгебры $TL_{A_n,\tau}$ и диаграммами Юнга, у которых не более двух столбцов.*

Доказательство. Пусть $0 < \tau \le \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{2[\frac{n}{2}]+2}}$. Найдем чему равна сумма квадратов размерностей всех неприводимых $*$-представлений алгебры $TL_{A_n,\tau}$

$$\sum_{m=0}^{[\frac{n+1}{2}]} \Big(\frac{(n+1)!(n-2m+2)}{(n-m+2)!m!}\Big)^2 = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = \dim TL_{A_n,\tau}.$$

Но тогда из формулы Бернсайда следует, что это все неприводимые $*$-представления алгебры $TL_{A_n,\tau}$ при $0 < \tau \le \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{2[\frac{n}{2}]+2}}$. □

6. Рассмотрим алгебру $TL_{A_m,\tau_{n_0}}$, $\tau_{n_0} = \frac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{n_0}}$: в точке τ_{n_0} существует не более n проекторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, которые можно написать с помощью диаграмм Юнга $(n < m)$. Положим при $n_1 < n_2$

$$F_{n_1,n_2}(x) = \begin{pmatrix} I_{m_1^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & F(x)\otimes I_{m_1^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_2^{(2)}} \end{pmatrix},$$

где $F(x) = \begin{pmatrix} 1-2x & 2\sqrt{x(1-x)} \\ 2\sqrt{x(1-x)} & 2x-1 \end{pmatrix}$, $m_1^{(1)} + 2m_1^{(2)} + m_2^{(2)} = \dim \pi_{D_{n_1,n_2}}$.

А при $n_1 = n_2 = k$ $F_k(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}} \end{pmatrix}$.

Положим $Q_i = F_i(\tau_{n_0}) \otimes 1 \otimes \dots$ $i = 1, \dots, n$,

$Q_{n+1} = F_{n-1}^{-1}(\tau_{n_0}) \otimes F_1(\tau_{n_0}) \otimes 1 \otimes \dots$,

$Q_{n+2} = 1 \otimes F_2(\tau_{n_0}) \otimes 1 \dots$ и т.д.

Тогда $P_i = \dfrac{1 + Q_i}{2}$ будут удовлетворять соотношениям алгебры $TL_{A_n,\tau_{n_0}}$ для всех n.

Например, напишем m проекторов — $*$-представление алгебры $TL_{A_n,\frac{1}{2}}$ для любого натурального m. Пусть $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Положим

$W_{2i+1} = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes U \otimes U \otimes 1 \otimes \dots$,

$W_{2i} = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes V \otimes 1 \otimes \dots$, где U i-й и $i+1$-й сомножител, а V i-й сомножитель. Тогда $P_i = \dfrac{1 + W_i}{2}$ при $i = 1, \dots, m$ будут проекторами, удовлетворяющие соотношениям $TL_{A_n,\frac{1}{2}}$ для всех натуральных m и n.

7. Пусть теперь $\dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{m+2}} < \tau < \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{m+1}}$, тогда имеет место следующее утверждение

Предложение 4. *([3]) Пусть* $\dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{m+2}} < \tau < \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{m+1}}$. *Тогда существует не более $2m - 1$ ненулевых проекторов, удовлетворяющих соотношениям алгебры $TL_{A_n,\tau}$ и не более m ненулевых проекторов, удовлетворяющих соотношениям алгебры $TL_{A_n,\tau,\perp}$.*

4. Множества $\Sigma_{A_n}(k)$

1. Так как нулевое представление $\pi_0(p_k) = 0$ для всех k существует при любом $\tau \in \mathbb{R}$, то в дальнейшем не будем его учитывать.

2. Обозначим через $\Sigma_{A_n} = \{\tau \in [0, 1] \mid$ существуют ненулевые $*$-представления алгебры $TL_{A_n,\tau}\}$, $\Sigma_{A_n,\perp} = \{\tau \in [0, 1] \mid$ существуют ненулевые $*$-представления алгебры $TL_{A_n,\tau,\perp}\}$.

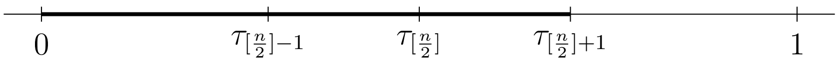
Заметим, что Σ_{A_n} и $\Sigma_{A_n,\perp}$ замкнутые множества (см. [7]).

У алгебры $TL_{A_n,\tau,\perp}$ существует единственное $*$-представление, соответствующее диаграмме Юнга $D_{n_1,1}$, при $\tau \in (0, \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{n+1}}]$. Алгебра $TL_{A_n,0}$ имеет $n + 1$ ортогональных $*$-представлений. Тогда $\Sigma_{A_n,\perp} = [0, \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{n+1}}]$ (см. также [5])

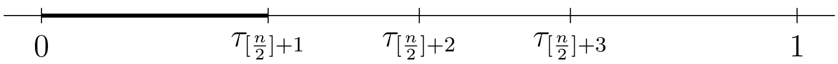
Предложение 5. $\Sigma_{A_n} = \Sigma_{A_{[\frac{n}{2}]+1},\perp} \cup \{\frac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{k}} \mid k \geq 3, \}$.

Доказательство. Рассмотрим алгебру $TL_{A_n,\tau}$ и положим $\tau_k = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{k+1}}$.

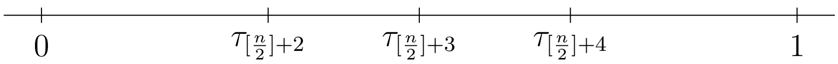
Пусть сначала $\tau \leq \tau_{[\frac{n}{2}]+1}$. Тогда в точке τ можно построить неприводимое $*$-представление алгебры $TL_{A_n,\tau}$ с помощью техники диаграмм Юнга, следовательно, $\tau \in \Sigma_{A_n}$.



Если $\tau_k < \tau < \tau_{k+1}$, $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$. Тогда из утверждения 4 следует, что в этих точках не существует более чем n проекторов, удовлетворяющих соотношениям на образующие алгебры $TL_{A_n,\tau}$, то есть $\tau \notin \Sigma_{A_n}$



Пусть теперь $\tau \in \{\tau_k \mid k > [\frac{n}{2}] + 1\}$. Тогда в этих точках мы также можем построить представление (конструкция которого приведена выше) алгебры $TL_{A_n,\tau}$, следовательно, $\tau \in \Sigma_{A_n}$



Таким образом, получаем $\Sigma_{A_n} = \Sigma_{A_{[\frac{n}{2}]+1},\perp} \cup \{\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{k}} \mid k \geq 3,\}$.

$\square$

3. Пусть $\Sigma_{A_n}(k) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid$ существует не менее k ненулевых неэквивалентных неприводимых $*$-представлений алгебры $TL_{A_n,\tau}\}$. Тогда $\Sigma_{A_n} = \bigcup_{k\geq 1} \Sigma_{A_n}(k)$ и $\Sigma_{A_n}(k) \supset \Sigma_{A_n}(k+1)$.

Теорема 1. $\Sigma_{A_n}(1) = \Sigma_{A_n}$, $\Sigma_{A_n}(k) = [0, \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{[\frac{n}{2}]+3-k}}]$ *при* $k \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим алгебру $TL_{A_n,\tau}$. Пусть τ_0 из дискретной части множества Σ_{A_n}. Предположим, что существует два неэквивалентных неприводимых $*$-представления у алгебры TL_{A_n,τ_0}. Но тогда найдется такое n_0, что τ_0 будет правой крайней точкой непрерывной части множества $\Sigma_{A_{n_0}}$, в которой существует только одно $*$-представление алгебры $TL_{A_{n_0},\tau_0}$. Следовательно, при $k \geq 2$ $\Sigma_{A_n}(k) = [0, \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{[\frac{n}{2}]+3-k}}]$. В нуле $1 + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]+1} \prod_{i=0}^{k}(n-2i)$ представлений. $\square$

4. Пусть $\Sigma_{A_n,k} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid$ существует k ненулевых неэквивалентных неприводимых $*$-представлений алгебры $TL_{A_n,\tau}\}$. Тогда $\Sigma_{A_n,k} \cap \Sigma_{A_n,i} = \emptyset$ при $i \neq k$ и $\Sigma_{A_n,1} = (\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{[\frac{n}{2}]+3}}, \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{[\frac{n}{2}]+2}}] \cup \{\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{k}} \mid k \geq 3\}$, $\Sigma_{A_n,k} = (\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{[\frac{n}{2}]+3+k}}, \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{[\frac{n}{2}]+2+k}}]$ при $k > 1$.

5. Рассмотрим алгебру

$$TL_{A_\infty,\tau} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, p_2, \cdots \mid p_k^2 = p_k,\ p_k p_{k\pm1} p_k = \tau p_k,\ p_k p_j = p_j p_k,\ |k-j| \geq 2 \Big\rangle.$$

В [2] показано, что $\Sigma_{A_\infty} = [0, \frac{1}{4}] \cup \{\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{k+1}} \mid k = 3, 4, \ldots\}$. Отсюда следует, что $\Sigma_{A_\infty,\perp} = [0, \frac{1}{4}]$.

Автор искренне благодарен Юрию Стефановичу Самойленко за постоянную поддержку.

Список цитируемых источников

1. *Ewans D., Kawahigashi Y.* Quantum symmetries on operator algebras. — New York: Oxford Univ. Press, 1998. —621 p.
2. *Jones V.* Index for subfactor // Invent Math. – 1983. – Vol.72. – P.1–15.
3. *Wenzl H.* On sequences of projections // Math. Rep. C. R. Acad. Sc. Canada 9, – 1987, – P.5–9.
4. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. —Москва: Мир, 1982. — 214 с.
5. *Popova N.D, Samoĭlenko Yu.S.* On the existence of configurations of subspaces in a Hilbert space with fixed angles // J.Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2006, – 2, – 055, – P.1–5.
6. *Fulton W.* Young tableaux: with applications to representation theory and geometry — New York: Cambridge University Press, 1997. — 270 p..
7. *Samoĭlenko Yu.S., Shulman V.S., Turowska L.* Semilinear relations and their $*$-representations // Methods of Functional Analysis and Topology. — 1996. — Vol. 2, № 1, — P.52–107.
8. *P.Gabriel, A.V.Roiter* Representations of finite-dimensional algebras. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. — 177 p.

Получена 11.09.2007