

УДК 519.68+517.958

# Дослідження області стійкості підвісу вільного важкого горизонтального надпровідного ротора у магнітному полі надпровідного статора

Г.В. Славко\*, С.І. Ляшко\*\*, В.В. Козоріз\*\*

\* Кременчуцький державний політехнічний університет ім.Михайла Остроградського, Кременчук 39600. *E-mail: emath@mail.ru*

\*\* Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01033.

**Анотація.** Досліджено стійкість безконтактного надпровідного підвісу горизонтального ротора, розроблено нову методику побудови області стійкості систем магнітної левітації, вивчено умови втрати стійкості. Вперше область стійкості поділена на підобласті, що розрізняються початковими умовами живлення надпровідної системи. Отримано умови стійкого підвісу для горизонтального ротора. Запропоновано шляхи підвищення у стійкій системі маси ротора без збільшення напруженості магнітного поля.

**Ключові слова:** стійкість, надпровідний ротор, маглев.

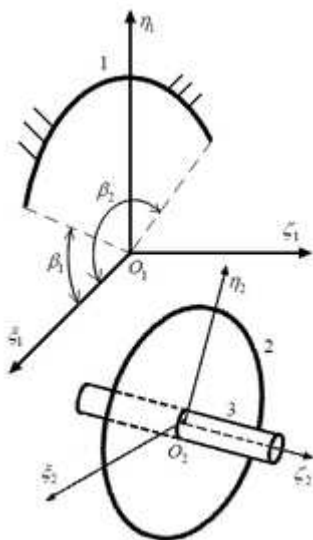
## 1. Вступ

Криогенні надпровідні підвіси займають особливе місце в системах магнітної левітації (маглев). Відсутність системи керування надає цим системам переваги у порівнянні з електростатичними або електромагнітними. Проте, криогенні підвіси не позбавлені недоліків. Головні з них — забезпечення надпровідності (НП) і обмеження по рівню напруженості магнітного поля. Збільшення маси левітуючого об'єкту при збереженні стійкості вимагає підвищення напруженості магнітного поля, що приводить до виходу системи із надпровідного стану. Виникає потреба у пошуках систем, в яких вага вільного елемента збільшується не за рахунок збільшення магнітного поля, а завдяки особливостям конструкції та технології отримання стійкості підвісу.

## 2. Математична модель ротора з горизонтальною віссю

Модель НП– підвісу, запропонована у [2, 3], одержала свій подальший розвиток в роботах [4, 5]. Використаємо ці результати для моделі ротора з горизонтальною

віссю обертання. Статор (нерухома дуга, із НП-матеріалу) розташований у вертикальній площині  $O\xi_1\eta_1$  (рис. 1, елемент 1). Дуга — частина повного НП — контура. Магнітне поле створюється тільки дугою. НП — систему вважатимемо консервативною, без дисипації енергії.



Ротор — НП-кільце (елемент 2), жорстко зв'язане з немагнітним вісесиметричним тілом (елемент 3), вісь якого співпадає з віссю кільця, а центр мас  $O_2$  співпадає з центром кільця. Положення  $O_2$  відносно статора ( $O\xi_1\zeta_1\eta_1$ ) визначається циліндричними координатами  $(\rho, \alpha, \zeta)$ , а кутова орієнтація ротора ( $O\xi_2\zeta_2\eta_2$  відносно  $O\xi_1\zeta_1\eta_1$ ) — кутами Ейлера  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Загалом, маємо шість координат ротора  $\delta = \{\rho, \alpha, \zeta, \psi, \theta, \varphi\}$ . Досліджується стійкість підвісу у положенні квазиспіввісності ротора і статора (площини кільця 2 і дуги 1 співпадають, центр мас  $O_2$  розташований на осі симетрії дуги 1 ( $O\eta_1$ ), сила тяжіння діє уздовж цієї осі вниз. Положення квазиспіввісності визначається координатами:

$$q = \{\zeta = 0, \theta = 0, \alpha = \{3\pi/2, \pi/2\}; \rho, \psi, \varphi - \forall\}, \quad (1)$$

а положення (1) на відстані  $\rho = \rho_0$  між центрами ротора і статора:

$$q^0 = \{\zeta = 0, \theta = 0, \alpha = \{3\pi/2, \pi/2\}, \rho = \rho_0; \psi, \varphi - \forall\} \quad (2)$$

Дослідження стійкості рівноваги ротора потребує представлення взаємної індуктивності та її перших і других похідних, як функцій координат  $\delta$ , обчислених в (1). Для окремих випадків розташування контурів, формули можна знайти в [1]. Тут застосовуватимемо загальну формулу, наведену в [6]. З урахуванням позначень  $a = a_2/a_1$ ,  $\tilde{\rho} = \rho/a_1$ ,  $\tilde{\zeta} = \zeta/a_1$ , у випадку співпадання вісі обертання з центром

ваги ротора, ці формули матимуть вигляд:

$$L_{12} = \mu_0 \sqrt{a_1 a_2} \cdot \tilde{L}_{12}, \quad \tilde{L}_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} M f A^{-3/2} d\lambda,$$

$$M = (2/k - k) K(k) - (2/k) E(k), \quad k = 2\sqrt{aA / ((a + A)^2 + h^2)}, \quad (3)$$

$$h = \sin \theta (\sin(\lambda - \psi) - \tilde{\rho} \sin(\alpha - \psi)) + \tilde{\zeta} \cos \theta,$$

$$A^2 = 1 + \tilde{\rho}^2 + \tilde{\zeta}^2 - 2\tilde{\rho} \cos(\lambda - \alpha) - h^2,$$

$$f = \cos \theta - \tilde{\rho} \cos(\lambda - \alpha) \cos \theta - \tilde{\zeta} \sin(\lambda - \psi) \sin \theta,$$

де  $K(k)$ ,  $E(k)$  — повні еліптичні інтеграли модуля  $k$ ,  $\mu_0$  — магнітна проникність середовища,  $\beta_1, \beta_2$  — межі зміни  $\lambda$  — по дузі кола 1;  $a_1, a_2$  — радіуси струмових елементів 1 і 2. Власна індуктивність дуги статора, зігнутого по колу та замкненого контура (ротор) —  $L_{ii} = \mu_0 a_i \Delta_{ii}$ , де безрозмірна величина  $\Delta_{ii}$  обчислюється за відомими відповідними формулами [1].

### 3. Необхідні і достатні умови стійкості надпровідного підвісу

Є дві схеми початкового живлення системи. Перша: статор живиться струмом  $I_1^0$ , а ротор на деякій відстані  $\rho_0$ , за умови відсутності в ньому струму  $I_2^0 = 0$ , переводиться в НП-стан. Друга: живлення і переведення у НП-стан здійснюється у зворотному порядку, тобто  $I_1^0 = 0, I_2^0 \neq 0$ . Потенційна енергія магнітної взаємодії струмових елементів системи [2, 3]:

$$W_M = W_M^0 \left( 1 + (L_{12} - L_{12}^0)^2 (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)^{-1} \right), \quad (4)$$

де  $W_M^0$  — початкова енергія,  $L_{12}^0$  — взаємна індуктивність (3) обчислена у (2),  $L_{11}, L_{22}$  — власні індуктивності статора і ротора. Значення  $W_M^0$  для першого і другого випадків, відповідно:

$$W_M^0 = L_{11} I_1^{02} / 2, \quad W_M^0 = L_{22} I_2^{02} / 2.$$

Повна потенційна енергія, з урахуванням сили тяжіння уздовж напрямку  $\rho$  ( $O\eta_1$ ):

$$W = W_M - G\rho. \quad (5)$$

Як відомо, енергія магнітного поля, виражена через поточкозчеплення (які можна вважати сталими через їх замороженість) та координати, є потенційною енергією. Таким чином, на вільний ротор діють сили:

$$P_\delta = -\partial W / \partial \delta, \quad (6)$$

Положення рівноваги визначаються системою рівнянь:

$$P_\delta = 0, \quad (7)$$

Враховуючи, що для  $\delta = \{\alpha, \zeta, \psi, \theta, \varphi\}$  у положеннях (1)

$$\partial W / \partial \delta = \partial W_M / \partial L_{12} \cdot \partial L_{12} / \partial \delta, \quad \partial L_{12} / \partial \delta = 0,$$

маємо для цих положень виконання чотирьох рівнянь (7) із п'яти:

$$P_\zeta = P_\theta = P_\alpha = P_\psi = 0. \quad (8)$$

Виконання п'ятої умови з (7) можливе для відповідного  $\rho$ , яке визначається рівнянням:

$$P_\rho = 0, \quad P_\rho = \partial W_M / \partial L_{12} \cdot \partial L_{12} / \partial \rho - G, \quad (9)$$

$$\partial W_M / \partial L_{12} = 2W_M^0 (L_{12} - L_{12}^0) (L_{11}L_{22} - L_{12}^0 L_{12}) (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)^{-2}.$$

Враховуючи (4),(5) запишемо для  $\delta = \{\rho, \alpha, \zeta, \psi, \theta, \varphi\}$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = \frac{\partial^2 W_M}{\partial L_{12}^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial \delta_i} \frac{\partial L_{12}}{\partial \delta_j} + \frac{\partial W_M}{\partial L_{12}} \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \delta_i \partial \delta_j}.$$

У положенні квазиспіввідності більшість з цих похідних нульові. Відмінні від нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial W_M}{\partial L_{12}} \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \alpha^2}, & \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial W_M}{\partial L_{12}} \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} &= \frac{\partial W_M}{\partial L_{12}} \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \zeta^2}, & \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial \theta} &= \frac{\partial^2 W_M}{\partial L_{12}^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial \zeta} \frac{\partial L_{12}}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial^2 W_M}{\partial L_{12}^2} \left( \frac{\partial L_{12}}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\partial W_M}{\partial L_{12}} \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \rho^2}. \end{aligned}$$

Поблизу квазиспіввідності (для малих приростів координат):

$$W = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} (\Delta \rho)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} (\Delta \alpha)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} (\Delta \zeta)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} (\Delta \theta)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial \theta} \Delta \zeta \Delta \theta. \quad (10)$$

У відповідності з теоремою про стійкість по відношенню до частини змінних, стійкість рівноваги в положеннях (2) визначається додатністю форми (10). Відповідно до критерію Сильвестра, для виконання умови додатності форми, маємо достатні умови стійкості:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial \theta} \right)^2 > 0. \quad (11)$$

Як відомо [1], для будь-якого взаємного розташування струмових елементів:

$$L_{11}L_{22} - L_{12}^0 L_{12} > 0, \quad L_{11}L_{22} - L_{12}^2 > 0. \quad (12)$$

Позначимо:

$$\tilde{\rho} = \rho / a_1, \quad \Delta \tilde{L}_{12} = \tilde{L}_{12} - \tilde{L}_{12}^0, \quad C_{\alpha\alpha} = \Delta \tilde{L}_{12} \partial^2 \tilde{L}_{12} / \partial \alpha^2, \quad C_{\zeta\zeta} = \Delta \tilde{L}_{12} \partial^2 \tilde{L}_{12} / \partial \zeta^2,$$

$$C_{\theta\theta} = \Delta \tilde{L}_{12} \partial^2 \tilde{L}_{12} / \partial \theta^2, C_{\zeta\theta} = \left( \partial^2 \tilde{L}_{12} / \partial \zeta^2 \right) \left( \partial^2 \tilde{L}_{12} / \partial \theta^2 \right) - \left( \partial^2 \tilde{L}_{12} / \partial \zeta \partial \theta \right)^2.$$

Тоді, із (11) з урахуванням (12) випливає:

$$C_{\alpha\alpha} > 0, C_{\zeta\zeta} > 0, C_{\theta\theta} > 0, C_{\zeta\theta} > 0. \quad (13)$$

Відсутність у системі (13) змішаних похідних з координатами  $\rho, \alpha$  дозволяє роздільне вивчення стійкості за  $\rho, \alpha$  і рештою координат. Замість умови  $\partial^2 W / \partial \rho^2 > 0$  з (11) досліджуватимемо силу уздовж  $\rho$ . У відповідності з теоремою Лагранжа-Діріхле, додатність лівої частини умови означає стійкість рівноваги сили тяжіння (уздовж  $\rho$ ) і сили магнітної взаємодії струмів у контурах. Таким чином, за характером силової функції можна робити висновок про стійкість підвісу. Якщо збільшення відстані збільшує силу магнітного притягання при зміщенні ротора із положення рівноваги, то буде стійкість за цим напрямком. Безрозмірна узагальнена функція сили, що діє уздовж  $\rho$  та виражена через потенційну енергію має вигляд:

$$\tilde{F}_\rho = 2 \left( \tilde{L}_{12} - \tilde{L}_{12}^0 \right) \left( \Delta_{11} \Delta_{22} - \tilde{L}_{12} \tilde{L}_{12}^0 \right) \left( \Delta_{11} \Delta_{22} - \tilde{L}_{12}^2 \right)^{-2} \left( \partial \tilde{L}_{12} / \partial \rho \right), \quad (14)$$

$$\tilde{F}_\rho = G \sqrt{a_1 a_2} W_0^{-1}.$$

#### 4. Область стійкості надпровідного підвісу

Початкове живлення НП-системи здійснюємо за першою схемою, потім перемищуємо ротор уздовж вертикальної осі вниз. Обчислюючи значення  $\tilde{F}_\rho$  перевіряємо виконання достатніх умов. Розглянемо приклад системи зі стійким підвісом. На рис. 2-5 наведено необхідні і достатні умови стійкості для системи з параметрами:  $a_2/a_1 = 0,95$ ,  $\Delta_{11} \times \Delta_{22} = 12,5$ ,  $\beta_1 = 0, \beta_2 = \pi$ ,  $\alpha = 3\pi/2$ . На рис. 2 криві 1-7 відповідають  $\tilde{F}_\rho$  для різних відстаней початкового живлення. Відстань живлення визначається точкою перетину відповідної кривої з віссю  $\tilde{\rho}$ , в цій точці  $\tilde{F}_\rho = 0$ . Після живлення ротор провисає під дією сили тяжіння (зростаючі ділянки кривих 1-7 вище вісі  $O\tilde{\rho}$ ). Саме ці ділянки відповідають стійкості системи по координаті  $\rho$ . Зазначимо, що на всіх графіках подається абсолютне значення відстані між центрами статора і ротора. З рис. 3 видно, умова  $C_{\zeta\zeta} > 0$  виконується вище вісі  $O\tilde{\rho}$  для випадків живлення, що відповідають рис. 2.

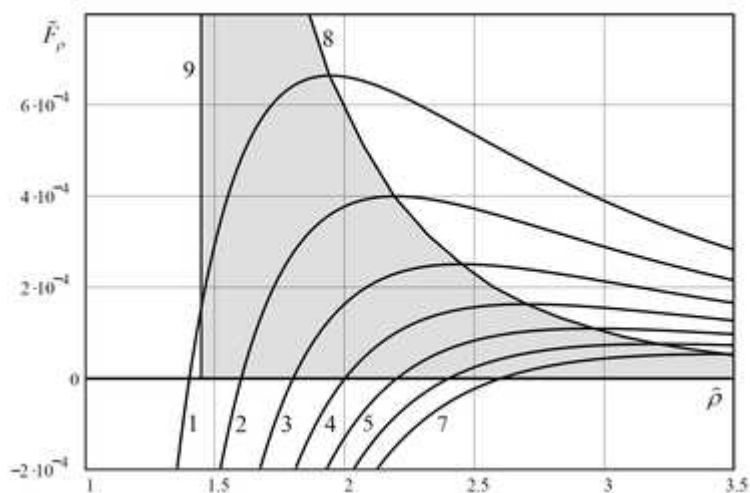


Рис. 2. Область достатніх умов стійкості

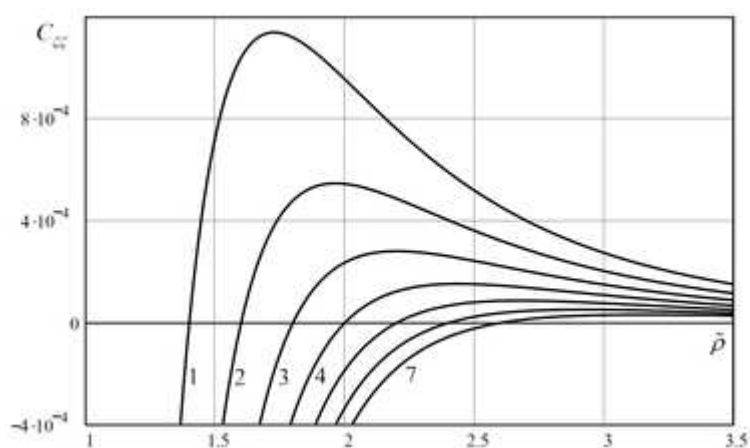
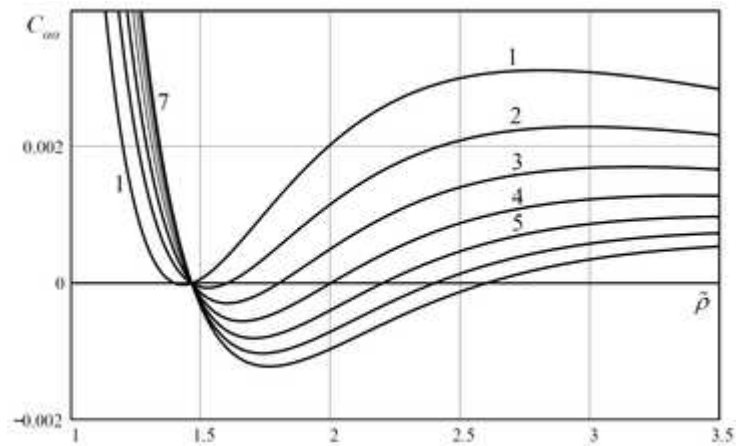
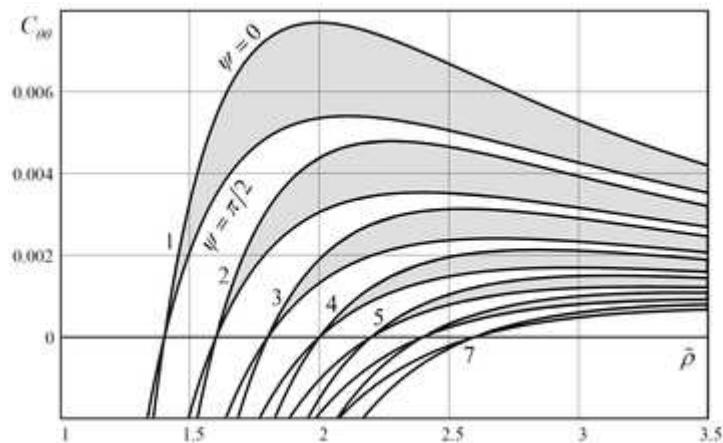


Рис. 3. Умови стійкості уздовж осі статора

З розрахунків випливає, що по координаті  $\zeta$  стійкий підвіс, а не опора. На рис. 4 — достатні умови стійкості ротора по координаті  $\alpha$ . Кожна крива перетинає вісь  $\tilde{\rho}$  двічі. Один перетин забезпечується множителем  $\tilde{L}_{12} - \tilde{L}_{12}^0$ , другий — обертанням у нуль похідної  $\partial^2 \tilde{L}_{12} / \partial \alpha^2$  (загальна точка для всіх варіантів живлення). Положення цієї точки перетину кривих на осі визначається геометрією системи (відношенням радіусів  $a = a_2/a_1$ ). Кожна крива має одну ділянку, розташовану нижче за вісь  $O\tilde{\rho}$  (нестійкість по  $\alpha$ ) і дві ділянки, розташовані вище за вісь  $O\tilde{\rho}$  (стійкість по  $\alpha$ ). Враховуючи результати обчислень за іншими достатніми умовами, слід розглядати тільки ділянки додатних значень, розташованих правіше точки перетину кривих. Таким чином, вказана точка є обмеженням по осі  $O\tilde{\rho}$  на стійкий підвіс по координаті  $\alpha$ .

Рис. 4. Достатні умови стійкості за кутом  $\alpha$ 

Область виконання умови  $C_{\theta\theta} > 0$  наведено на рис. 5.

Рис. 5. Достатні умови стійкості за кутом  $\theta$  для різних  $\psi$ 

Очевидно, для підвісу забезпечується стійкість по куту  $\theta$  (додатні частини кривих). Відзначимо, що стійкість по  $\theta$  залежить від кута  $\psi$  (система чутлива до того, з якого положення ротор по куту  $\psi$  приходить в положення збігу площин  $\theta = 0$ ). Діапазон зміни жорсткості підвісу для одного й того ж варіанту початкового живлення показано штрихуванням (від  $\psi = 0$  до  $\psi = \pi/2$ ). Це дозволяє зробити висновок про зміну жорсткості системи по куту  $\theta$ , якщо при обертанні кільця 2 навколо горизонтальної осі його площина відхиляється по куту  $\theta$  від площини статора. Крім того, віддалення від точки початкового живлення збільшує вплив кута  $\psi$  на жорсткість підвісу, про що свідчить збільшення ширини штрихованої зони. Цей факт вимагає особливої уваги при дослідженні динаміки обертання і коливання ротора, та потребує врахування при розробці конструкції підвісу. Достатня умова  $C_{\zeta\theta} > 0$  не залежить від положень живлення і для даної геометрії виконується за-

вжди, але також залежить від  $\psi$ , що обумовлено залежністю складової  $C_{\theta\theta}$  від  $\psi$ . Повна область стійкості подана штриховкою на рис. 2. Вона обмежена кривою 8, що проходить через максимуми сил  $\tilde{F}_\rho$ , віссю  $O\tilde{\rho}$  та вертикальною прямою 9.

## 5. Висновки

Запропонована методика побудови області стійкості, на основі силової функції є більш наглядною та прийнятною, ніж та що була прийнята у роботах [2, 3] з використання безрозмірного відношення потокозчеплень. Наприклад, нове подання області стійкості дозволяє вирізняти підобласті стійкості. Пояснимо на прикладі рис. 2. Якщо здійснити початкове живлення у точці перетину кривої 1 з віссю  $O\tilde{\rho}$ , та відпустити ротор, то він втратить стійкість. Якщо ж ротор віддалити від точки живлення на достатню відстань не вивільняючи, то він опиниться в області стійкості. Крива 2 відповідає випадку положення живлення, з якого можна одразу вивільнити ротор і він провисає під своєю вагою, зберігаючи стійкість. Цю властивість слід враховувати під час розробки конструкції підвісу. Примусове переміщення ротора до зони стійкості, дозволяє збільшувати вагу стійкого ротора, про що свідчить область стійкості над кривою 1. Отримані результати підтверджують можливість створення горизонтального підвісу ротора з надпровідними підшипниками.

### Перелік цитованих джерел

1. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей: Справ.кн. — Л.: Энергоатомиздат, 1986. — 488 с.
2. *Козоріз В.В.* Динамічні системи магнітно взаємодіючих тіл. — Київ: Наукова думка, 1981. — 140 с.
3. *Михалевич В.С., Козоріз В.В., Рашкован В.М., Хусайнов Д.Я., Чеборін О.Г.* "Магнітна потенційна яма"– ефект стабілізації надпровідних динамічних систем . — Київ: Наукова думка, 1991. — 336 с.
4. *Славко Г.В.* Надпровідний ротор з горизонтальною віссю обертання // Наукові праці Кременчуцького філіалу Харківського державного політехнічного університету. — 1995. — Ч. 1. — С. 219–224.
5. *Славко Г.В.* Вибір оптимальної геометрії надпровідної котушки для магнітного підшипника // Наукові праці Кременчуцького державного політехнічного інституту. — 1998. — Вип. 2. — С. 216–220.
6. *Славко Г.В.* Дослідження взаємної індуктивності надпровідних контурів в магнітному підвісі з шістьма степенями вільності // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. — 2002. — Т. 1, № 2. — С. 286–289.

Получена 2.11.2008