

УДК 535.147

Структурная устойчивость поля в семействе внеосевых наклонных сингулярных лазерных пучков

Я.В. Издебская, А.В. Воляр, В.Г. Шведов, В.И. Шостка,
С.Н. Лапаева, Н.В. Шостка

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. E-mail: izdebskaya@mail.ru

Аннотация. Впервые экспериментально и теоретически показано, что структурная устойчивость поля семейства сингулярных внеосевых лазерных пучков существенно зависит от соотношения чисел $(N, l, \sigma M, R_0, \bar{\alpha})$, где N — число пучков, l — орбитальное число, M — топологический заряд пучков, R_0 — относительное смещение пучков и $\bar{\alpha}$ — относительный угол наклона пучка.

Введение

Проблема формирования устойчивой структуры поля семейства сингулярных пучков является центральной в сингулярной оптике как с точки зрения фундаментальных, так и прикладных исследований [1-3].

Существующие в настоящее время методы формирования оптических вихрей не позволяют получить устойчивые вихри высших порядков. Это связано с изменением их параметров при малейших возмущениях лазерного пучка. К основным методам создания лазерных пучков, переносящих как единичные вихри, так и сетки фазовых сингулярностей, можно отнести: 1) метод компьютерно-синтезированных голограмм [4]; 2) метод спиральных фазовых транспарантов [5]; 3) метод внутрирезонаторного формирования фазовых сингулярностей [6].

В данной работе рассматривается поле семейства внеосевых лазерных пучков, в которых при преобразовании осей вращения оптические вихри приобретают дополнительную фазу, что приводит к изменению интенсивности в различных состояниях сингулярных пучков.

1. Структура поля симметричного семейства внеосевых гауссовых лазерных пучков

В настоящее время уделяется достаточно пристальное внимание изучению свойств семейств внеосевых лазерных пучков в связи с их уникальными свойствами. Возможность переноса орбитального углового момента (ОУМ) такими структурами поля дает возможность захватывать, перемещать и вращать микрообъекты, а также осуществлять оптическое кодирование и перенос информации. Авторы работы [7] установили тот факт, что единичный гауссов пучок, ось которого смещена и наклонена относительно лабораторной системы координат, приобретает орбитальный угловой момент, величину которого можно легко изменять. Однако при соответствующей ориентации лабораторной системы координат можно добиться уничтожения этого ОУМ.

С другой стороны, известно, что лучевые траектории в максимуме интенсивности пучка представляют собой прямые линии, лежащие на поверхности гиперboloида вращения, что и приводит к возникновению ОУМ. Очевидно, что система двух и более симметричных внеосевых фундаментальных гауссовых пучков должна приобретать дополнительный угловой момент.

Целью данной статьи является изучение структуры семейства внеосевых гауссовых пучков и их орбитального углового момента.

Рассмотрим семейство N гауссовых пучков, оси которых лежат на поверхности гиперboloида вращения [8]. Ориентация пучков выбрана таким образом, чтобы их оси совпадали с одним из двух семейств прямолинейных образующих гиперboloида вращения. Симметричное расположение осей пучков в семействе приведено на рисунке 1,а.

Центр каждого пучка смещен вдоль радиуса на расстояние r_0 относительно оси z лабораторной системы координат $\{x, y, z\}$ (рис. 1, б), а их оси наклонены

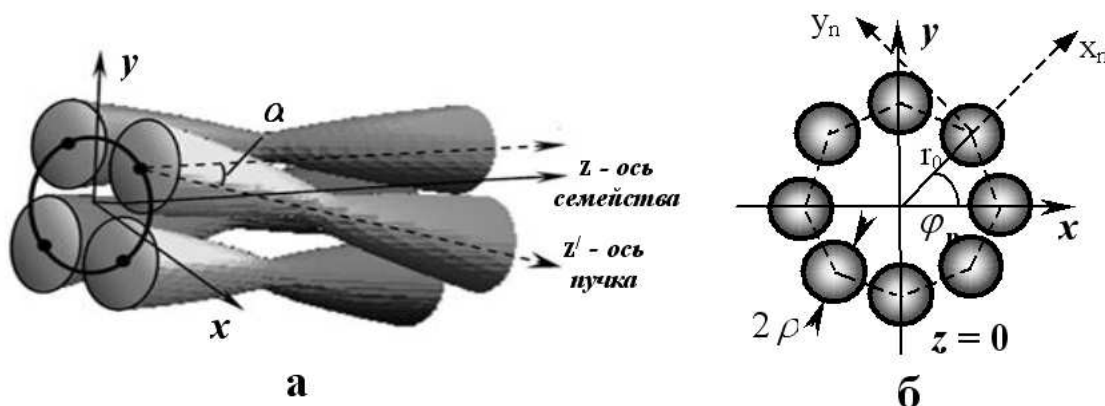


Рис. 1. Семейство гауссовых пучков с осями расположенными на поверхности гиперboloида вращения.

относительно этой оси на малый угол α (рис.1,а). Радиусы перетяжек всех пучков

лежат в плоскости $z = 0$ и имеют одинаковую полуширину ρ . При этом учтем, что все пучки расположены симметрично и отстают друг от друга на угловые расстояния $\varphi = \frac{2\pi}{N}$.

В связи с тем, что в параксиальном случае углы наклона α малы, то $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, $\sin \alpha \approx \alpha$, а координаты центра n -го пучка в параксиальном случае примут вид:

$$\begin{cases} x_n = r \cos(\varphi - \varphi_n) - r_0 \\ y_n = r \sin(\varphi - \varphi_n) - z\alpha \\ z_n = r\alpha \sin(\varphi - \varphi_n) + z(1 - \alpha^2/2) \end{cases} . \quad (1)$$

Радиальная координата r_n n -го пучка в семействе внеосевых пучков с учетом (1) будет равна:

$$r_n^2 = x_n^2 + y_n^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_n) - 2\alpha rz \sin(\varphi - \varphi_n) + \alpha^2 z^2. \quad (2)$$

Присвоим каждому пучку начальную фазу $\Delta_n = \varphi_n l = (n \frac{2\pi}{N})l$, где l — орбитальное число семейства, показывающее направление и рост фазы при переходе от пучка к пучку. Для определенности, будем считать l положительным натуральным числом, во всех случаях, если это не будет оговариваться особо, т.е. $l = 0, 1, 2, \dots$. Тогда в системе координат, связанной с осью симметрии гиперboloида, волновая функция каждого гауссова пучка будет равна:

$$\Psi_n = \frac{z_0}{Z_n} \exp \left\{ ik \frac{r_n^2}{2Z_n} \right\} \exp [i(kz_n - \Delta_n)], \quad (3)$$

где $Z_n = z_n - iz_0$, $z_0 = k\rho^2/2$ — длина Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны. Волновая функция всего семейства записывается:

$$\Psi = \sum_{n=1}^N \Psi_n. \quad (4)$$

Выражение (4) с учетом (3) дает возможность провести компьютерное моделирование семейства пучков. Однако, оно не позволяет аналитически изучить поведение такого комбинированного пучка и оценить его свойства. Поэтому будем считать, что для малых углов наклона пучков α обратные величины комплексных длин $1/Z$ и $1/Z_n$ примерно одинаковы:

$$\frac{1}{Z_n} \approx \frac{1}{Z}, \quad (5)$$

где $Z = z - iz_0$. Тогда с учетом (5) и (2) волновая функция n -го пучка (3) принимает

вид:

$$\begin{aligned}
\psi_n &= \frac{z_0}{Z} \exp \left\{ ik \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_n) - 2r\alpha z \sin(\varphi - \varphi_n) + \alpha^2 z^2}{2Z} \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ ik \left(r\alpha \sin(\varphi - \varphi_n) + z \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right) \right\} \exp \{-i\Delta_n\} \\
&= \frac{z_0}{Z} \exp \left\{ ik \frac{r^2 + r_0^2 + \alpha^2 z^2}{2Z} + ikz \right\} \exp \left\{ -ik \frac{2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_n) + 2r\alpha z \sin(\varphi - \varphi_n)}{2Z} \right\} \times \\
&\times \exp \{ikr\alpha \sin(\varphi - \varphi_n)\} \exp \left\{ -ikz \frac{\alpha^2}{2} \right\} \exp \{-i\Delta_n\} \\
&= \frac{z_0}{Z} \exp \left\{ ik \frac{r^2 + (r_0^2 - \alpha^2 z_0^2)}{2Z} \right\} \exp \left\{ -2ikr \frac{r_0 \cos(\varphi - \varphi_n) + i\alpha z_0 \sin(\varphi - \varphi_n)}{2Z} \right\} \times \\
&\times \exp \{ikz\} \exp \left\{ -kz_0 \frac{\alpha^2}{2} \right\} \exp \{-i\Delta_n\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Перепишем последнее выражение в виде:

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{n=1}^N \exp \{A \exp(i(\varphi - \varphi_n)) + B \exp(-i(\varphi - \varphi_n))\} \exp \{-il\varphi_n\},$$

где

$$\Psi_0 = (z_0/Z) \exp \left(ik \frac{r^2 + r_0^2 - \alpha^2 z_0^2}{2Z} - \frac{kz_0\alpha^2}{2} + ikz \right), \quad A = -i \frac{z_0}{Z} (R_0 + \bar{\alpha})(r/\rho),$$

$B = -i[z_0 r (R_0 - \bar{\alpha})]/\rho Z$, $R_0 = r_0/\rho$ — относительное смещение пучка, $\bar{\alpha} = \alpha/\alpha_{\text{диф}}$ — нормированный угол, на который пучок отклонен относительно оси семейства, $\alpha_{\text{диф}} = 2/(k\rho)$ — угол дифракционной расходимости отдельного пучка. Тогда волновую функцию семейства пучков (4) запишем как:

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{n=1}^N \exp \{A \exp(i(\varphi - \varphi_n)) + B \exp(-i(\varphi - \varphi_n))\} \exp \{-il\varphi_n\}, \tag{7}$$

Представим внешнюю экспоненту в (7) в виде ряда:

$$\exp(a + b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a + b)^j}{j!}, \tag{8}$$

где $a = A \exp(i(\varphi - \varphi_n))$, $b = B \exp(-i(\varphi - \varphi_n))$ и воспользуемся биномиальным рядом:

$$(a + b)^j = \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} a^{j-p} b^p, \quad \binom{j}{p} = \frac{j!}{p! (j-p)!}, \tag{9}$$

Волновую функцию (7) с учетом (8) и (9) приведем к виду:

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} A^{j-p} B^p \exp [i(j-2p)\varphi] \sum_{n=1}^N \exp [i(2p-j-l)\varphi_n]. \tag{10}$$

В тоже время, сумма геометрической прогрессии в выражении (10) равна:

$$\sum_{n=1}^N \exp \left[i (2p - j - l) \left(n \frac{2\pi}{N} \right) \right] = \begin{cases} N, & \text{если } 2p - j - l = mN, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (11)$$

Следовательно, согласно (11), выражение (6) примет вид:

$$\Psi = \Psi_0 N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i(mN - l)\varphi) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{q}{\frac{q-L_m}{2}} \right) A^{\frac{q+L_m}{2}} B^{\frac{q-L_m}{2}}, \quad (12)$$

где $L_m = mN - l$, $l < N$. Значение $(q - L_m)/2$ в биномиальном коэффициенте в выражении (12) должно быть целым числом. Это требование приводит к двум возможным типам ряда в выражении (12) для четных и нечетных целых чисел:

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2q)!} \binom{2q}{q+s} x^{2q} = I_{2s}(2x), \quad (13)$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2q+1)!} \binom{2q+1}{q+s} x^{\frac{2q+1}{2}} = I_{2s-1}(2\sqrt{x}), \quad (14)$$

где $I_s(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, откуда находим:

$$\Psi = \Psi_0 N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{mN-l}{2}} I_{mN-l}(2\sqrt{AB}) \exp[i(mN - l)\varphi]. \quad (15)$$

Кроме того, в плоскости $z = 0$, можно выразить переменные AB и A/B через безразмерные параметры R_0 и $\bar{\alpha}$:

$$\sqrt{AB} = \frac{r\sqrt{(R_0^2 - \bar{\alpha}^2)}}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{A}{B} = \frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}}. \quad (16)$$

При $N > l$ основной вклад в волновую функцию дают первые три члена ряда с $m = 0, \pm 1$, если отношение смещения к радиусу перетяжки мало $r_0/\rho < 1$ и параметры R_0 и $\bar{\alpha}$ являются малыми ($R_0, \bar{\alpha} \ll 1$). В противном случае необходимо сравнивать последующий и предыдущий члены ряда прежде, чем оборвать суммирование. Однако, в реальных случаях вклад в волновую функцию, как правило, дает конечное число членов ряда. Поэтому данное семейство внеосевых гауссовых пучков можно рассматривать как комбинированный пучок Бесселя-Гаусса, распространяющийся вдоль оси z .

Выражение (15) дает возможность более подробно рассмотреть частные случаи комбинированного семейства гауссовых пучков, и с помощью компьютерного моделирования проанализировать структуру такого семейства при изменении характерных параметров.

2. Самоподобие и структурная устойчивость

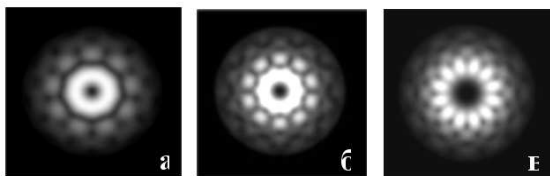


Рис. 2. Семейства внеосевых гауссовых пучков при $z = 0$, $r_0 = 0.3$ мм, $\rho = 1$ мм; а) $N = 9$, $l = 2$, $\alpha = 6 \times 10^{-3}$ рад; б) $N = 10$, $l = 3$, $\alpha = 8 \times 10^{-3}$ рад; в) $N = 12$, $l = 5$, $\alpha = 8 \times 10^{-3}$ рад

и фокусировке распределение интенсивности в поперечном сечении семейства пучков зависит от нескольких параметров. При заданном значении числа пучков N , орбитального числа l и знака угла α , такими параметрами являются координата z , величины смещения r_0 и угла наклона осей пучков α . При вариации этих параметров может изменяться число и тип фазовых сингулярностей поля. Принято считать [9], что состояние физической системы является структурно устойчивым относительно слабой вариации некоторых параметров, если число и тип критических точек в системе при этом не изменяется. Критическими точками сингулярных пучков с высокими значениями топологического заряда являются фазовые сингулярности. Таким образом, будем считать, что семейство внеосевых пучков является структурно устойчивым, если при слабом изменении параметров угла α и смещения r_0 не изменяется число оптических вихрей и величины их топологических зарядов.

При заданном значении координаты $z = \text{const}$ и изменении параметров угла α и смещения r_0 возможны два случая: 1) слабое изменение параметров угла α и смещения r_0 приводит к изменению числа и типа особых точек в семействе; 2) характер особых точек не меняется. Первый случай относится к структурно неустойчивым семействам [9]. Второй случай характеризует структурно устойчивое состояние поля.

При фиксированных параметрах $\alpha = \text{const}$ и $r_0 = \text{const}$ и меняющейся координате z (распространение и фокусировка пучка) также возможны два случая. В первом случае картина распределения интенсивности поля не меняется с точностью до масштабных преобразований и углового поворота картины в целом. Вторым случаем, более общим, характеризуется несинхронным изменением положений особых точек в семействе без изменения их числа и типа. Первый случай соответствует самоподобным пучкам [10]. Вторым случаем характеризует несамоподобные пучки.

Таким образом, симметричное семейство сфазированных пучков можно разделить на следующие четыре типа: 1) структурно устойчивое самоподобное семейство пучков; 2) структурно неустойчивое самоподобное семейство; 3) структурно

Семейство, состоящее из N внеосевых синхронизированных гауссовых пучков, формирует сетку оптических вихрей, в которой особое место занимает осевой вихрь. Рисунок 2 демонстрирует семейства внеосевых пучков с различными значениями N и l , полученные с помощью компьютерного моделирования. При распространении вдоль оси z

устойчивое несамоподобное семейство; 4) структурно неустойчивое несамоподобное семейство пучков.

Компьютерное моделирование показало, что семейство синхронизированных внеосевых гауссовых пучков может сохранять свое распределение интенсивности относительно распространения и фокусировки с точностью до масштабных преобразований и поворота, т.е. является самоподобным, если выполняется условие:

$$|\bar{\alpha}| = R_0 \quad \text{или} \quad |\alpha| z_0 = r_0, \quad (17)$$

где $z_0 = k\rho^2/2$ — длина Рэлея.

Для доказательства самоподобия семейства пучков при выполнении условия (17) запишем выражение для волновой функции (15), раскрывая переменные AB и A/B :

$$\Psi = \Psi_0 N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN-l}{2}} I_{mN-l} \left(2R\sqrt{R_0^2 - \bar{\alpha}^2} \right) \exp [i (mN - l) \varphi],$$

где $R = r/\rho$, $\Psi_0 = \frac{z_0}{Z} \exp \left(ik \frac{r^2 + \rho^2(R_0^2 - \bar{\alpha}^2)}{2Z} + ikz \right)$. Это выражение значительно упрощается при $R_0^2 - \bar{\alpha}^2 \rightarrow 0$, так как $\lim_{\xi \rightarrow 0} I_{mN-l}(2\xi) = \xi^{|mN-l|}$:

$$\Psi = \Psi_0 N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN-l}{2}} \left(R\sqrt{R_0^2 - \bar{\alpha}^2} \right)^{|mN-l|} \exp [i (mN - l) \varphi]. \quad (18)$$

Выражение (18) представляет суперпозицию волновых функций самоподобных оптических вихрей, распространяющихся вдоль общей оси. Согласно работе [10] любая суперпозиция соосных спиральных (самоподобных) пучков также является спиральным (самоподобным) пучком.

Раскроем сумму:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 N \sum_{m=-\infty}^{-1} \left(\frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN-l}{2}} R^{|mN-l|} [(R_0 - \bar{\alpha})(R_0 + \bar{\alpha})]^{\frac{|mN-l|}{2}} \exp [i (mN - l) \varphi] + \\ &+ \Psi_0 N \left(\frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN-l}{2}} R^{|mN-l|} [(R_0 - \bar{\alpha})(R_0 + \bar{\alpha})]^{\frac{|mN-l|}{2}} \exp [i (mN - l) \varphi] \Big|_{m=0} + \\ &+ \Psi_0 N \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN-l}{2}} R^{|mN-l|} [(R_0 - \bar{\alpha})(R_0 + \bar{\alpha})]^{\frac{|mN-l|}{2}} \exp [i (mN - l) \varphi]. \end{aligned} \quad (19)$$

В волновую функцию (17) различные члены ряда вносят разные вклады. Рассмотрим каждую сумму (19) в отдельности при $|\bar{\alpha}| \rightarrow R_0$ не забывая, что $N \geq 2l$ и $l > 0$:

1) Первое слагаемое в выражении (19) соответствует случаю $m < 0$ и прини-

мает вид:

$$\begin{aligned}
 & \Psi_0 N \sum_{m=-\infty}^{-1} \left(\frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN-l}{2}} R^{|mN-l|} [(R_0 - \bar{\alpha})(R_0 + \bar{\alpha})]^{\frac{|mN-l|}{2}} \exp [i (mN - l) \varphi] = \\
 & = \Psi_0 N \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{R_0 - \bar{\alpha}}{R_0 + \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN+l}{2}} R^{(mN+l)} [(R_0 - \bar{\alpha})(R_0 + \bar{\alpha})]^{\frac{mN+l}{2}} \exp [i (-mN - l) \varphi] = \\
 & = \Psi_0 N \sum_1^{\infty} (R_0 - \bar{\alpha})^{mN+l} R^{(mN+l)} \exp [-i (mN + l) \varphi]
 \end{aligned} \tag{20}$$

2) Второе слагаемое в (19) соответствует случаю $m = 0$:

$$\Psi_0 N \left(\frac{R_0 - \bar{\alpha}}{R_0 + \bar{\alpha}} \right)^{\frac{l}{2}} R^l [(R_0 - \bar{\alpha})(R_0 + \bar{\alpha})]^{\frac{l}{2}} \exp [-i l \varphi] = \Psi_0 N (R_0 - \bar{\alpha})^l R^l \exp [-i l \varphi] \tag{21}$$

3) третье слагаемое в (19) соответствует $m > 0$ и может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
 & \Psi_0 N \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{R_0 + \bar{\alpha}}{R_0 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{mN-l}{2}} R^{|mN-l|} [(R_0 - \bar{\alpha})(R_0 + \bar{\alpha})]^{\frac{|mN-l|}{2}} \exp [i (mN - l) \varphi] = \\
 & = \Psi_0 N \sum_{m=1}^{\infty} (R_0 + \bar{\alpha})^{mN-l} R^{mN-l} \exp [i (mN - l) \varphi]
 \end{aligned} \tag{22}$$

Если $R_0 - \bar{\alpha} = 0$, $\bar{\alpha} > 0$, то вклад в волновую функцию вносят только положительные члены ряда, без нулевого $m > 0$ (22). Если $R_0 + \bar{\alpha} = 0$, $\bar{\alpha} < 0$, то вклад в общую сумму вносят как отрицательные (20), так и нулевой (21) члены ряда $m \leq 0$. Однако, учитывая быструю сходимость рядов в виде степенной функции, можно считать, что в случае $R_0 - \bar{\alpha} = 0$, $\bar{\alpha} > 0$ основной вклад в выражение (19) вносит первый член ряда $m = 1$, а в случае $R_0 + \bar{\alpha} = 0$, $\bar{\alpha} < 0$ - нулевой $m = 0$. Тогда волновую функцию в выражении (19) можно с большой точностью представить в виде:

$$\Psi \approx \Psi_0 N \left\{ (R_0 - \bar{\alpha})^l R^l \exp [-i l \varphi] + (R_0 + \bar{\alpha})^{N-l} R^{N-l} \exp [i (N - l) \varphi] \right\}. \tag{23}$$

Из выражения (23) следует, что при условии (17) топологический заряд вихря на оси семейства Q задается простым выражением и связывает между собой орбитальное число l и число пучков в семействе N :

$$Q = \begin{cases} \text{sign}(\alpha) (N - |l|), & \text{если } |\bar{\alpha}| = R_0, \quad N > 2l, \quad (\alpha l) > 0 \\ \text{sign}(\alpha) (-l), & \text{если } |\bar{\alpha}| = R_0, \quad N \geq 2l, \quad (\alpha l) \leq 0 \end{cases}. \tag{24}$$

Выражение (24) описывает все возможные случаи поведения семейств внеосевых гауссовых пучков при условии (17). Таким образом, условие (17) соответствует условию самоподобия семейства внеосевых пучков [10]. Однако, авторы работы [10] заранее постулируют условие, при котором пучок самовоспроизводится при распространении, и опираясь на него, получают решения для класса самоподобных пучков. На основании их подхода принципиально не возможно исследовать преобразование структуры пучков при отклонении параметров системы от условий самоподобия.

Метод формирования семейства внеосевых пучков, представленный в данной работе, позволяет говорить не только о самоподобии комбинированного пучка при распространении, но еще и о топологической устойчивости семейства пучков при небольших вариациях его параметров: угла наклона α , радиуса перетяжки ρ и смещения r_0 . Так в случае небольшого отклонения параметров от условия (17): $|\bar{\alpha}| = R_0 \pm \delta$, $\delta \rightarrow 0$ при $(\alpha l) > 0$, пучок остается топологически структурно устойчивым при распространении и фокусировке, т.е. в центре пучка всегда сохраняется оптический вихрь с зарядом $-l$.

Если же $(\alpha l) \leq 0$, то пучок становится топологически структурно неустойчивым относительно вариации параметров системы около положения $|\bar{\alpha}| = R_0$ (17). Действительно, на оси семейства при выполнении условия самоподобия (17) формируется вихрь с топологическим зарядом $(N - |l|)$, где $N \geq 2l$. Малейшее изменение параметров пучка $|\bar{\alpha}| = R_0 \pm \delta$, $\delta \rightarrow 0$ приводит к расщеплению осевого вихря на N периферийных вихрей и один осевой с топологическим зарядом равным орбитальному числу $-l$.

3. Топологические реакции, протекающие в семействе вблизи условия самоподобия

Рассмотрим семейство внеосевых гауссовых пучков на структурную устойчивость и неустойчивость при выполнении условия (17) с помощью компьютерного моделирования. Для примера рассмотрим семейство пучков с $N > 2$, где теперь будет играть важную роль фазовый обход семейства, а также положим $N > 2l$. Каждая пара пучков в семействе формирует цепочку единичных оптических вихрей (рис.3), которые лежат на прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего центры пучков ортогонально этому отрезку. Пусть $N = 3$, $l = 1$ вблизи условия самоподобия (17), тогда согласно (22) можно выделить два основных случая:

1) $(\alpha l) > 0$. В данном случае, при выполнении условия (17) в семействе пучков формируется осевой вихрь равный разности числа пучков и орбитального числа $Q = (N - |l|) = 2$. Знак его заряда совпадает со знаком угла α . При распространении вдоль оси z распределение интенсивности такого семейства пучков в поперечном сечении сохраняется с точностью до масштабных преобразований и поворота, т.е. является самоподобным. Это отчетливо видно на рисунке 4.

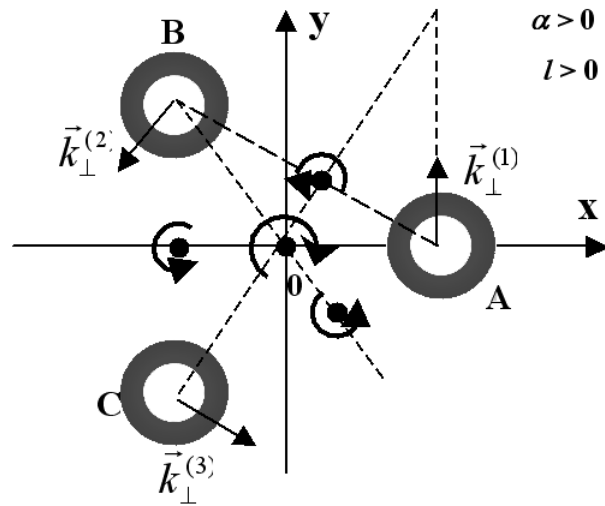


Рис. 3. Формирование осевого оптического вихря и цепочки вихрей в семействе трех внеосевых наклонных гауссовых пучков с $l = 1$.

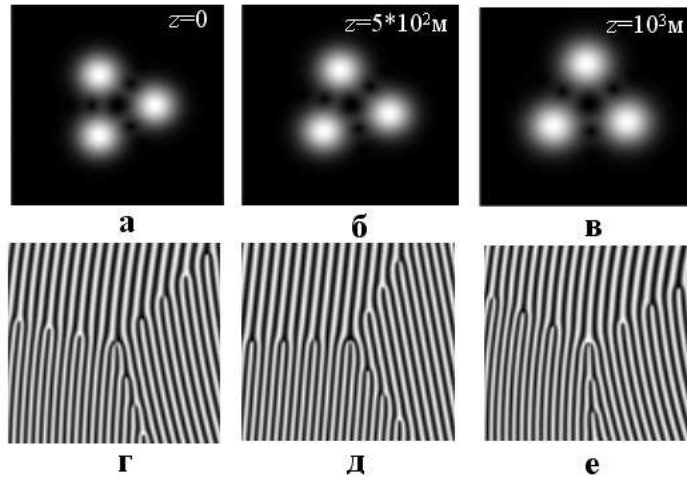


Рис. 4. Распределение интенсивности (а–в) и фазовые портреты (г–е) самоподобного структурно неустойчивого семейства внеосевых гауссовых пучков ($N = 3$, $l = 1$, $\alpha > 0$) при распространении вдоль оси z .

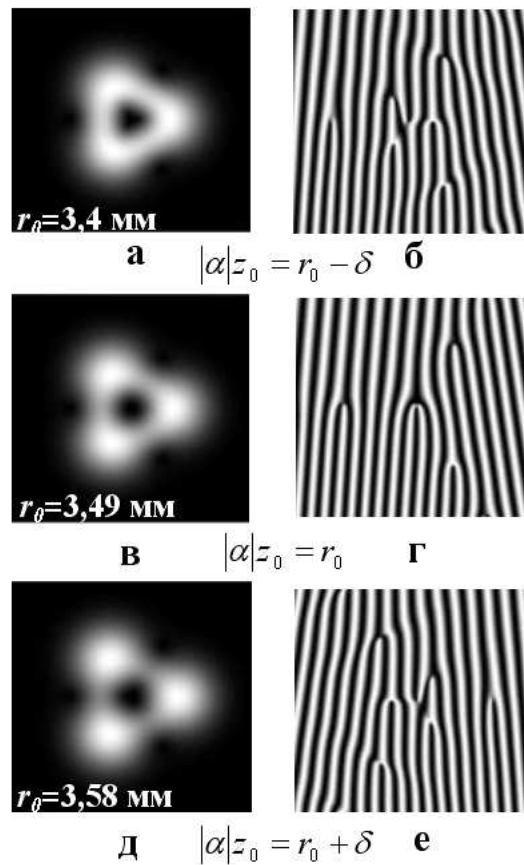


Рис. 5. Распределение интенсивности (а,в,д) и фазовые портреты (б,г,е) структурно неустойчивого семейства внеосевых гауссовых пучков ($N = 3$, $l = 1$, $\alpha > 0$).

Для того чтобы проанализировать семейство внеосевых гауссовых пучков на структурную устойчивость и структурную неустойчивость необходимо посмотреть, как себя будет вести структура поля при изменении параметров семейства от условия (17). В качестве варьирующегося параметра выберем параметр смещения осей пучков r_0 . Так, при $|\alpha| z_0 = r_0 \pm \delta$, $\delta \rightarrow 0$, двойной оптический вихрь распадается на четыре единичных оптических вихря: осевой и три периферийных вихря (рис. 5,а,б). Причем, знак топологического заряда центрального вихря противоположен знаку зарядов периферийных вихрей. Т.е. малейшее изменение параметров от условия (17) приводит к распаду осевого оптического вихря на $(N + |l|)$ вихрей: N внеосевых вихрей и осевой вихрь равный орбитальному числу l . При этом заметим, что полный топологический заряд системы, с учетом знаков вихрей в процессе топологических реакций, остается неизменным.

Таким образом, рассмотренное семейство внеосевых пучков соответствует структурно неустойчивому случаю относительно вариации параметров семейства, так как малейшие изменения параметров в семействе от условия (17) приводят к изменению топологической структуры поля (изменение числа и тип особых точек).

2) $(l\alpha) \leq 0$. В семействе с $N = 3$, $l = 1$, $\alpha = -5 \times 10^{-2}$ рад, на оси формируется вихрь с единичным топологическим зарядом и знаком заряда, совпадающим со знаком периферийных вихрей (рис. 6,а,г). Исследование поведения семейства, в котором соблюдается условие (17), показало, что такие семейства являются самоподобными, также как и в случае с $(\alpha l) > 0$, при распространении вдоль оси z (рис. 6).

Однако, данный случай имеет существенное преимущество в отличие от предыдущего. А именно, при изменении параметров семейства, например величины смещения r_0 или угла α от условия (17), топологические реакции не происходят. Это отчетливо видно на рисунке 7.

На рис. 8 показаны характерные интерференционные картины для семейства, состоящего из трех пучков с различными значениями параметра смещения r_0 и знака орбитального числа l , но с заданным значением координаты z ($z = \text{const}$).

Кривые на рисунке 8 соответствуют условию $|\alpha| \frac{kr^2}{2} = r_0$ (17).

Всякие отклонения параметров семейства пучков от условия самоподобия (17) приводят к резкому изменению величины топологического заряда Q осевого вихря, если $(l\alpha) > 0$ (верхняя кривая), а именно три периферийных вихря приближаются к осевому и сливаются в один вихрь при пересечении кривой. Если же $(l\alpha) \leq 0$, структурные преобразования в семействе отсутствуют, число и тип интерференционных “вилки” не меняется, структурных изменений не происходит (нижняя кривая).

Картины распада осевого вихря в структурно неустойчивом семействе в семействе с большим числом пучков приведены на рис.9. При условии (17), на оси семейства формируется вихрь с топологическим зарядом равным $Q = N - |l|$, который в процессе реакций сохраняется.

Наиболее наглядно структурные преобразования в семействе пучков вблизи условия (17) при $z = \text{const}$ проиллюстрированы на примере траекторий оптические

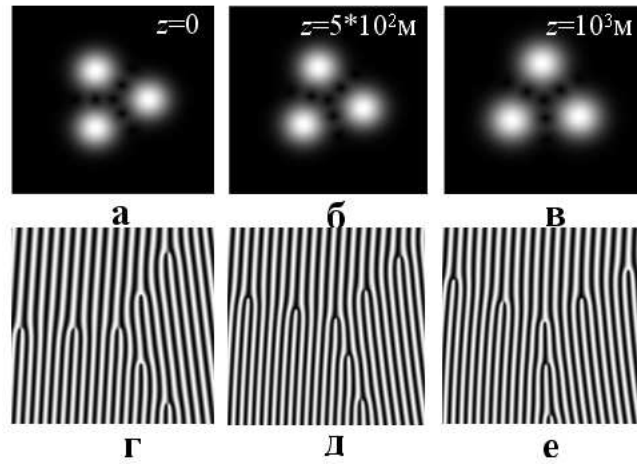


Рис. 6. Распределение интенсивности (а–в) и фазовые портреты (г–е) самоподобного структурно устойчивого самоподобного семейства внеосевых гауссовых пучков ($l\alpha \leq 0$) при распространении вдоль оси z .

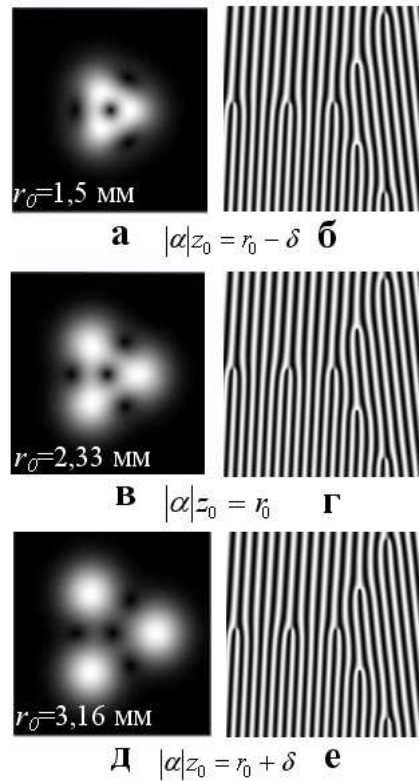


Рис. 7. Распределение интенсивности (а,в,д) и фазовые портреты (б,г,е) структурно устойчивого семейства внеосевых пучков $N = 3$, $l = 1$, ($l\alpha \leq 0$) при различных значениях r_0 , $\delta = 0.83 \text{ мм}$.

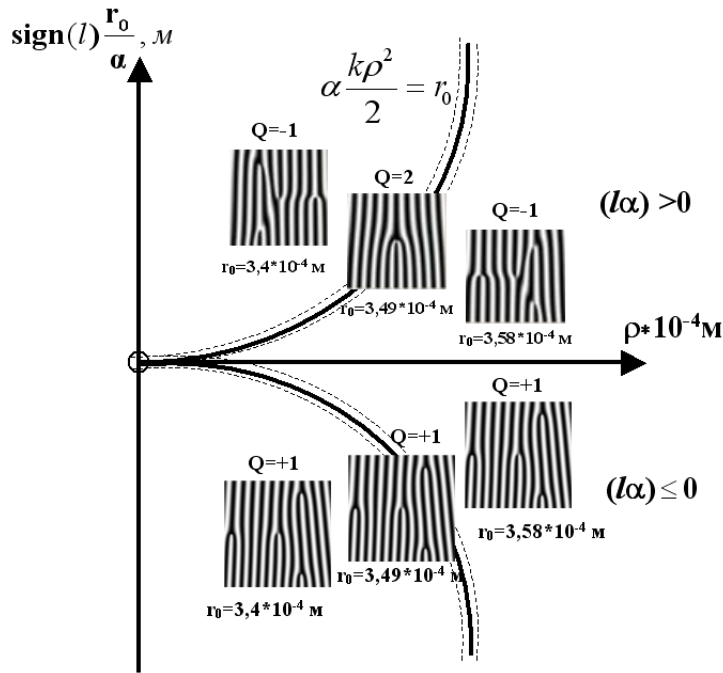


Рис. 8. Диаграмма структурных преобразований поля, возникающих вблизи условия (2.24). Картины интерференции соответствуют слабым изменениям параметра смещения r_0 при $N = 3$, $l = 1$, $\rho = 2 \times 10^{-4}$ м, $\alpha = \pm 1.7 \times 10^{-3}$ рад, $z = 0$ вблизи условия самоподобия.

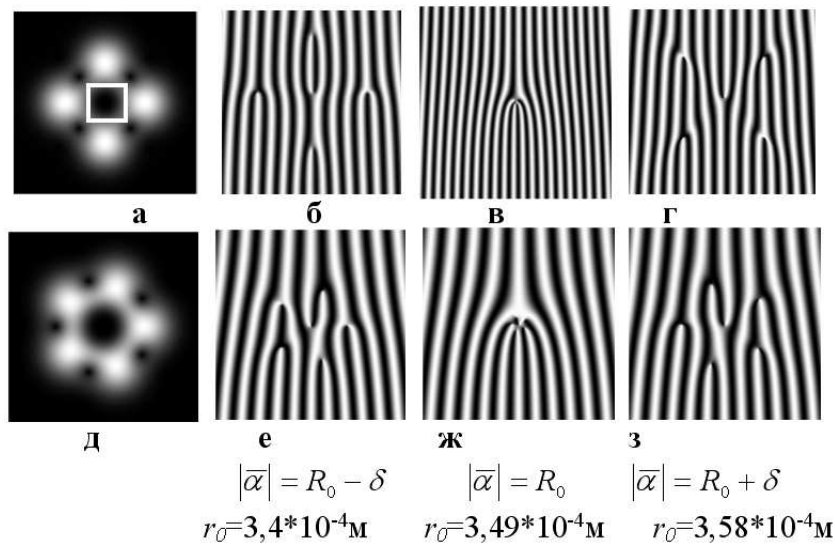


Рис. 9. Распределение интенсивности (а,д) и фазовые портреты (б-г,е-з) структурно неустойчивого семейства внеосевых пучков с $(\alpha > 0$: (а-г) с $N = 4$, $l = 1$ и (д-з) $N = 5$, $l = 1$ вблизи условия (17), $\delta = 0.09$.

ских вихрей, построенных в координатах $\{x, y, \beta\}$, где $\beta = R_0/|\alpha|$. На рис. 10,а изображены траектории семейства трех пучков при $l = +1$. Каждая ветвь траектории до точки $\beta = 1, x = y = 0$ лежит в одной и той же плоскости. При приближении параметра β к единице, все траектории сходятся на осевой траектории $x = y = 0$. В соответствии с условием (22) в этой точке заряд вихря равен $Q = N - |l| = 2$ со знаком противоположным исходному осевому вихрю.

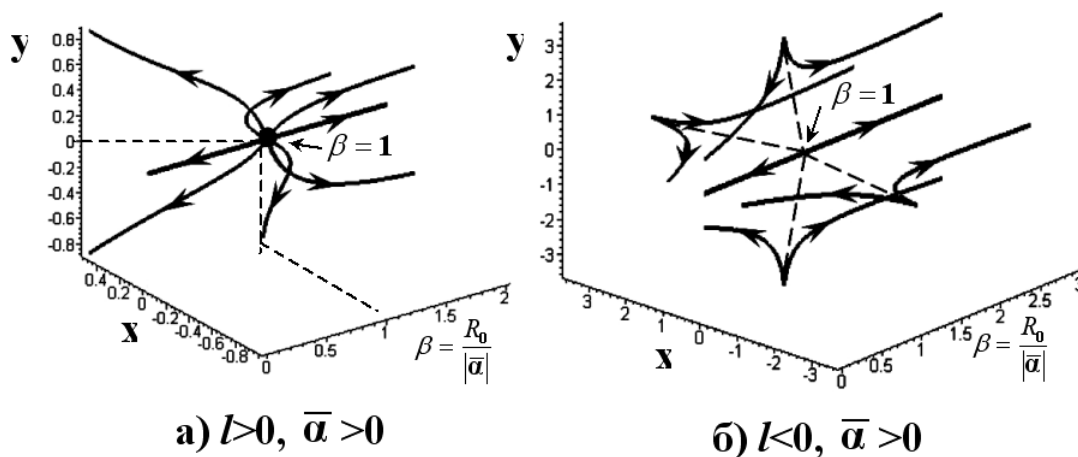


Рис. 10. Траектории оптических вихрей в пространстве с координатами (x, y, β) где: а) $N = 3, l = 1, \alpha > 0$; б) $N = 4, l = -1, \alpha > 0$.

Слабое изменение параметра β ($\beta > 1$) приводит к возникновению новых $(N + |l|)$ вихрей (N периферийных, а также осевой вихрь, заряд которого равен l). Для данного случая это связано с появлением новых четырех ветвей траекторий вихрей (рис.10а). Каждая ветвь траекторий лежит в новой плоскости. Заряды вихрей на каждой их четырех траекторий равняются $+1$. Таким образом, точка $\beta = 1, x = y = 0$ соответствует точке структурно неустойчивого самоподобного семейства пучков.

Совсем иной характер траекторий приведен на рисунке 10,б. Он соответствует случаю $N = 4, l = -1$, т.е. $(\alpha l) < 0$. В комбинированном пучке вблизи оси наблюдается четыре ветви траекторий. Вблизи условия $\beta = 1$ периферийные траектории начинают отталкиваться от осевой траектории, но не испытывают разрыва. Для $\beta > 1$, траектории сначала приближаются к осевой ветви, а затем постепенно начинают удаляться. Структурные преобразования в пучке отсутствуют. Семейство пучков оказывается самоподобным при условии, если $\beta = 1$. При этом, осевой траектории всегда соответствует вихрь, переносащий топологический заряд равный орбитальному числу l . Осевую траекторию окружает N траекторий периферийных вихрей с единичными топологическими зарядами.

4. Экспериментальное исследование семейства лазерных пучков, полученных методом компьютерно-синтезированных голограмм

Для экспериментального исследования семейства синхронизированных внеосевых пучков использовался наиболее распространенный метод формирования сингулярных пучков — метод компьютерно-синтезированных голограмм. Для изготовления голографического транспаранта семейств пучков изначально были построены их фазовые картины в плоскости $z = 0$. На рисунке 11,а,г,ж приведены несколько фазовых портретов внеосевых семейств с различными значениями N и l . Затем интерферограммы перефотографировались на полимерную пленку с размером 2×2 мм. Далее свет от полупроводникового лазера с длиной волны $\lambda = 0.532$ мкм и мощностью 5 мВт направлялся на голографический транспарант (рис.12). Голограмма располагалась на расстоянии 1 м от лазера, так что радиус перетяжки пучка ρ , падающего на нее равен 0.5 мм. Гауссов пучок, прохо-

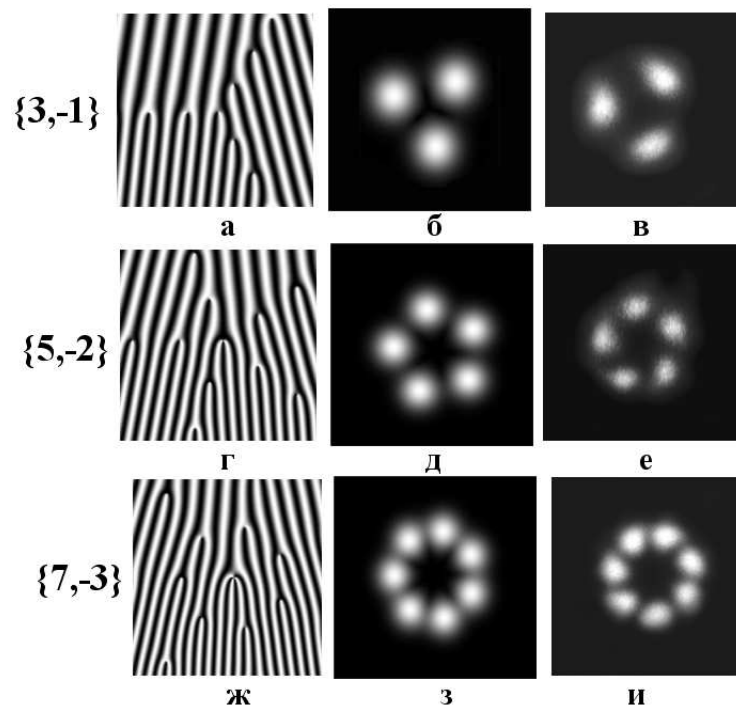


Рис. 11. Семейства внеосевых гауссовых пучков с различными значениями $\{N, l\}$ при $r_0 = 2 \times 10^{-2}$ м, $\alpha = 1.7 \times 10^{-5}$ рад, $\rho = 2 \times 10^{-4}$ м: фазовые портреты (а,г,ж); теоретические (б,д,з) и экспериментальные (в,е,и) распределения интенсивности при $z = 2$ м.

дя через транспарант, образовывал дифракционную картину: максимум, несущий основной гладкий пучок, на который приходилась основная доля излучения, и следующие дифракционные порядки с более низкой энергетической эффективностью, переносящие семейства внеосевых пучков. Первый дифракционный порядок, необходимый для исследования, выделялся с помощью круглой диафрагмы

с диаметром 2.2 мм. Затем полученное изображение на необходимом расстоянии (вплоть до 8 м) проецировалось на CCD камеру, сопряженную с компьютером.

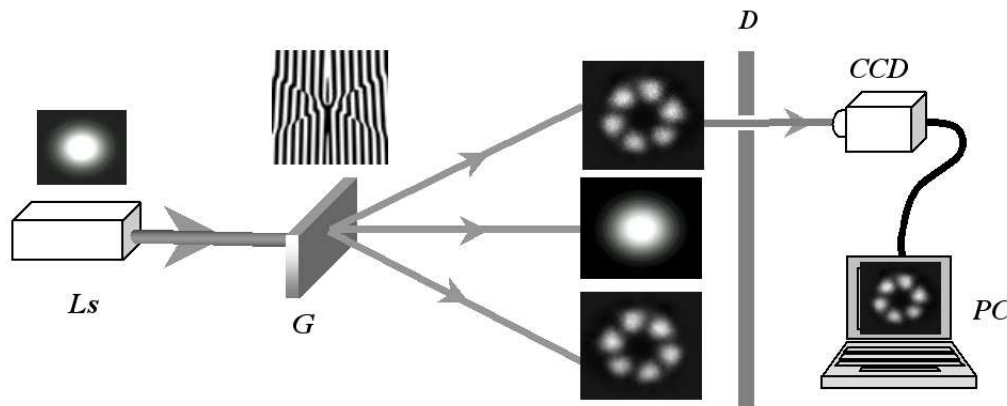


Рис. 12. Схема экспериментальной установки: Ls — лазер с $\lambda = 0.532$ мкм, G — голографический транспарант, D — диафрагма, CCD — CCD камера, PC — компьютер.

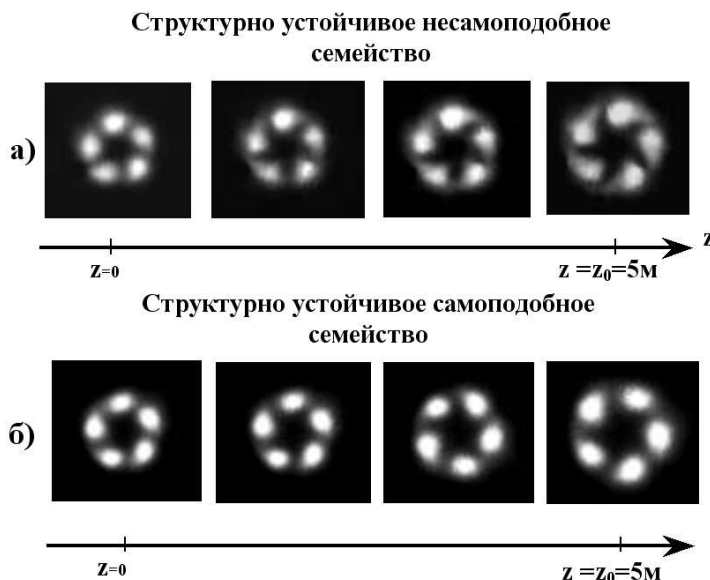


Рис. 13. Экспериментально полученные распределения интенсивности в структурно устойчивом несамоподобном ($\alpha = 10^{-3}$ рад) (а) и структурно устойчивом самоподобном ($\alpha = 1.7 \times 10^{-4}$ рад) (б) семействах при свободном распространении: $N = 5$, $l = -1$, $\rho = 2 \times 10^{-4}$ м, $r_0 = 3.5 \times 10^{-4}$ м, $\lambda = 0.63$ мкм, $z_0 = 5$ м — длина Рэлея.

На рисунке 11,в,е,и показаны экспериментально полученные распределения интенсивности семейств внеосевых пучков с различными значениями N и l , которые хорошо согласуются с соответствующими им, теоретически построенными, распределениями интенсивности (рис. 11,б,д,з).

Типичное поведение экспериментально полученных структурно устойчивых несоподобных и структурно устойчивых самоподобных семейств приведено на рис. 13. Распределения интенсивности (рис. 13,а) представляют структурно устойчивое семейство из пяти пучков, в котором не выполняется условие самоподобия (17). При свободном распространении структура такого семейства изменяется, а именно наблюдается небольшое искажение в периферийных точках, однако дополнительные особые точки не появляются. Совершенно иначе себя ведет структурно устойчивое самоподобное семейство. На рис. 13,б представлено семейство с $N = 5$, $l = -1$, в котором выполняется условие самоподобия (17). Семейство пучков было исследовано при свободном распространении вдоль оси z вплоть до 7 м (длина Рэлея z_0 для данного случая равна 5 м). Как видно из рисунка, распределение интенсивности такого семейства при свободном распространении сохраняется с точностью до масштабных преобразований и поворота.

Заключение

В данной статье было рассчитано и проанализировано поле семейства гауссовых пучков, оси которых лежат на поверхности гиперboloида вращения. Показан способ формирования таких семейств методом компьютерно-синтезированных голограмм.

Экспериментально и теоретически показано, что семейство внеосевых гауссовых пучков является самоподобным, т.е. сохраняет свое распределение интенсивности в поперечном сечении при распространении вдоль оси z , если выполняется условие равенства нормированного угла наклона $\bar{\alpha}$ и нормированного смещения R_0 осей пучков: $|\bar{\alpha}| = R_0$. Показано, что при выполнении данного условия величина осевого вихря в семействе определяется соотношением числа пучков N , орбитального числа l , угла наклона α и смещения r_0 осей пучков относительно общей оси симметрии, а также существенно зависит от знака произведения орбитального числа на угол наклона пучков ($l\alpha$). Так, если $(l\alpha) > 0$, то на оси семейства формируется оптический вихрь с топологическим зарядом равным $(N - |l|)$, знак которого совпадает со знаком угла наклона α . Данный случай соответствует структурно неустойчивому семейству, так как малейшие отклонения от условия $|\bar{\alpha}| = R_0$ приводят к распаду осевого вихря. Если же $(l\alpha) \leq 0$, то в семействе всегда формируется осевой вихрь с топологическим зарядом равным орбитальному числу l , вне зависимости от вариации параметров семейства. Такой случай характеризует структурно устойчивое семейство.

Список цитируемых источников

1. *Nye J.F., Berry M.V.* Dislocations in wave trains // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1974. — V.336. — P.165–190.
2. *Баженков В.Ю., Васнецов М.В., Соскин М.С.* Лазерные пучки с винтовыми дислокациями волнового фронта // Письма в ЖЭТФ. — 1990. — Т.52. — В.8. — С.1037–1039.
3. *Malmqvist L. and Henz H.M.* Trapped particle optical microscopy // Optics Communications. — 1994. — V.105. — P.19–24.

4. *Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Linear Theory of Optical Vortices // Optical Vortices. Nova Science Publishers, Inc. NY: Vasnetsov M. and Staliunas K. (eds.) — 1999. — P.1–35.
5. *Beijersbergen M., Coerwinkel R., Kristensen M., Woerdman J.* Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate // Optics Communications — 1994. — V.112. — P.321–327.
6. *Ram Oron, Nir Davidson, Asher A. Friesem and Erez Hasman.* Transverse mode shaping and selection in laser resonators // E. Wolf, Progress in Optics V.42. — 2001. — P.325–387.
7. *Vasnetsov M., Pas'ko V. and Soskin M.* Analysis of orbital angular momentum of a misaligned optical beam // New J. Phys. — 2005. — V.7, N46. — P.2.
8. *Volyar A.V., Shvedov V.G., Izdebskaya Ya.V., Fadeyeva T.A., Rubass A.F.* Structure and Orbital Angular Momentum of Singular Array of Gaussian Beams // Ukr. J. Phys. Opt. — 2006. — V.7, N3. — P.79–88.
9. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложение. М., “Мир”, 1980. — 608с.
10. *Абрамочкин Е.Г., Волосников В.Г.* Спиральные пучки света // Успехи физических наук. — 2004. — Т.174, N12. — С.1273–1300.

Получена 24.12.2007