Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 281–288

УДК 517.98

Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры

Ф. С. Стонякин

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: fedyor@mail.ru*

Аннотация. В работе вводится понятие антикомпактного множества (антикомпакта) в пространствах Фреше. Приведены примеры систем антикомпактов в сепарабельных гильбертовых и банаховых пространствах. Детально исследованы общие свойства антикомпактных множеств. Доказано существование системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше. На базе полученных результатов в классе сепарабельных пространств Фреше доказан аналог теоремы Ула о выпуклости и компактности замыкания образа безатомной векторной меры ограниченной вариации в некотором пространстве, порождённом антикомпактом.

Ключевые слова: пространство Фреше, антикомпактное множество, эллипсоиды, безатомная векторная мера, мера ограниченной вариации, теорема Ула.

Введение

Для отображений в конечномерные пространства хорошо известна теорема А. А. Ляпунова о выпуклости образа безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$, заданной на σ-алгебре подмножеств Σ некоторого пространства Ω [1]. Этот результат имеет многочисленные приложения в оптимальном управлении, математической экономике, математической статистике, теории игр [2] — [5]. Ввиду этого известно множество модификаций и обобщений этого результата в конечномерных пространствах, в том числе и относительно современных [8] — [14]. В частности, отметим работу с аналогами теоремы Ляпунова для некоторых специальных подмножеств $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [14].

Однако, как показывает множество примеров, теорема Ляпунова неверна для векторных мер со значениями в бесконечномерных пространствах [1, 6, 7]. При этом существует множество аналогов указанной теоремы Ляпунова для бесконечномерных банаховых пространств, которые используются, в частности, в работах [4, 5]. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Ляпунова.* В каждом таком пространстве E для любой счётно-аддитивной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow E$ замыкание $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло [6, 7]. Свойством Ляпунова обладают, например, пространства c_0, ℓ_p ($p \in [1;2)\bigcup(2;+\infty)$) [7]. Но указанным свойством не обладает множество важнейших пространств, в т.ч. и сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2. Также известна теорема Ула о выпуклости множества $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ в случае мер ограниченной вариации со значениями в пространствах со свойством Радона-Никодима (см. [6], с. 266).

Теорема 1. *(**Uhl J.J.**) Пусть E — банахово пространство со свойством Радона-Никодима. Для всякой безатомной векторной меры ограниченной вариации $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow E$ множество $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ выпукло и компактно в E.*

Но, как свойство Ляпунова, так и свойство Радона-Никодима существенно ограничивают класс рассматриваемых пространств (ни тому, ни другому свойству не удовлетворяют, например, пространства $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$).

Мы же ставим задачу получить аналог теоремы Ула в бесконечномерном случае без столь существенных сужений класса пространств. Наш подход к основан на новом понятии *антикомпактного множества* в пространствах Фреше. Поясним суть этого подхода. Весьма известно понятие компактного множества в топологических векторных пространствах. Такие множества обладают рядом весьма важных свойств, не присущих ограниченным множествам в бесконечномерных пространствах. Это как раз и приводит ко многим проблемам бесконечномерного анализа таким, как проблема переноса теоремы Ляпунова о выпуклости образа векторной меры (описана выше), проблема переноса теоремы Радона-Никодима о представимости абсолютно непрерывного отображения в виде интеграла Бохнера, проблема Крейна-Мильмана существования крайних точек ограниченных замкнутых множеств, не являющихся компактными и др. Ввиду этого возникла идея «сделать» ограниченные замкнутые множества компактами, но в другом пространстве (причём важно, чтобы это пространство было достаточно удобным). Аппаратом для реализации отмеченной идеи как раз и служит понятие антикомпактного множества, которому в частности и посвящена настоящая работа. На базе этой системы антикомпактов как раз и удаётся, в некотором смысле, решить проблему, связанную с переносом теоремы Ула в классе сепарабельных пространств Фреше.

Работа состоит из введения и трёх основных разделов. В первом разделе вводится понятие антикомпактного множества в пространствах Фреше, приведены два примера систем антикомпактов — системы эллипсоидов в сепарабельных гильбертовых пространствах, а также системы эллипсоидов в пространстве непрерывных функций $C[0;1]$.

Второй раздел посвящён исследованию свойств антикомпактных множеств. Основной результат раздела 2 — существование системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше E (теорема 2).

И, наконец, в третьем разделе работы получен аналог теоремы Ула о выпуклости в классе сепарабельных пространств Фреше — показана выпуклость и компактность замыкания в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$ множества значений векторной меры ограниченной вариации (теорема 4).

1. Определение и примеры антикомпактов

Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств пространства Фреше E.

Определение 1. Назовем множество $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ *антикомпактным* в E, если:

(i) $p_{\overline{C}}(a) = 0 \iff a = 0$ в E (или $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot \overline{C} = \{0\}$);

(ii) любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$. Здесь под $p_{\overline{C}}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $\overline{C} \subset E$ и считаем что $E_{\overline{C}}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$. *Примем обозначение:* $\overline{\mathcal{C}}(E)$ *— набор антикомпактных подмножеств пространства Фреше* E.

Приведём примеры антикомпактных множеств (или, сокращённо, антикомпактов) в некоторых пространствах.

Пример 1. Пусть $\mathrm{E} = H \cong \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство. В таких пространствах существует система так называемых эллипсоидов [15]. Пусть
$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...)$ — последовательность положительных чисел. Для каждой такой последовательности ε эллипсоидом называется следующее множество

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell_2 \ \mid \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} < \infty \right\}.$$

Доказано, что C_ε компактно тогда и только тогда, когда $\varepsilon \to 0$ (см. [15]). Отметим, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порождённая C_ε в пространстве $H_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1. *Если $\varepsilon \to \infty$, то C_ε — антикомпакт.*

Доказательство. Действительно, поскольку любое ограниченное множество
$B \subset H$ поглощается единичным шаром, то, не уменьшая общности рассуждений, вместо B достаточно рассмотреть единичный шар

$$B = \left\{ x = \{x_k\} \in \ell_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 1 \right\}.$$

Ясно, что $p_B(\cdot) = \|\cdot\|_{\ell_2}$. Так как

$$\|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \cdot \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widetilde{x}_k^2|^2}{\widetilde{\varepsilon}_k^2},$$

где $\widetilde{\varepsilon}_k = \frac{1}{\varepsilon_k}$ и $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n, ...) \in H_{C_\varepsilon}$, $\widetilde{x}_k = \frac{x}{\varepsilon_k}$ $(\varepsilon \to +\infty)$, то ввиду $\widetilde{\varepsilon}_k \to 0$ при $k \to \infty$ имеем, что — B компакт в E_{C_ε}, т.е. C_ε антикомпактно в H. $\square$

Замечание 1. Предыдущий пример позволяет объяснить смысл термина «антикомпактность». Дело в том, что условие компактности эллипсоида $\varepsilon \to 0$ в некотором смысле есть противопоставление условию антикомпактности эллипсоида $\varepsilon \to +\infty$.

Теперь покажем, как можно строить примеры антикомпактов в банаховых пространствах. Для этого рассмотрим пример в «типичном» банаховом пространстве непрерывных функций $C[0;1]$ в том смысле, что по теореме Банаха-Мазура, всякое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно подпространству $\widetilde{E} \subset C[0;1]$.

Пример 2. Для произвольной числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ назовём (невырожденным) *$\overline{\delta}$-эллипсоидом* в $\widetilde{E} \subset C[0;1]$ множество

$$C_\varepsilon = \left\{ \varphi \in \widetilde{E} \ \mid \ |\varphi(0)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_\varphi^2(\delta_k)}{\varepsilon_k^2} \leq 1 \right\},$$

где $\omega_\varphi(\delta) = \sup\limits_{|x_1-x_2|\le\delta} |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|$ — δ-модуль непрерывности функции φ (при $\delta > 0$), $\delta = \{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю.

Ясно, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порождённая C_ε в $E_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|\varphi\|_{C_\varepsilon} := \left(|\varphi(0)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_\varphi^2(\delta_k)}{\varepsilon_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Отметим, что если последовательность $\varepsilon \to 0$, то C_ε — компакт в $\widetilde{E}$ (отметим, что обратное утверждение неверно). Действительно, в таком случае $\omega_\varphi(\delta_k) \to 0$ при $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$ равномерно по φ. Замкнутость C_ε в пространстве $\widetilde{E}$ следует из непрерывной зависимости $|\varphi(0)|$ и $\omega_\varphi(\delta)$ от $\|\varphi\|$. Компактность C_ε вытекает из теоремы Арцела-Асколи об описании компактов в пространстве $C[0;1]$.

Покажем, что возможно выбрать последовательность $\varepsilon \to \infty$ так, чтобы получить антикомпактное множество.

Лемма 2. *Существует последовательность $\varepsilon \to \infty$ такая, что множество C_ε антикомпактно в $\widetilde{E}$.*

Доказательство. Выберем такую последовательность $\varepsilon^0 = (\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, ..., \varepsilon_{0n}, ...)$, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{0k}^2}$ был сходящимся и рассмотрим гильбертово пространство $E_{C_{\varepsilon^0}}$, порождённое эллипсоидом C_{ε^0}. Так как $|\varphi(0)| \le \|\varphi\|$ и $\omega_\varphi(\delta_k) \le 2\|\varphi\|$, то (здесь $\|\varphi\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |\varphi(t)|$)

$$\|\varphi\|_{C_{\varepsilon^0}} \le 2\|\varphi\| \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{0k}^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, C_{ε^0} содержит некоторый шар в $\widetilde{E}$ с центром в нуле. Далее, согласно предыдущему примеру, в пространстве $E_{C_{\varepsilon^0}}$ можно построить систему антикомпактов $C_{\varepsilon\cdot\varepsilon^0}$, где $\varepsilon \to +\infty$. □

Отметим, что результат леммы 2 является базовым для одного из основных результатов работы — существования системы антикомпактов в произвольном сепарабельном пространстве Фреше (теорема 2).

2. Общие свойства антикомпактов

Данный пункт посвящён детальному исследованию свойств антикомпактных множеств. Начнём с очевидных свойств антикомпактов в произвольных пространствах Фреше.

Предложение 1. Если множество $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ и $A \in L(E;F)$, где E и F — пространства Фреше, то $A(\overline{C}) \in \overline{\mathcal{C}}(F)$.

Предложение 2. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ сходится в E, то она сходится и в $E_{\overline{C}}$ для произвольного $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.

Доказательство. Отметим лишь, что для любой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ и для некоторого числа $K>0$ верно неравенство $\|\cdot\|_{\overline{C}} \le K\cdot\|\cdot\|$ для всякого антикомпактного множества $\overline{C}\in\overline{\mathcal{C}}(E)$. □

Переходим к свойствам шкалы пространств, порождённых антикомпактами. Начнём с очевидного свойства.

Предложение 3. Если $\overline{C}\in\overline{\mathcal{C}}(E)$, $\overline{C}'\in\Omega_{ac}(E)$, $\bigcap\limits_{\lambda>0}\lambda\cdot\overline{C}'=\{0\}$ и $\overline{C}\subset\overline{C}'\Longrightarrow\overline{C}'\in\overline{\mathcal{C}}(E)$.

Переходим к изложению основного результата раздела — доказательству существования антикомпактного множества во всяком сепарабельном пространстве Фреше.

Теорема 2. *В любом сепарабельном пространстве Фреше существует антикомпактное подмножество.*

Доказательство. 1) Начнём со случая банахова пространства E. По теореме Банаха-Мазура, всякое сепарабельное банахово пространство $E\cong\widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$ — некоторое подпространство пространства непрерывных функций $C[0;1]$. В качестве искомого антикомпакта можно взять любой антикомпактный $\overline{\delta}$-эллипсоид в $\widetilde{E}\subset C[0;1]$ (их существование доказано в лемме 2).

2) Перейдём теперь к случаю, когда E — пространство Фреше. Напомним, что любое пространство Фреше E со счётной определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_j\}_{j=1}^{\infty}$ является проективным пределом последовательности банаховых пространств $\widehat{E}_j$, где $\widehat{E}_j$ являются пополнениями по фактор-нормам фактор-пространств $E_j=E/ker\|\cdot\|_j$ $(j\in\mathbb{N})$.

В силу п.1 настоящего доказательства $\forall j\in\mathbb{N}$ существует антикомпакт $\widehat{C}_j$, т.е. $E_j\hookrightarrow\hookrightarrow E_{\widehat{C}_j}$. Не уменьшая общности рассуждений, систему антикомпактов $\left\{\widehat{C}_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ можно выбрать неубывающей (если нужно, рассмотрев вместо этого систему множеств $\{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\widehat{C}_j\}_{N=1}^{\infty}$, которые антикомпактны в силу предложения 3). При таком соглашении:

$$\|\cdot\|_{\widehat{C}_j}\ge\|\cdot\|_{\widehat{C}_k}\quad\forall k\ge j. \tag{2.1}$$

Пусть $\widehat{E}=\prod\limits_{\widehat{C}_j}E_{\widehat{C}_j}$ — прямое произведение пространств $E_{\widehat{C}_j}$. Рассмотрим множество

$$\widehat{C}:=\left\{x\in\widehat{E}\quad|\quad\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2}<\infty.\right\}$$

Поскольку E — проективный предел пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому E может быть плотно и непрерывно вложено в $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}}\widehat{E}_j$, то всякое ограниченное множество $C\subset E$ может быть инъективно (ввиду отделимости пространства E) и непрерывно вложено в произведение $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}}j^2\widehat{C}_j$, которое компактно в $\widehat{E}$ по теореме Тихонова в топологии прямого произведения. Далее, в силу (2.1) и сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}$ можно проверить компактность C в пространстве $E_{\widehat{C}}$, порождённом и пополненном относительно нормы

$$\|x\|_{\widehat{C}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2}.$$

Поэтому C — непустой абсолютно выпуклый компакт в $\widehat{E}$, т.е. $\widehat{C}$ — антикомпакт в E. $\square$

3. Аналог теоремы Ула в пространствах Фреше

Данный пункт посвящён основному результату работы — аналогу теоремы о выпуклости множества векторной меры ограниченной вариации в произвольных сепарабельных пространствах Фреше. Перед изложением основных результатов раздела приведём некоторые вспомогательные понятия и результат из работы [17]. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств S (эти обозначения будем использовать далее). Напомним ([18], стр. 104), что *полной вариацией векторной меры* $\nu : \Sigma \to E$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ в E называется отображение $|\nu| : \Sigma \to [0; +\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\| \quad \forall A \in \Sigma, \tag{3.1}$$

где супремум берётся по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$. Легко проверить, что отображение $|\nu|$ — конечная счётно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [18], стр. 104). Обозначим через $V(S, E)$ множество всех векторных мер $\nu : \Sigma \to E$, которые имеют конечную полную вариацию $|\nu|(S) < \infty$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ на E (см. (3.1)). Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$. Эти пространства были введены и детально изучались И.В. Орловым (см., например [15, 16]).

Определение 2. Будем говорить, что ν имеет *(сильную) компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S, E)$, $|\nu|_C$ — полная вариация векторной меры ν относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Для того, чтобы сформулировать необходимый результат из [17], нам потребуется новая характеристика для мер $\nu \in V_K(S, E)$, а именно — *(сильная) компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S, E)$ множество всех зарядов $\nu \in V(S, E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности векторной меры относительно* μ, то есть таких, что мера $|\nu| \ll \mu$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = 0$ или $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; (\mu(A) < \delta) \Rightarrow |\nu|(A) < \varepsilon$).

Определение 3. Будем говорить, что векторная мера $\nu \in V_K(S, E)$ *(сильно) компактно абсолютно непрерывна на* S *относительно* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S, E_C)$. Примем обозначение: $\nu \in AC_K(S, E)$. Приведём важный вспомогательный результат из [17].

Теорема 3. *Если $\nu \in AC_K(S,E)$, то найдётся такое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : S \to E$, что $\forall A \in \Sigma$ верно*

$$\nu(A) = (B)\int\limits_A f(t)d\mu(t). \tag{3.2}$$

Переходим к финальному результату работы — аналогу теоремы Ула в произвольных сепарабельных пространствах Фреше (мы не используем ограничение на класс пространств, но замыкание множества берём не в исходном пространстве, а а в некотором пространстве, порождённом антикомпактом). Этот результат утверждает выпуклость и компактность замыкания в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$ ($\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$) множества значений векторной меры в сепарабельных пространствах Фреше.

Теорема 4. *Пусть — сепарабельное пространство Фреше, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ — безатомная векторная мера ограниченной вариации. Тогда замыкание множества*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma) = \{\overrightarrow{\mu}(A) \ \mid \ A \in \Sigma\}$$

выпукло и компактно в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает, что в любом сепарабельном пространстве Фреше существует антикомпакт $\overline{C}$. Тогда из условия $\overrightarrow{\mu} \in V(S,E)$ следует, что $\overrightarrow{\mu}$ имеет компактную вариацию в $E_{\overline{C}}$. Более того, если обозначить через $|\overrightarrow{\mu}(\cdot)|_{\overline{C}}$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$ в пространстве $E_{\overline{C}}$, то несложно понять, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно числовой меры $|\overrightarrow{\mu}(\cdot)|_{\overline{C}}$. Следовательно, $\overrightarrow{\mu} \in AC_K(\Sigma, E_{\overline{C}})$ и поэтому $\overrightarrow{\mu}$ представима в виде в виде неопределённого интеграла Бохнера по теореме 3. Доказываемое утверждение теперь вытекает из выпуклости образа векторной меры, представимой в виде интеграла Бохнера (см. [6], стр. 266, доказательство теоремы 10). □

Список цитируемых источников

1. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Известия АН СССР. — 1940. — Т.4. — С. 465–478.
2. *Ляпунов А. Н.* Теорема А.А. Ляпунова о выпуклости значений мер // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 257–261.
3. *Кутателадзе С. С.* Теорема Ляпунова, зоноиды и бэнг-бэнг // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео». — 2011. — С. 262–264.
4. *Аркин В. И., Левин В. Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. — 1972. — Т.27, вып.3.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, вып.6. — С. 51 — 116.
6. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector Measures, Providence, Amer. Math. Soc., 1977, 320 p.
7. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. — 615 с.
8. *Neyman J.* Un thr'eor'em d'existence / J. Neyman // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1946. — Vol. 222. — P.843 — 845.
9. *Steinhaus H.* Sur la division pragmatique / H. Steinhaus // Econometrica. — Vol. 17(Supplement: Report of the Washington Meeting). — 1949.— P. 315 – 319.
10. *Arzi Orit.* Throw One's Cake and Eat It Too / Orit Arzi, Yonatan Aumann Yair Dombb. // arXiv:1101.4401v2 [cs.GT] 11 Nov 2011.

11. *Mossel Elchanan.* Truthful Fair Division / Elchanan Mossel, Omer Tamuz // arXiv:1003.5480v2 [cs.GT] 31 Jul 2010.
12. *Chen Y.* Truth, justice, and cake cutting / Yiling Chen, John Lai, David C. Parkes, and Ariel D. — Procaccia.Association for the Advancement of Artificial Intelligence. 2010.
13. *Fabio Maccheroni.* How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations. Maccheroni Fabio, Marinacci Massimo // Social Choice and Welfare. – Springer-Verlag GmbH — 2003. — P. 457 – 465.
14. *Dai Peng, Feinberg Eugene A.* Extension of Lyapunov's convexity Theorem to subranges / Peng Dai Mossel, Eugene A. Feinberg // arXiv:1102.2534v1 [math.PR] 12 Feb 2011.
15. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы. / И. В. Орлов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 29. — С. 165–175.
16. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Limit form of Radon-Nikodym property is true in arbitrary Frechet space // Contemporary Math. Fundamental Directions. — 2010. — Vol. 37. — P. 55–69.
17. *Стонякин Ф. С.* Сильные компактные характеристики и предельная форма свойства Радона-Никодима для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше/ Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки.» — 2010. — т. 23(62), № 1. — С. 131 – 149.
18. *Вахания Н. Н.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

Получена 20.10.2013