

УДК 593.3

Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде.

I. Структура волнового поля на поверхности скважины и в дальней зоне

А. Р. Сницер

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, НИИ проблем геодинамики, Крымский научный центр НАН Украины
Симферополь 95007. E-mail: snitser_arnold@yahoo.com

Аннотация. Рассматривается задача излучения упругих волн при нормальном однородном гармоническом нагружении кругового кольца на поверхности цилиндрической полости в упругой среде. Поле перемещений представляется контурными интегралами. Проведен анализ колебаний и волн на поверхности полости. Методом седловой точки получены асимптотические выражения для перемещений и напряжений в дальнем поле. Введена ортогональная система координат, в которой P -волнам отвечают радиальные компоненты перемещений, а SV -волнам — окружные компоненты. Приведены диаграммы направленности P - и SV -волн в дальнем поле и показаны их зависимости от частоты и геометрических параметров источника.

Введение

Задачи излучения волн, анализ их направленности и энергетических характеристик вызывает большой научный и прикладной интерес в электродинамике, акустике, динамической теории упругости и других разделах физики. В механике сплошной среды наиболее изучены задачи об излучении и рассеянии акустических (звуковых) волн. Так в монографиях [10, 18, 23] дается достаточно полное представление о таких задачах и приведена обширная библиография.

Задачи излучения волн в твердых деформируемых средах также достаточно хорошо изучены. Однако, в последних задача излучения усложняется, так как кроме деформаций сжатия (как в акустике), имеет место деформация сдвига, что приводит к возникновению не только продольных, но и поперечных (сдвиговых) упругих волн. Впервые задачу об излучении упругих волн вызванных сосредоточенным источником на поверхности полупространства решил Лэмб [25]. Эта задача в различных постановках с усложнением распределения нагрузки по поверхности полупространства позднее трансформировалась в более сложные —

смешанные (контактные) задачи и не потеряла интерес до настоящего времени. Соответствующая библиография по данным задачам обширна.

Остановимся на задаче Лэмба, обстоятельно исследованной аналитически в монографии В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [9]. В монографии рассмотрено излучение упругих волн, вызванных нормальной гармонической нагрузкой бесконечной полосы $|x| \leq a$ на поверхности $z = 0$ полупространства $z > 0$, в то время как на остальной части границы напряжения отсутствуют. В такой постановке получено формальное решение задачи, удовлетворяющее уравнению Ламэ и граничным условиям. Далее проведены контурные преобразования полученных интегралов в комплексной плоскости с учетом условий излучения и переноса энергии поверхностной волны Рэлея от места приложения нагрузки. Методом наискорейшего спуска получено представление волнового поля в дальней зоне. Оригинальными специальными методами получено разделение энергии излучения по типам волн. Проведенный детальный анализ структуры волнового поля, его направленности и энергетических характеристик, связанных с параметрами нагрузки, дает большие возможности практического пользования полученных результатов.

Подобные задачи в настоящее время представляют также практическую ценность в нефтедобывающей и газодобывающей промышленности. Давно известно, что вибрационно-сейсмические процессы различной природы оказывают влияние на нефтегазовые залежи. На основе многочисленных наблюдений за сейсмической активностью различных участков Земли была теоретически обоснована целесообразность сейсмоакустического воздействия на нефтяные пласты с целью увеличения их нефтеотдачи. Такие исследования проводились в Институте физики Земли АН СССР и Кубанском государственном университете еще в 70–80-е годы, другими НИИ, а так же в США [11]. В качестве виброисточников использовались специальные виброплатформы, предназначенные для вибропросвечивания Земли. С целью увеличения нефтеотдачи применялись также воздействия упругими колебаниями на призабойную зону пласта с помощью спускаемых в скважину специальных устройств. О положительных практических результатах и эффективности воздействия упругих колебаний для повышения производительности и реанимирования скважин можно ознакомиться в [11].

Отметим также, что воздействие упругими колебаниями на угольные пласты приводит к их дегазации, что уменьшает вероятность внезапных выбросов в шахтах и одновременно позволяет утилизировать шахтный метан. Последний факт актуален для создания современных энергосберегающих комплексов с когенерацией на базе газопоршневых двигателей [6].

Эффективность обработки пластов упругими колебаниями в значительной степени определяется качеством передачи колебательной энергии в системе скважина-пласт. Так повышение эффективности ввода энергии на низких частотах связано с изменением характеристик возбуждения (параметров источника — излучателя упругих волн) и оптимальным использованием резонансных свойств скважины и пластовых систем.

Вопросы эффективности ввода энергии упругих колебаний в среду и направ-

ленного вибросейсмического воздействия на неглубоко залегающие залежи наиболее изучены при воздействиях силовой нагрузкой на поверхность Земли [1, 5, 16]. В серии работ [2–4, 7, 8] ставится и решается задача разработки эффективного метода формирования остронаправленного излучения в стратифицированном упругом полупространстве посредством варьирования характеристик поверхностных виброисточников.

Передача энергии в среду для глубоко залегающих пластов осуществляется при размещении источника излучения в скважине. Поэтому прикладной интерес приобретают задачи о цилиндрических излучателях и источниках, расположенных в скважинах. Приведем некоторые известные работы такого направления.

Процессы передачи энергии в среду через скважину при низкочастотном излучении сопряжены с трудностями, связанными с "малостью" скважины как излучателя по сравнению с длиной возбуждаемой волны. Если источник упругих волн излучает из скважинной жидкости, то поле, создаваемое в окружающем пласте, эквивалентно полю бесконечного цилиндра, на поверхности которого возбуждена одна из возможных колебательных мод. Решение такой задачи приводится в [18].

Решения задач излучения бесконечного и конечного цилиндров для акустических сред получено в монографии Е. Л. Шендерова [23]. Задача излучения звука цилиндром конечной длины с учетом граничных условий на торцах рассмотрена в [10]. В монографии В. Новацкого [15] рассмотрена задача об излучении волн в упругой среде при нормальном гармоническом нагружении всей поверхности бесконечной цилиндрической полости. Показано, что при этом в среде возбуждается только радиальная составляющая волны перемещений, т. е. продольная волна. В [17] приведены результаты исследования задачи о цилиндрическом излучателе, который моделируется гармонически нагруженным (по нормали к поверхности) кольцевым участком поверхности бесконечной цилиндрической полости в упругой среде. Приводятся частотные характеристики перемещений в точках, лежащих на прямой перпендикулярной оси цилиндра.

Задача о сосредоточенном торсионном нагружении поверхности скважины в бесконечной упругой среде исследовалась в [27]. Здесь получены зависимости окружных перемещений и напряжений как функций расстояния от источника при заданной его частоте, распределение перемещений вдоль поверхности полости, а также частотные характеристики относительных перемещений и напряжений в заданной точке среды. В работе [21] рассмотрена аналогичная задача для полупространства с полостью. Проведен анализ волнового поля в зависимости от координаты точки наблюдения и от глубины источника. Представлены частотные зависимости волн напряжений и перемещений. Задача о нормальном гармоническом нагружении конечной части поверхности цилиндрической полости в упругой среде изучалась в [20, 26].

Отметим, что в работах о цилиндрическом излучателе в упругой среде (с отличным от нуля модулем сдвига) мало изученными являются вопросы направленности излучения, зависимости структуры и значений волнового поля от параметров источника, и особо важный аспект — энергия излучения, передаваемая в среду, и

варьирование ее распределения по типам волн. Такие важные для практики аспекты задачи излучения изучены в плоском случае в упомянутой выше работе [9]. Предлагаемая в настоящей статье работа посвящается исследованию указанных аспектов для цилиндрического источника, т. е. исследованию направленности волнового поля его энергетических характеристик и их взаимосвязь с параметрами источника и упругой среды.

Большой объем материала потребовал его логического и физического разделения на две части, которые представляются в двух публикациях. В первой части исследуется структура волнового поля на поверхности полости и в дальней зоне, а также приводятся диаграммы направленности излучения и анализ их зависимости от параметров виброизлучателя. В последующем выпуске будут получены энергетические характеристики цилиндрического излучателя: разделение общей, проводимой от внешнего источника, мощности излучателя по типам распространяющихся волн и проанализированы зависимости их вкладов от физических и геометрических параметров излучателя.

1. Постановка задачи

В данной работе решается задача о цилиндрическом излучателе, расположенном на части поверхности бесконечной круговой цилиндрической полости в упругой среде. В цилиндрической системе координат среда занимает область $-\infty < z < +\infty, r \geq a$. Упругие свойства среды определяются плотностью ρ , коэффициентом Пуассона ν и константами Ламэ Λ, μ .

Цилиндрический излучатель моделируется кольцевой областью $|z| \leq h$ на поверхности полости $r = a$, к которой по нормали приложена осесимметричная гармоническая нагрузка частоты ω — рис. 1. Остальная поверхность полости свободна от напряжений, так что граничные условия принимают вид:

$$\frac{\sigma_{rr}(r, z)}{2\mu} = f(z) \exp(i\omega t), f(z) \equiv 0, |z| > h, r = a; \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = 0, |z| < \infty, r = a. \tag{1.2}$$

Таким образом, нагрузка (1.1) порождает волны перемещений и напряжений в среде и, как далее будет показано, особые волны на поверхности цилиндрической полости. Нахождение волнового поля смещений и напряжений для такого источника сводится к решению краевой задачи теории упругости для уравнения Ламэ:

$$c_2^2 \nabla^2 \vec{U} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div} \vec{U} = \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \frac{\vec{X}}{\rho}, \tag{1.3}$$

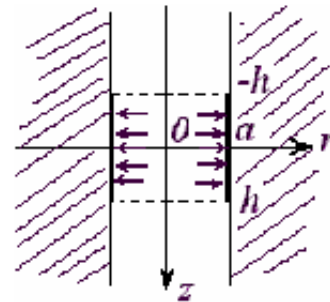


Рис. 1.

где $\vec{U}(r, z)$ — вектор перемещений, \vec{X} — вектор массовых сил, $c_1 = \sqrt{(\Lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорости продольных и поперечных упругих волн.

Перейдем к потенциалам Ламэ [15]:

$$\vec{U} = \text{grad}\psi_0 + \text{rot}\vec{\psi}, \quad \text{div}\vec{\psi} = 0; \quad (1.4)$$

где $\psi_0, \vec{\psi}$ — скалярный и векторный потенциалы, причем:

$$\vec{\psi} = \psi_1\vec{e}_r + \psi_2\vec{e}_\varphi + \psi_3\vec{e}_z. \quad (1.5)$$

Гармонический временной множитель $\exp(i\omega t)$ здесь и далее опускается.

Задача представляет случай осесимметричной деформации в силу чего $\psi_1 = \psi_3 \equiv 0$, $U_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} \equiv 0$. В итоге уравнение Ламэ в отсутствии массовых сил сводится к двум уравнениям Гельмгольца для потенциалов ψ_0, ψ_2 :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \delta_{j0} + \left(k_2^2 - \frac{1}{r^2} \right) \delta_{j2} \right] \psi_j(r, z) = 0, \quad (1.6)$$

где $j = 0; 2$, δ_{jk} — символ Кронеккера; $k_{1,2} = \omega/c_{1,2}$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн.

2. Формальные решения краевой задачи

Потенциалы, удовлетворяющие уравнениям (1.6) разыскиваем в виде:

$$\begin{aligned} \psi_0(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi) H_0^{(2)}(r\beta_1) \exp(i\xi z) d\xi, \\ \psi_2(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\xi) H_1^{(2)}(r\beta_2) \exp(i\xi z) d\xi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

так, что подынтегральные выражения в (2.1) удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности [12] по переменной r при $0 < \xi < k_{1,2}$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial r} + i\beta_{1,2} \psi_{0,2} \right) = 0, \quad \beta_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \xi^2}, \quad (2.2)$$

и затухают когда $r \rightarrow +\infty$ при $\xi > k_{1,2}$. Это достигается, если выбрать положительные значения многозначных функций $\beta_{1,2}(\xi)$. В (2.1) $H_{0,1}^{(2)}(r\beta_{1,2})$ — функции Ханкеля. Граничные условия (1.1), (1.2) в представлении Ламэ имеют вид:

$$\begin{aligned} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + k_2^2 \right] \psi_0 + 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z} &= -2f(z), \\ 2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} - \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right) \psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.3), используя обращения преобразования Фурье, получим плотности интегралов (2.1):

$$A_0(\xi) = -2\bar{f}(\xi) \frac{2\xi^2 - k_2^2}{\xi\beta_1 H_1^{(2)}(a\beta_1)\Delta_0(\xi)}, \quad A_2(\xi) = \frac{-4i\bar{f}(\xi)}{H_1^{(2)}(a\beta_2)\Delta_0(\xi)}. \quad (2.4)$$

Предполагается, что $f(z)$ представима интегралом Фурье:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{i\xi z} d\xi, \quad \bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\xi z} dz. \quad (2.5)$$

В (2.3), $\Delta_0(\xi)$ — определитель Био [15, 24, 29]:

$$\Delta_0(\xi) = 4\xi\beta_2 \left[\frac{1}{a\beta_2} - H_2 \right] - \frac{2\xi^2 - k_2^2}{\xi} \left[\frac{2}{a} + \frac{(2\xi^2 - k_2^2)}{\beta_1} H_1 \right], \quad (2.6)$$

где $H_j = \frac{H_0^{(2)}(\beta_j a)}{H_1^{(2)}(\beta_j a)}$, $j = 1, 2$.

Выражая \vec{U} через потенциалы Ламэ согласно (1.4), получим:

$$U_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\xi)}{\xi\Delta_0(\xi)} \left[(2\xi^2 - k_2^2) \frac{H_1^{(2)}(\beta_1 r)}{H_1^{(2)}(\beta_1 a)} - 2\xi^2 \frac{H_1^{(2)}(\beta_2 r)}{H_1^{(2)}(\beta_2 a)} \right] e^{i\xi z} d\xi, \quad (2.7)$$

$$U_z = \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\xi)}{\beta_1\Delta_0(\xi)} \left[(2\xi^2 - k_2^2) \frac{H_0^{(2)}(\beta_1 r)}{H_1^{(2)}(\beta_1 a)} + 2\beta_1\beta_2 \frac{H_0^{(2)}(\beta_2 r)}{H_1^{(2)}(\beta_2 a)} \right] e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.8)$$

Частный случай: *однородная гармоническая нагрузка по всей поверхности полости.*

Положим в граничном условии (1.1) функцию нагружения независимой от z и действующей по всей поверхности цилиндрической полости, т. е.:

$$f(z) = -p_0/2\mu = const, \quad z \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда трансформанта преобразования Фурье имеет вид: $\bar{f}(\xi) = -\pi p_0 \delta(\xi)/\mu$, и из (2.6) получаем решение, представленное в монографии В. Новацкого [15]:

$$U_r = \frac{p_0}{\mu} \frac{H_1^{(2)}(k_1 r)}{k_2^2 k_1^{-1} H_0^{(2)}(k_1 a) - 2a^{-1} H_1^{(2)}(k_1 a)}, \quad U_z \equiv 0. \quad (2.9)$$

Это означает, что в данном случае цилиндрическая поверхность излучает в радиальном направлении (перпендикулярно оси цилиндра) в окружающую среду только лишь продольные упругие волны.

3. Представления смещений контурными интегралами. Колебания и волны на поверхности полости

Полученные выражения (2.7), (2.8) для перемещений — формальны, т. к., несмотря на выбор ветвей двузначных радикалов $\beta_{1,2}$, они остаются неоднозначными из-за наличия особенности $\xi = \pm\xi_0$, являющейся вещественным корнем дисперсионного уравнения (2.6): $\Delta_0(\xi) = 0$. Этот корень порождает поверхностную волну на полости, которую необходимо добавить к полученному решению. Для полной конкретизации решения задачи, помимо условий излучения, учтенных для продольных и поперечных волн, необходимо не только добавить поверхностную волну, но и потребовать, чтобы ее поток энергии был направлен от места приложения нагрузки.

Для правильного учета направленности поверхностной волны Био, а также эффективного способа вычисления содержащих осциллирующие функции интегралов (2.7), (2.8), перейдем к их представлению контурными интегралами в комплексной плоскости. Такое представление также понадобится в дальнейшем для асимптотического представления решения в дальней зоне.

В тех случаях, когда от профиля нагрузки $f(z)$ существенно зависит результат получаемых нами выражений, мы будем явно задавать ее вид. В данной работе будем рассматривать профиль нагрузки на поверхности $r = a$, независимый от координат φ и z цилиндрической системы координат:

$$f(z) = f_0 = \text{const}, \quad |z| \leq h; \quad f(z) \equiv 0, \quad |z| > h. \quad (3.1)$$

Преобразование Фурье такой функции имеет вид:

$$\bar{f}(\xi) = 2f_0 \frac{\sin(\xi h)}{\xi}. \quad (3.2)$$

Проведем контурные преобразования интеграла (2.7) для радиальной компоненты вектора перемещений. Для этого представим подынтегральные выражения в (2.7) как функции комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$, определенные на 4-х листной римановой поверхности. Следуя принципу предельного поглощения [14], введем малое затухание в среду, так что: $\hat{k}_{1,2} = k_{1,2} - ik'_{1,2}$, где $(0 < k'_{1,2} \ll k_{1,2})$. Тогда точки ветвления $\xi = \pm k_{1,2}$ смещаются в комплексную плоскость. Комплексными становятся и полюса, соответствующие корням уравнения Био (2.6): $\zeta_0 = \pm(\xi'_0 - i\eta'_0)$. Листы римановой поверхности склеены по разрезам, проведенным из 4-х точек ветвления $\zeta = \pm(k_{1,2} - ik'_{1,2})$ двузначных функций $\beta_{1,2} = \sqrt{\hat{k}_{1,2} - \zeta^2}$ в точки $\zeta = \mp i\infty \pm 0$. Заданные выше ветви двузначных радикалов задаются неравенствами:

$$\text{Im}\beta_{1,2} < 0, \quad \text{Re}\beta_{1,2} > 0.$$

Указанный выбор ветвей обеспечивает выполнение условий излучения и затухания решений на бесконечности по координате r . Разрезы проводились вдоль линий:

$Im\beta_{1,2} = 0$, что эквивалентно условиям:

$$Re\beta_{1,2}^2 > 0, \quad Im\beta_{1,2}^2 = 0$$

и соответственно уравнениями для разрезов будут:

$$k_{1,2}^2 - (k'_{1,2})^2 > \xi^2 - \eta^2, \quad \xi \cdot \eta = -k_{1,2} \cdot k'_{1,2}.$$

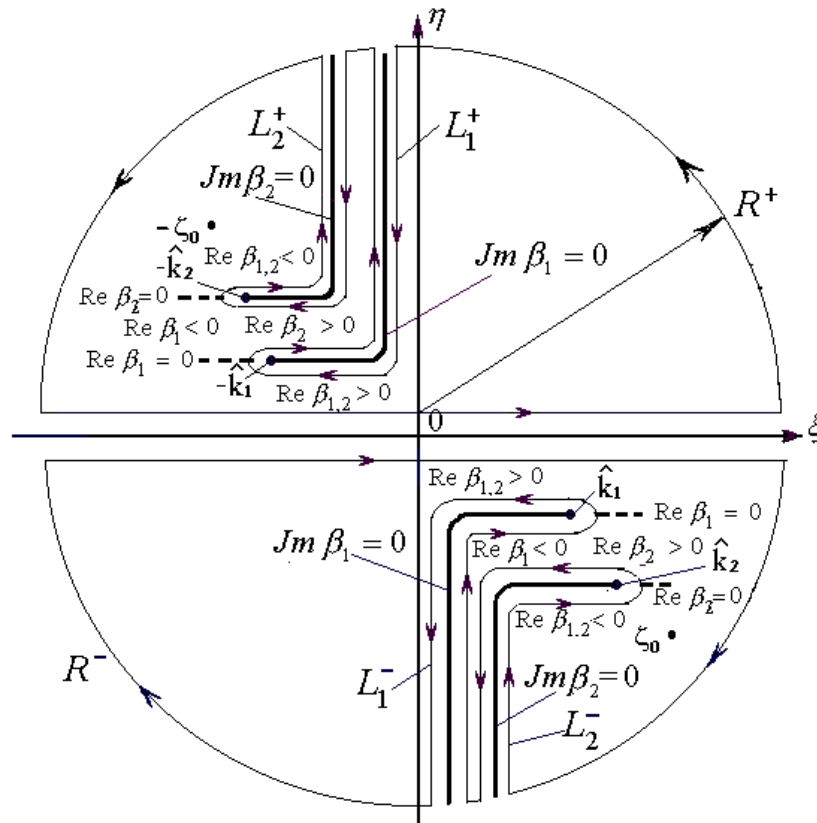


Рис. 2.

Выберем лист римановой поверхности, на котором $Im\beta_1 < 0, Im\beta_2 < 0$. Выразим радиальные перемещения на поверхности полости $r = a$ для фиксированного направления $z > h$. Нетрудно убедиться, что в этом случае с учетом (3.2) подынтегральное выражение в (2.7) удовлетворяет лемме Жордана при $|\zeta| \rightarrow \infty$ для $Im\zeta > 0$, поэтому будем замыкать контур интегрирования в верхней полуплоскости. Тогда интеграл (2.7) по вещественной оси заменяется в верхней полуплоскости интегралами по петлям L_1^+ и L_2^+ , вычетом в точке $\zeta = -\zeta_0$ и интегралом по дуге большого радиуса (R^+), который в силу леммы Жордана исчезает при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Контур интегрирования, полюса и знаки $Re\beta_{1,2}$ на берегах разрезов показаны на рис. 2.

Следует заметить, что множитель $-\frac{\sin(\xi h)}{\xi^2 \Delta_0(\xi)}$, входящий в подынтегральное выражение (2.7), не дает особенности в точке $\xi = 0$. Это становится очевидным после вычисления пределов:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \Delta_0(\xi) = k_2^2 [2a^{-1} - k_2^2 k_1^{-1} H_0^{(2)}(k_1 a) / H_1^{(2)}(k_1 a)] \neq 0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} [\sin(\xi h) / \xi] = h. \quad (3.4)$$

В итоге, после контурных преобразований и предельного перехода $k'_{1,2} \rightarrow 0$, получим:

$$U_r(a, z) = \frac{2ik_2^2 \bar{f}(\xi_0) e^{-i\xi_0 z}}{\xi_0 \Delta_0'(\xi_0)} + \frac{2ik_2^2}{\pi} \left[\int_0^{k_1} \frac{\bar{f}(\xi) e^{-i\xi z}}{\xi |\Delta_0^+(\xi)|^2} (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{k_1}^{k_2} \frac{\bar{f}(\xi) e^{-i\xi z}}{\xi |\tilde{\Delta}_0^+(\xi)|^2} \alpha_2 V_2 d\xi + i \int_0^\infty \frac{\bar{f}(\eta) e^{-\eta z}}{\eta |\Delta_0^+(i\eta)|^2} (\bar{\alpha}_1 \bar{V}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{V}_2) d\eta \right] \quad (3.5)$$

где

$$\Delta_0'(\xi) = (2\xi^2 - k_2^2)^2 (1 + H_1^2) / \beta_1^2 - 4a\xi^2 (1 + H_2^2) + 8(2\xi^2 - k_2^2) (H_2 / \beta_2 - H_1 / \beta_1), \quad (3.6)$$

$$|\Delta_0^+(\xi)|^2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 - c)^2 + (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2)^2, \quad (3.7)$$

$$|\tilde{\Delta}_0^+(\xi)|^2 = (\tilde{\alpha}_1 K + \alpha_2 u_2 - c)^2 + \alpha_2^2 V_2^2, \quad (3.8)$$

$$\alpha_1 = (2\xi^2 - k_2^2)^2 / \xi \beta_1, \quad \alpha_2 = 4\xi \beta_2, \quad c = 2k_2^2 / \xi a, \quad \tilde{\alpha}_1 = (2\xi^2 - k_2^2)^2 / \xi \kappa_1,$$

$$\kappa_1 = \sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad H_{1,2} = H_0^{(2)}(a\beta_{1,2}) / H_1^{(2)}(a\beta_{1,2}), \quad K = K_0(a\kappa_1) / K_1(a\kappa_1),$$

$$u_j = u_j(\beta_j) = \left[J_0(\beta_j a) J_1(\beta_j a) + Y_0(\beta_j a) Y_1(\beta_j a) \right] |H_1^{(2)}(\beta_j a)|^{-2}, \quad (3.9)$$

$$V_j = V_j(\beta_j) = 2/\pi a \beta_j |H_1^{(2)}(\beta_j a)|^2, \quad (3.10)$$

$J_j(x)$, $Y_j(x)$, $H_1^{(1,2)}(x)$ — цилиндрические функции 1-го, 2-го, и 3-го рода. $K_j(x)$ — функции Макдональда.

$$|\Delta_0^+(i\eta)|^2 = (\bar{\alpha}_1 \bar{u}_1 - \bar{\alpha}_2 \bar{u}_2 - \bar{c})^2 + (\bar{\alpha}_1 \bar{V}_1 - \bar{\alpha}_2 \bar{V}_2)^2, \quad (3.11)$$

$$\bar{u}_j = u_j(\bar{\beta}_j), \quad \bar{V}_j = V_j(\bar{\beta}_j), \quad \bar{\beta}_j = \sqrt{\eta^2 + k_j^2},$$

$$\bar{\alpha}_1 = (2\eta^2 + k_2^2)^2 / \eta \bar{\beta}_1, \quad \bar{\alpha}_2 = 4\eta \bar{\beta}_2, \quad \bar{c} = 2k_2^2 / \eta a.$$

Проанализируем структуру полученного выражения (3.5) для радиальной составляющей вектора перемещений на поверхности полости в области $z \in (h, +\infty)$. Первый член в (3.5) представляет бегущую вдоль положительного направления

оси oz , с фазовой скоростью $V = \omega/\xi_0$, поверхностную волну (волну Био). Два последующих члена соответствуют интегральной суперпозиции бегущих волн с волновыми числами $\xi \in (0, k_2)$. Последнее слагаемое — интегральная суперпозиция стоячих волн с комплексной амплитудой экспоненциально затухающих вдоль положительного направления оси oz .

Заметим, что в случае $z \in (-h, -\infty)$ контур интегрирования следует замыкать в нижней полуплоскости (рис. 2). Проведя аналогичные контурные преобразования интеграла (2.7), мы получим качественно аналогичный результат. Теперь бегущие по поверхности волны будут распространяться против положительного направления оси oz , т. е., как и в предыдущем случае, от источника волн.

Получим выражение для радиальной составляющей вектора перемещений на поверхности кольцевой области $|z| \leq h$. На поверхности такой области подынтегральное выражение интеграла (2.7) с учетом вида трансформанты Фурье (3.2) не удовлетворяет лемме Жордана при $|\zeta| \rightarrow \infty$ ни в верхней, ни в нижней полуплоскостях. Поэтому для контурных преобразований интеграла (2.7) необходимо специальное представление его подынтегрального выражения. Можно показать, что при четной функции нагружения $f(-z) = f(z)$ трансформанта Фурье $\bar{f}(\xi)$ представима в виде [9]:

$$\bar{f}(\xi) = f_1(\xi) \exp(i\xi h) + f_1^*(\xi) \exp(-i\xi h), \tag{3.12}$$

$$f_1(\xi) = f_0/i\xi, \quad f_1^*(\xi) = -f_0/i\xi. \tag{3.13}$$

Подставим представление (3.12), (3.13) в выражение (2.7) для $U_r(r, z)$ на поверхности полости $r = a$ и разобьем его на два интеграла:

$$U_r(a, z) = -\frac{k_2^2 f_0}{i\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(z+h)}}{\xi^2 \Delta_0(\xi)} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(z-h)}}{\xi^2 \Delta_0(\xi)} d\xi \right]. \tag{3.14}$$

Данное представление позволяет при контурных преобразованиях интегралов удовлетворить лемме Жордана для 1-го интеграла в верхней полуплоскости, для 2-го — в нижней. Следует заметить, что для случая $z > h$ в подынтегральных выражениях (3.14) появляется дополнительная особенность в точке $\xi = 0$, т. к. теперь лишь предел (3.3) дает константу, а еще одна переменная интегрирования ξ в знаменателе в точке ноль ничем не компенсируется.

Опишем контурные преобразования интегралов (3.14). Первый интеграл в (3.14) заменяется в верхней полуплоскости интегралами по петлям L_1^+ и L_2^+ , вычетом в точке $\zeta = -\zeta_0$, интегралом по дуге большого радиуса R^+ и интегралом по дуге полуокружности малого радиуса ε с центром в начале координат (обход нуля не показан на рис. 2.). После предельных переходов $|\zeta| \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграл по дуге R^+ исчезает в силу леммы Жордана, а интеграл по дуге радиуса ε дает половину вычета в точке $\xi = 0$ со знаком, соответствующим направлению обхода. Второй интеграл в (3.14) преобразуется аналогично в нижней полуплоскости и заменяется

в результате интегралами по петлям L_1^- и L_2^- , вычетом в точке $\zeta = \zeta_0$ и половиной вычета в точке $\xi = 0$ с соответствующим знаком. В итоге после предельных переходов $|\zeta| \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и $k'_{1,2} \rightarrow 0$ вместо интегралов (3.14) получим:

$$U_r(a, z) = 2k_2^2 f_0 \frac{e^{-i\xi_0 h}}{\xi_0^2 \Delta_0'(\xi_0)} \cos(\xi_0 z) - \frac{2k_2^2 f_0}{\xi \Delta_0(\xi)} \Big|_{\xi=0} + \\ + \frac{2k_2^2 f_0}{\pi} \left[\int_0^{k_1} \frac{(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2)}{\xi^2 |\Delta_0^+(\xi)|^2} e^{-i\xi h} \cos(\xi z) d\xi + \int_{k_1}^{k_2} \frac{\alpha_2 V_2}{\xi^2 |\tilde{\Delta}_0^+(\xi)|^2} e^{-i\xi h} \cos(\xi z) d\xi \right], \quad (3.15)$$

где все величины и обозначения описаны выше в (3.6)–(3.10).

Проанализируем структуру радиальных перемещений на поверхности кольцевой области (поверхность нагружения полости).

Первый член в полученном выражении (3.15) представляет стоячую поверхностную волну (волну Био) с комплексной амплитудой, зависящей от координаты z по косинусоидальному закону.

Второе слагаемое в выражении (3.15) обязано вычету в точке $\xi = 0$ и соответствует вынужденным колебаниям кольцевой области $|z| \leq h$ с постоянным, не зависящим от z модулем комплексной амплитуды:

$$M = \left| \frac{2k_2^2 f_0}{\xi \Delta_0(\xi)} \right|_{\xi=0} = 2f_0 \left| \frac{H_1^{(2)}(k_1 r)}{k_2^2 k_1^{-1} H_0^{(2)}(k_1 a) - 2a^{-1} H_1^{(2)}(k_1 a)} \right|_{r=a}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) с точностью до постоянного коэффициента совпадает с модулем комплексной амплитуды колебаний поверхности бесконечной цилиндрической полости в задаче о постоянном нормальном гармоническом нагружении всей поверхности полости $-\infty < z < +\infty$, рассмотренной В. Новацким в [15]. В нашем случае колеблется с постоянной амплитудой поверхность той части полости кольцевой поверхности $|z| \leq h$, к которой приложена нагрузка. Отметим, что в не области нагружения полости ($|z| > h$) такая колебательная мода в радиальной компоненте (3.5) перемещения поверхности полости отсутствовала.

Третье и четвертое слагаемые в выражении (3.15) представляют интегральную суперпозицию стоячих волн (с амплитудой, зависящей от z) на кольцевой поверхности, которые отвечают за излучение в упругую среду объемных волн.

Аналогично преобразованиям интегралов в (2.7) — $U_r(a, z)$, преобразуется выражение (2.8) — компонента перемещений $U_z(a, z)$, которая имеет подобную структуру и в силу этого, а также из-за громоздкости здесь не приводится.

С целью проверки полученных нами результатов были вычислены пределы выражений (3.5) и (3.15) радиальных составляющих перемещений на полости при устремлении радиуса полости к бесконечности: $a \rightarrow \infty$. В этом случае задача об излучении волн нормальным нагружением кольцевой полосы на поверхности скважины в бесконечной упругой среде переходит в задачу Лэмба, о действии на полупространство нормальной нагрузки по бесконечной полосе конечной ширины,

исследованной в монографии [9]. При этом поверхностная волна Био переходит в волну Рэлея [28]:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Delta_0(\xi) = i\Delta_R(\xi)/\xi\beta_1, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \Delta'_0(\xi_0) = -\Delta'_R(\xi_R)/\xi_R\sqrt{\xi_R^2 - k_1^2},$$

где $\Delta_R(\xi)$ — определитель Рэлея. Выражения (3.5) и (3.15) переходят в выражения для нормальных составляющих вектора перемещений на поверхности полупространства вне области нагружения и перемещений на поверхности бесконечной плоскости нагружения соответственно [9].

4. Выражения для смещений в дальнем поле

Вычисление перемещений в дальнем поле представляет интерес для изучения диаграмм направленности излучения и в связи с вопросом о распределении энергии излучения по типам волн. В дальнем поле (из-за больших значений аргументов цилиндрических функций) сильно осциллируют подынтегральные выражения в интегралах, возникающих в результате точных контурных преобразований, описанных выше, что осложняет вычисление компонент перемещений. Использование асимптотического метода наибыстрейшего спуска при вычислении контурных интегралов в комплексной плоскости позволяет получить эффективные выражения для вычисления перемещений и напряжений в дальнем поле. В упомянутой выше задаче Лэмба для полупространства были получены асимптотические выражения смещений в дальнем поле, что позволило разделить и оценить вклады энергий по типам волн. Проведем такой анализ для случая нагружения поверхности цилиндрической полости в бесконечной упругой среде.

Следуя методу наибыстрейшего спуска [22], для оценки перемещений в дальнем поле будем представлять $U_r(r, z)$, $U_z(r, z)$ в комплексной плоскости ζ контурными интегралами вида:

$$I(R) = \int_L \Phi(\zeta) \exp[Rq(\zeta)] d\zeta, \quad (4.1)$$

где $\Phi(\zeta)$ и $q(\zeta)$ — аналитические функции комплексной переменной ζ вдоль пути интегрирования L , уходящего концами в бесконечность; R — большой положительный параметр. С целью такого представления заменим в (2.7), (2.8) функции Ханкеля переменной r их асимптотическими выражениями при $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(\beta r) &\sim \sqrt{2/\pi\beta r} \exp[-i(\beta r - 3\pi/4)], \\ H_0^{(2)}(\beta r) &\sim \sqrt{2/\pi\beta r} \exp[-i(\beta r - \pi/4)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

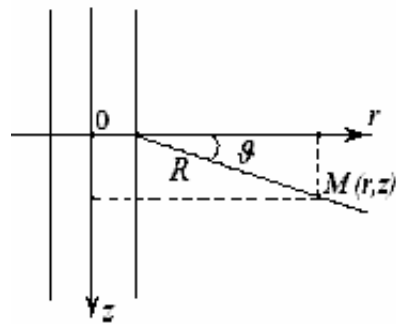


Рис. 3.

Перейдем от цилиндрической системы координат (r, φ, z) — к ортогональной системе координат (R, φ, ϑ) :

$$r = a + R \cos \vartheta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = R \sin \vartheta; \quad (4.3)$$

$$R = \sqrt{(r - a)^2 + z^2}, \quad \varphi = \varphi, \quad \vartheta = \arcsin(z/\sqrt{(r - a)^2 + z^2}). \quad (4.4)$$

Перемещение в дальнем поле будем характеризовать координатами (R, ϑ) — рис. 3. Зависимость от угловой координаты φ , в силу осевой симметрии, по-прежнему отсутствует. В силу сказанного, представим радиальное перемещение (2.7) в виде интеграла типа (4.1) на вещественной оси в координатах (R, ϑ) :

$$U_r(R, \vartheta) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{f_0}{\sqrt{a + R \cos \vartheta}} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(\xi) \exp[Rq_j(\xi)] d\xi \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= -(2\xi^2 - k_1^2)\varphi_1(\xi), \quad \Phi_2(\xi) = 2\xi^2\varphi_2(\xi), \\ \varphi_j(\xi) &= \frac{\sin(\xi h) \exp[i(3\pi/4 - \beta_j a)]}{\xi^2 \sqrt{\beta_j} \Delta_0(\xi) H_1^{(2)}(\beta_j a)}, \end{aligned}$$

$$q_j(\xi) = i(\xi \sin \vartheta - \beta_j \cos \vartheta), \quad \beta_j = \sqrt{k_j^2 - \xi^2}. \quad (4.6)$$

Пути интегрирования по вещественной оси в (4.5) заменяем путями по петлям L_1^+ и L_2^+ в комплексной плоскости ζ (рис. 2). Заметим, что в дальнем поле — $R = \sqrt{(r - a)^2 + z^2} \gg h$, $z > h$ так, что для выполнения леммы Жордана при контурных преобразованиях интегралов (4.5) не надо пользоваться представлением (3.12) и интегрирование проводится в верхней полуплоскости.

Используя технику метода перевала [22], найдем седловые точки ζ_j^{ced} функций $q_j(\zeta)$, а затем значения этих функций и их вторых производных в седловых точках:

$$\begin{aligned} q_j'(\zeta) = 0 &\rightarrow \zeta_j^{ced} = \pm k_j \sin \vartheta, \\ q_j(\zeta_j^{ced}) &= -ik_j, \quad q_j''(\zeta_j^{ced}) = i/k_j \cos^2 \vartheta, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

При вычислении 1-го интеграла в (4.5) ($j = 1$) по петле L_1^+ вокруг точки ветвления k_1 , общей для функций $q_1(\zeta)$ и $\Phi_1(\zeta)$, воспользуемся асимптотическим представлением интегралов типа (4.1) [22]:

$$I(R) \approx \pm \sqrt{\frac{2\pi}{R|q_1''(\zeta_1^{ced})|}} \Phi_1(\zeta_1^{ced}) \exp \left\{ Rq_1(\zeta_1^{ced}) + i\frac{\pi}{4} \text{sign}[Imq_1''(\zeta_1^{ced})] \right\}, \quad (4.8)$$

откуда видно, что $U_r(R)$, с учетом выражения (4.5) убывает как $1/\sqrt{R(a + R \cos \vartheta)}$. При вычислении этого же интеграла по петле L_2^+ , вокруг точки ветвления k_2 , функция $q_1(\zeta)$ — регулярна, в то время как функция $-\Delta_0(\zeta)$ (а вместе с ней и

$\Phi_1(\zeta)$ имеет точку ветвления k_2 . В таком случае правомерна другая асимптотическая оценка [22]:

$$I(R) \approx \pm \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{R^3|q'_1(\zeta_0)|^3}} [(\zeta - \zeta_0)^{1/2}] \Phi'(\zeta_0) \times \exp \left\{ Rq_1(\zeta_0) - i\frac{3}{2} \arg[-q'_1(\zeta_0)] \right\} \quad (4.9)$$

В этом случае $U_r(R)$ будет убывать как $1/\sqrt{R^3(a + R \cos \vartheta)}$, поэтому, ограничиваясь главными членами асимптотики, интегралом по петле L_2^+ пренебрегаем. При вычислении второго интеграла в (4.5) $j = 2$ для функций $q_2(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ общей точкой ветвления будет $\zeta = k_2$ и рассуждения, подобные изложенным выше, приводят к отбрасыванию интеграла по петле L_1^+ . В итоге асимптотическое выражение интегралов (4.5), с учетом лишь главных членов асимптотики, принимает вид:

$$U_r(R, \vartheta) \sim \frac{1}{\sqrt{R(R \cos \vartheta + a)}} \{ \gamma_1 \cos \vartheta \exp[-ik_1(R + a \cos \vartheta)] - \gamma_2 \sin \vartheta \exp[-ik_2(R + a \cos \vartheta)] \}. \quad (4.10)$$

Представляя z -компоненту вектора перемещений в дальнем поле в форме контурного интеграла типа (4.1) посредством асимптотической замены функций Ханкеля по формулам (4.2) и перехода к координатам (R, φ, ϑ) , для $U_z(R, \vartheta)$ получим выражение аналогичное (4.5), которое здесь не приводим. Далее, повторяя путь асимптотической оценки полученных интегралов, как это делалось для радиальной компоненты (4.5), для $U_z(R, \vartheta)$ получим асимптотическое выражение:

$$U_z(R, \vartheta) \sim \frac{1}{\sqrt{R(R \sin \vartheta + a)}} \{ \gamma_1 \sin \vartheta \exp[-ik_1(R + a \cos \vartheta)] + \gamma_2 \cos \vartheta \exp[-ik_2(R + a \cos \vartheta)] \}. \quad (4.11)$$

В (4.10), (4.11) коэффициенты γ_1, γ_2 имеют вид:

$$\gamma_1 = \frac{2}{\pi} \frac{k_1 \bar{f}(k_1 \sin \vartheta) (2 \sin^2 \vartheta - k^2)}{\sin \vartheta \sqrt{\cos \vartheta} \Delta_0(k_1 \sin \vartheta) H_1^{(2)}(k_1 a \sin \vartheta)}, \quad k = k_2/k_1, \quad (4.12)$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{\pi} \frac{2k_2 \bar{f}(k_2 \sin \vartheta) \sqrt{\cos \vartheta}}{\Delta_0(k_2 \sin \vartheta) H_1^{(2)}(k_2 a \sin \vartheta)}.$$

5. Поле смещений по направлениям координатных осей R, ϑ

Структура волнового поля в дальнем поле становится более ясной, если от компонент по направлениям цилиндрической системы координат $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ перейти к ортам $\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\vartheta$ ортогональной системы координат (R, φ, ϑ) :

$$\begin{pmatrix} U_R \\ U_\varphi \\ U_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_r \\ 0 \\ U_z \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

По направлениям $\bar{e}_R, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_\vartheta$ компоненты вектора перемещений принимают вид:

$$U_R(R, \vartheta) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{R(R \cos \vartheta + a)}} \exp[-ik_1(R + a \cos \vartheta)], \quad U_\varphi = 0, \quad (5.2)$$

$$U_\vartheta(R, \vartheta) = \frac{\gamma_2}{\sqrt{R(R \cos \vartheta + a)}} \exp[-ik_2(R + a \cos \vartheta)]. \quad (5.3)$$

Из формул (5.2), (5.3) видно, что на большом расстоянии от приложенной к полости нагрузки, продольные волны вызывают преимущественно радиальные смещения U_R , а поперечные волны — перпендикулярные к U_R смещения U_ϑ .

Заметим, что при вычислении $\Delta_0(k_2 \sin \vartheta)$ в (5.3) необходимо учитывать знаки $Re\beta_2$ на выбранном листе римановой поверхности. Асимптотические выражения (5.2), (5.3) справедливы на расстояниях больших по сравнению с длиной упругих волн ($R \gg \lambda_{1,2}$) и размеров области нагружения ($R \gg 2h$), а также в предположении $k_{1,2}R(1 - \sin \vartheta) \gg 1$ (условие относительной отдаленности точек ветвления и седловых точек [9, 22]). Асимптотические выражения (5.2), (5.3) непригодны для вычисления дальнего поля в точках поверхности полости ($r = a, z \gg h$). В этом случае надо отдельно получать асимптотические формулы.

6. Выражения для напряжений в дальнем поле в координатах R, ϑ

Найдем некоторые компоненты тензора напряжений в координатах (R, φ, ϑ) в дальнем поле, которые понадобятся далее. Для этого найдем диагональные элементы метрического тензора:

$$g_{i,j} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}, \quad (6.1)$$

определяющие переход от декартовых координат: $x_1 = r \cos \varphi = (a + R \cos \vartheta) \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi = (a + R \cos \vartheta) \sin \varphi$, $x_3 = z = R \sin \vartheta$ к координатам $\alpha_1 = R$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = \vartheta$. Полагая по-прежнему, в силу осевой симметрии, $\partial/\partial \varphi \equiv 0$, получим:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = (a + R \cos \vartheta)^2, \quad g_{33} = R^2. \quad (6.2)$$

Исходя из закона Гука в произвольной системе координат [13], записывая его в координатах α_j , для компонент σ_{RR} и $\tau_{R\vartheta}$ получим:

$$\sigma_{RR} = \mu k^2 \frac{\partial U_r}{\partial R} + \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial U_\vartheta}{\partial \vartheta} + U_R \right) + \frac{1}{a + R \cos \vartheta} \left(U_R \cos \vartheta - \frac{U_\vartheta}{R} \sin \vartheta \right) \right], \quad (6.3)$$

$$\tau_{R\vartheta} = \mu \left[\frac{\partial U_\vartheta}{\partial R} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial U_\vartheta}{\partial \vartheta} - U_\vartheta \right) \right]. \quad (6.4)$$

Подставляя в (6.3), (6.5) асимптотические выражения (5.2), (5.3) для U_R , U_ϑ и ограничиваясь главными членами асимптотики, получим:

$$\sigma_{RR}(R, \vartheta) = -ik_1\mu k^2 \frac{\gamma_1}{\sqrt{R(R \cos \vartheta + a)}} \exp[-ik_1(R + a \cos \vartheta)], \quad (6.5)$$

$$\tau_{R\vartheta}(R, \vartheta) = -ik_2\mu \frac{\gamma_2}{\sqrt{R(R \cos \vartheta + a)}} \exp[-ik_2(R + a \cos \vartheta)]. \quad (6.6)$$

Как видно из (6.5), (6.6) для данных компонент тензора напряжений имеет место разделение по типам волн: σ_{RR} соответствует P -волне, $\tau_{R\vartheta}$ — S -волне.

7. Направленность излучения. Диаграммы направленности

На основе проведенного нами асимптотического анализа решений и введения системы координат (R, φ, ϑ) нам удалось разделить волны в дальней зоне на продольные и поперечные. Вдоль радиального направления R основной вклад в смещения дают продольные волны $U_R(R, \vartheta)$ —(5.2), а в перпендикулярном ему направлении — поперечные волны $U_\vartheta(R, \vartheta)$ —(5.3). Из выражений (5.2), (5.3) очевидно, что направленность излучения (зависимость модуля смещений от угла ϑ между нормалью к поверхности скважины и радиальным направлением R) существенно зависит от распределения нагрузки $f(z)$ по кольцевой поверхности $|z| \leq h$ полости. В данной статье мы проанализируем случай постоянного профиля нагрузки кольца (3.1), для которой преобразование Фурье имеет вид (3.2), так что в выражениях (5.1) соответствующие трансформанты примут вид:

$$\bar{f}(k_{1,2} \sin \vartheta) = 2f_0 \sin(k_{1,2}h \sin \vartheta)/(k_{1,2} \sin \vartheta). \quad (7.1)$$

Нами будет также рассмотрен предельный случай сосредоточенной нагрузки, когда $h \rightarrow 0$. Тогда трансформанта (3.2) принимает вид:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{f}(k_{1,2} \sin \vartheta) = 2f_0h = Q \quad (7.2)$$

и направленность излучения характеризуется модулями компонент смещений:

$$U_R^{(0)} = \frac{k_1|2 \sin^2 \vartheta - k_2^2/k_1^2|}{\sin \vartheta \sqrt{R \cos \vartheta (R \cos \vartheta + a)} |\Delta_0(k_1 \sin \vartheta) H_1^{(2)}(k_1 a \sin \vartheta)|}, \quad (7.3)$$

$$U_\vartheta^{(0)} = \frac{k_2 \sqrt{\cos \vartheta}}{\sqrt{R(R \cos \vartheta + a)} |\Delta_0(k_2 \sin \vartheta) H_1^{(2)}(k_2 a \sin \vartheta)|}. \quad (7.4)$$

На рис. 4 приведено угловое распределение модулей компонент перемещений в дальней зоне упругой среды с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$ при сосредоточенном воздействии на поверхность скважины. В правой полуплоскости показано распределение смещений для радиальных компонент (P -волны), в левой — для окружных (S -волны). Линии 1, 2, 3 отвечают безразмерным частотам частотам

$\Omega = k_2 a = 1.7; 10; 30$. Из диаграмм видно, что с ростом Ω направленность излучения P -волн не изменяется, а растет лишь их амплитуда. Направленность излучения S -волн имеет своеобразный характер: отсутствует в нормальном направлении и находится приблизительно в пределах углов $\pi/4 < |\vartheta| < \pi/2$, а их амплитуда, как и для P -волн растет с частотой.

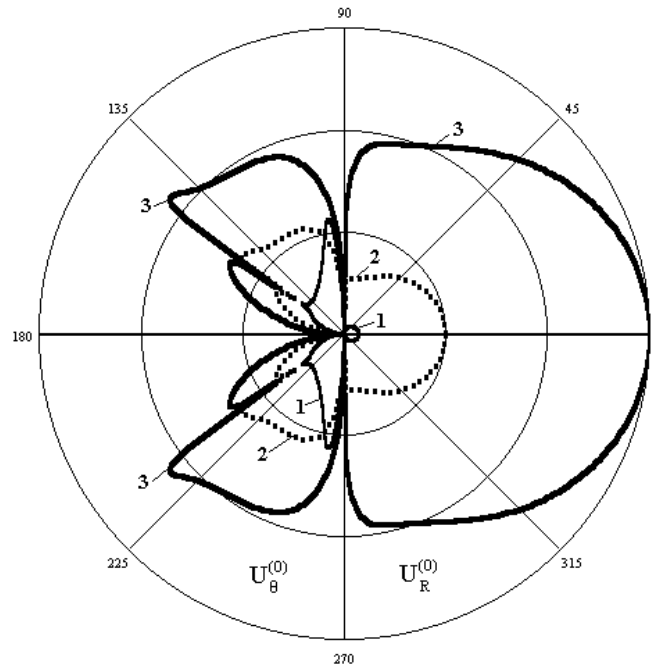


Рис. 4. Диаграммы направленности излучения сосредоточенного кругового источника на поверхности скважины для частот нагружения $\Omega = 1.7; 10; 30$ и коэффициента Пуассона среды $\nu = 0.25$. Правая полуплоскость — радиальные компоненты (P -волны), левая полуплоскость — окруженные компоненты (S -волны).

Для эффективной закачки энергии упругих волн в определенные области среды необходимо сужать диаграмму направленности. Как показали расчеты, эти требования можно выполнить подбирая частоту и ширину кольца нагружения. Для случая гармонической нагрузки, распределенной по поверхности кольца $|z| \leq h$, формулы, характеризующие распределение модуля смещений, принимают вид:

$$\mathbf{U}_R(R, \vartheta) = (\pi\mu)^{-1} \mathbf{U}_R^{(0)} |\bar{f}(k_1 \sin \theta)|, \quad (7.5)$$

$$\mathbf{U}_\theta(R, \vartheta) = (\pi\mu)^{-1} \mathbf{U}_\theta^{(0)} |\bar{f}(k_2 \sin \theta)| \quad (7.6)$$

где $\mathbf{U}_R^{(0)}$ и $\mathbf{U}_\theta^{(0)}$ определяются согласно (7.3), (7.4).

В диаграммах направленности, на рис. 5, линии 1, 2, 3 отвечают безразмерной ширине нагружения $H = h/a = 0; 0.5; 3.8$ при частоте $\Omega = 3.7$. Из диаграммы видно, что с ростом H направленность излучения локализуется (сужается), а вклад в излучение S -волн практически исчезает.

Отметим, что асимптотические представления компонент σ_{RR} и $\tau_{R\vartheta}$ тензора напряжений, выраженные через закон Гука, оказываются пропорциональными компонентам смещений U_R и U_ϑ соответственно. В силу этого диаграммы направленности, приведенные на рис. 4 и рис. 5, относятся также и к указанным компонентам тензора напряжений. С другой стороны, отмеченная пропорциональность перемещений и напряжений позволяет разделить потоки энергии излучения по типам волн, что будет описано в следующей публикации.

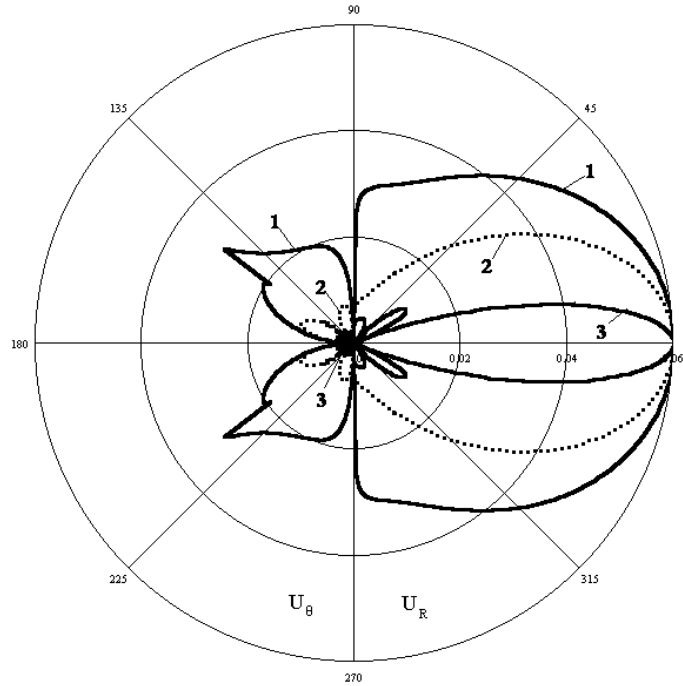


Рис. 5. Диаграммы направленности излучения источника для ширины кольцевой области нагружения $H = 0; 0.5; 3.8$ при частоте нагрузки $\Omega = 3.7$ и коэффициенте Пуассона среды $\nu = 0.25$. Правая полуплоскость — радиальные компоненты (P -волны), левая полуплоскость — окружные компоненты (S -волны).

8. Заключение

В данной работе решена краевая задача для уравнения Ламэ о нормальном гармоническом однородном нагружении кольцевой области на поверхности цилиндрической скважины в бесконечной упругой среде. Методом контурного интегрирования в комплексной плоскости получены точные выражения для компонент вектора перемещений. Проведен анализ динамических процессов на поверхности плоскости.

Показано, что от источника по поверхности полости распространяется поверхностная волна, фазовая скорость которой определяется корнями дисперсионного

уравнения Био и волны с непрерывным спектром волновых чисел от 0 до k_2 . Вне области нагружения существуют также стоячие волны, затухающие при удалении от источника.

Колебания поверхности кольца обусловлены стоячей волной Био, с волновым числом, определяемым из соответствующего дисперсионного уравнения и суперпозицией стоячих волн с непрерывным спектром волновых чисел от 0 до k_2 , причем у всех стоячих волн амплитуда зависит от осевой координаты полости по косинусоидальному закону. Кроме этого поверхность кольца нагружения имеет постоянную составляющую колебаний, независимую от осевой координаты полости. Эта составляющая является аналогом колебания поверхности полости в известной работе о нормальном однородном гармоническом нагружении всей поверхности бесконечной цилиндрической полости в упругой среде.

Было также показано, что при устремлении радиуса полости к бесконечности рассмотренная задача переходит в плоскую задачу Лэмба о действии на упругое полупространство нормальной однородной нагрузки, приложенной по полосе конечной ширины. При этом поверхностные волны Био переходят в волны Рэлея, а все выражения, характеризующие смещения на полости, переходят в соответствующие выражения для перемещений поверхности полупространства.

Методом перевала в работе получены выражения для компонент вектора перемещений и тензора напряжений в дальнем поле. В полученных выражениях для компонент смещений, записанных в цилиндрической системе координат, продольные и поперечные волны не разделяются. Однако, в введенной специальной ортогональной системе координат (подобной полярной системе) структура волнового поля такова, что продольные волны вызывают в основном радиальные смещения, а поперечные волны — окружные (перпендикулярные радиальным). Такое же разделение в новой системе координат получено в дальнем поле для радиальных и окружных компонент тензора напряжений. На основе полученных выражений построены диаграммы направленности продольных и поперечных волн смещений в дальней зоне и проведен анализ их зависимости от параметров источника, что позволяет создавать источники упругих волн с заданной заранее направленностью и необходимым количественным вкладом в излучение каждого типа волн.

Решенная здесь задача для однородного профиля нагружения кольцевой области на полости позволяет решать более сложные задачи, с неоднородной функцией профиля нагрузки, дающие дополнительные возможности создания необходимых волновых полей излучения.

На основе полученного разделения волн во второй части исследования будет получено разделение потоков энергии в волновом движении по типам волн и проведен анализ зависимости энергии от параметров источника.

Список цитируемых источников

1. Аммосов С. М., Барабанов В. Л., Войтов Г. И. и др. Результаты экспериментального изучения вибрационного воздействия на нефтяные залежи // Современные методы

- увеличения нефтеотдачи пластов: Тез. — Бугульма. — 1989. — М.: ВНИИ, 1989. — С. 25–27.
2. *Бабешко В. А., Глушков Е. Б., Глушкова Н. В., Зинченко Ж. Ф.* К расчету сейсмического источника с заданной направленностью излучения // ДАН СССР. 1982. — Т. 262, № 4. — С. 831–834.
 3. *Бабешко В. А., Глушков Е. Б., Глушкова Н. В.* Численное исследование энергии поверхностного виброисточника в многослойном упругом полупространстве / Куб.Гу. — Краснодар, 1984. — 32 с. — Деп. в ВИНТИ 31.05.84, № 3545-84.
 4. *Бабешко В. А., Глушков Е. Б., Глушкова Н. В., Зинченко Ж. Ф.* Резонансные явления в многослойном полупространстве // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286, № 4. — С. 860–869.
 5. *Барабанов В. Л., Гриневский А. О. и др.* О некоторых эффектах вибрационного сейсмического воздействия на водонасыщенную среду. Сопоставление их с эффектами сильных землетрясений // ДАН СССР. — 1987. — Т. 297, № 1. — С. 52–56.
 6. *Булат А. Ф., Чемерис И. Ф.* Научно-технические основы создания шахтных когенерационных энергетических комплексов — К.: Наук. думка, 2006. — 176 с.
 7. *Глушков Е. Б., Глушкова Н. В.* Расчет энергии упругих волн, возбуждаемых поверхностными источниками в стратифицированном полупространстве / Ростов гос. университет — Ростов-на-Дону, 1981. — 30 с. — Деп. в ВИНТИ 24.12.81, № 5827-81.
 8. *Глушков Е. Б., Глушкова Н. В., Шошина С. Ю.* К оптимизации расстановки поверхностных виброисточников / Куб.Гу. — Краснодар, 1985. — 22 с. — Деп. в ВИНТИ 18.09.85, № 6724-В.
 9. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
 10. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках — К.: Наук. думка, 1986. — 340 с.
 11. *Дыбленко В. П., Камалов Р. Н., Шарифуллин Р. Я., Туфанов И. А.* Повышение продуктивности и реанимация скважин с применением виброволнового воздействия — М.: Недра, 2000. — 381 с.
 12. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики — М.: Изд-во иностр. лит., 1950. — 456 с.
 13. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления — М.: Изд-во Академии наук СССР, 1951. — 428 с.
 14. *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов — М.: Мир, 1974. — 324 с.
 15. *Новацкий В.* Теория упругости — М.: Мир, 1975. — 872 с.
 16. *Садовский М. А., Абасов М. Т., Николаев А. В.* Перспективы вибрационного воздействия на нефтяную залежь с целью повышения нефтеотдачи // Вест. АН СССР. — 1986. — № 9. — С. 95–99.
 17. Сейсморазведка (Справочник геофизика) / Под ред. И. И. Гурвича, В. П. Номоконова — М.: Недра, 1981. — 464 с.
 18. *Скучик Е.* Основы акустики — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — Т. 2 — 542 с.
 19. *Сницер А. Р.* Поверхностные волны на полости в полубесконечной упругой среде // Динамические системы. — 2000. — № 16. — С. 70–80.

20. *Сницер А. Р.* К проблеме излучения при вибрационных воздействиях на скважину // Материалы XIII-й Международной научной школы им. акад. С. А. Христиановича — Симферополь: Таврич. национальный ун-т, 2003. — С. 122–127.
21. *Сницер А. Р.* Волны кручения в упругом полупространстве при торсионном гармоническом воздействии на поверхность скважины // *Динамические системы.* — 2005. — № 19. — С. 73–88.
22. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн: в 2-х томах — М.: Мир, 1978. — Т. 1 — 547 с.
23. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики — Л.: Судостроение, 1972. — 348 с.
24. *Biot M. A.* Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // *J. Appl. Physics* — 1952. — Vol.23. — pp. 997–1005.
25. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of elastic solid // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* — 1904. — № 203. — pp. 1–42.
26. *Parnes R.* Applied tractions on the surface of an infinite cylindrical bore // *Int. J. Solids and Structures* — 1983. — Vol.19. — pp. 165–177.
27. *Parnes R.* Elastic Response to a Time-Harmonic Torsion-Force Acting on a Bore Surface // *Int. J. Solids and Structures* — 1983. — Vol.19, № 10. — pp. 925–934.
28. *Rayleigh J. W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // *Proc. Lond. Math. Soc.* — 1885/1886. — Vol.17, № 253. — pp. 4–11.
29. *Snitser A. R.* Surface Waves on a Cavity in a Semiinfinite Elastic Medium // *Journal of Mathematical Sciences* — 2001. — Vol.107, № 6. — pp. 4386–4394.

Получено 1.11.2006