

УДК 539.3:624.131+539.215

Дисперсия скорости поверхностных волн Био в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде

А.Р. Сницер

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
НИИ Проблем геодинамики,
Симферополь 95007. E-mail: *snitser_arnold@yahoo.com*

Аннотация. В рамках модели Био исследуется динамическая краевая задача о гармоническом воздействии на поверхность цилиндрической скважины в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде. Задача сводится к уравнениям Гельмгольца для трех скалярных потенциалов определяющих вектора перемещений жидкой и твердой фаз среды, тензор напряжений твердой фазы и давление поровой жидкости. Исследуется дисперсионное уравнение, определяющее зависимости скорости поверхностных волн от соотношения их длины и диаметра полости при различных значениях пористости.

Ключевые слова: модель Био, пористо-упругая насыщенная жидкостью среда, дисперсионное уравнение, реанимация нефтяных скважин, цилиндрический излучатель, гармоническое воздействие.

Введение

Экологическое состояние окружающей среды тесно связано с устойчивостью грунтовых массивов, в особенности, в горных районах. Деформационные процессы в грунтах могут быть связаны с просадками, в силу наличия полостей или строний в окрестности массива, с карстопоявлениями, землетрясениями, фильтрацией атмосферных осадков на склоне и другими явлениями. Изменения в грунтах, происходящие в результате указанных процессов, приводят к оползневым явлениям и провалам в массивах. С целью оценки состояния грунта (осуществления его мониторинга) используется вибрационное просвечивание массива. Такой анализ грунта предполагает исследование происходящих в нем физико-механических процессов и свойств, и реализуется, в частности, методами континуальной механики [3].

Отметим, что вибрационные воздействия на среду используются не только с целью её изучения, но также и для изменения её свойств. Известно, что при динамических воздействиях рыхлые песчаные грунты (особенно водонасыщенные) могут претерпевать значительные деформации, из-за чего происходит виброуплотнение скелета песка и фильтрация поровой воды (виброконсолидация). Такие превращения меняют кулоновское трение между слоями грунта и при соответствующем воздействии исключают возможность оползней.

Широкое применение получили вибрационные воздействия для повышения продуктивности и реанимации нефтяных, газовых и артезианских скважин [3]. Волновые поля и закономерности передачи механической энергии через поверхность скважины в *упругих средах* исследовались в частности в работах [7,8,13,16]. Однако, принимая в качестве модели среды упругое пространство, мы не учитываем некоторые процессы, происходящие в реальной среде при указанных воздействиях. При анализе волновых процессов происходящих в грунте при землетрясениях, вибрационных и других воздействиях следует учитывать связь между деформацией твердого скелета грунта или горной породы и движением поровой жидкости, фильтрационные свойства среды. Одна из теорий распространения волн в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде предложена М. Био [12].

Здесь нами исследуется краевая задача о гармоническом воздействии на поверхность скважины в грунте. Грунт отождествляется с пористо-упругой насыщенной жидкостью средой, описываемой моделью Био. Данная задача сводится к решению уравнений Гельмгольца для трех потенциалов, через которые выражается волновое поле среды.

1. О модели Био

В 1956 году М. Био представил теорию распространения волн в пористо-упругой насыщенной жидкостью двухфазной среде [12]. Эта модель, адекватно отражающая физические свойства грунтов и представляющая обобщение теории упругости на случай двухфазной среды, получила широкое распространение и успешно применяется при решении практических задач, возникающих в экологии, строительстве, сейсмологии. С подробным описанием модели можно ознакомиться в [5]. В модели М. Био грунт предполагается состоящим из двух условно сплошных взаимопроникающих фаз: скелета грунта (твердые минеральные частицы) и газированной поровой жидкости. В рамках данной модели обосновано существование поперечной и продольной упругих волн, а также предсказана так называемая медленная продольная волна, формально описывающая перетоки жидкости относительно упругого скелета [10]. Основные положения теории М. Био и существование медленной волны нашли экспериментальное подтверждение [8].

2. Постановка задачи: уравнения и граничные условия

Рассматривается задача о возбуждении волн в пористо-упругой насыщенной жидкостью двухфазной среде (ПУНЖС)¹. Волны генерируются посредством гармонического нагружения поверхности скважины радиуса $r = a$ по всей ее протяженности $-\infty < z < +\infty$. Задача решается в цилиндрической системе координат r, φ, z .

¹Данная аббревиатура введена в монографии [9].

Динамику ПУНЖС можно описать двумя векторными уравнениями относительно векторов перемещений скелета \vec{u} и поровой жидкости \vec{U} [5]:

$$N \nabla^2 \vec{u} + \text{grad} \left[(A + N) \text{div} \vec{u} + Q \text{div} \vec{U} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} \right) + b \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{u} - \vec{U} \right), \quad (1)$$

$$\text{grad} \left(Q \text{div} \vec{u} + R \text{div} \vec{U} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_{12} \vec{u} + \rho_{22} \vec{U} \right) + b \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{U} - \vec{u} \right). \quad (2)$$

Входящие в (1), (2) константы выражаются через физические свойства среды: $N = \mu$, $A = \lambda + K_0 a_0^2 S_0 / m$, $R = m K_0 S_0$, $Q = a_0 K_0 S_0$, λ, μ — упругие константы Ламэ пористого упругого скелета; K_0 — модуль объемной сжимаемости жидкости; $a_0 = 1 - m - K_s / K_r$, $S_0 = m K_r / (m K_r + a_0 K_0)$, $K_s = \lambda + 2\mu / 3$ — модуль всестороннего сжатия пористого скелета с пустыми порами, K_r — истинный модуль сжимаемости твердой фазы, m — коэффициент пористости среды; $\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}$, $\rho_{22} = (m\rho_f - \rho_{12})$ — эффективные массы фаз; ρ_{12} — коэффициент динамической связи в модели Био; $\mathbf{b} = \frac{m^2 \theta_0}{K_{pr}} F(\omega)$ — диссипативный член для гармонических волн, θ_0 — коэффициент динамической вязкости жидкости, K_{pr} — коэффициент проницаемости, функция $F(\omega)$ задается в зависимости от частоты.

Граничные условия для данной задачи при $r = a$ и $|z| < \infty$ сформулируем в виде:

$$\tau_{rz}^s(a, z) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}(a, z) = \sigma_{rr}^s(a, z) + q\sigma^f(a, z) = -p_1(z) \exp(i\omega t), \quad (4)$$

$$\sigma^f(a, z) = -mp_2(z) \exp(i\omega t). \quad (5)$$

Здесь и далее индекс s относится к твердой фазе, f — к жидкой; $q = (m - 1)/m$; функции нагружения $p_1(z)$, $p_2(z)$ — считаются заданными; временной множитель $\exp(i\omega t)$ в дальнейшем будем опускать.

Воспользуемся представлениями Ламэ для векторов перемещений твердой \vec{u} и жидкой \vec{U} фаз:

$$\vec{u} = \text{grad} \varphi_s + \text{rot} \vec{\psi}_s, \quad \text{div} \vec{\psi}_s = 0; \quad (6)$$

$$\vec{U} = \text{grad} \varphi_f + \text{rot} \vec{\psi}_f, \quad \text{div} \vec{\psi}_f = 0. \quad (7)$$

Выражая скалярные φ_s , φ_f и векторные $\vec{\psi}_s$, $\vec{\psi}_f$ потенциалы в виде линейной комбинации скалярных функций Φ_0 , Φ_1 , ψ_s :

$$\varphi_s = \Phi_0 + \Phi_1, \varphi_f = M_0 \Phi_0 + M_1 \Phi_1, \quad (8)$$

$$\vec{\psi}_s = \psi_s \vec{e}_\varphi, \vec{\psi}_f = M_2 \vec{\psi}_s, \quad (9)$$

от уравнений движения Био приходим к 3-м уравнениям Гельмгольца²:

$$(\nabla^2 + \bar{k}_i^2) \Phi_i = 0, \quad i = 0, 1. \quad (10)$$

²Здесь и далее черта над символами означает, что соответствующие величины относятся к пористо-упругой насыщенной жидкостью среде (такие же символы без черты означают их отношение к упругой среде).

$$(\nabla^2 - r^{-2} + \bar{k}_2^2) \psi_s = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (11)$$

Коэффициенты M_j в (8), (9) и волновые числа \bar{k}_j в уравнениях (10), (11) выражаются через параметры среды:

$$M_j = \frac{V_j + (q_{22} + q_{12}) \mathbf{b}/(i\rho\omega)}{q_{12}\gamma_{22} - q_{22}\gamma_{12} + (q_{22} + q_{12}) \mathbf{b}/(i\rho\omega)}, \quad j = 0; 1 \quad (12)$$

$$M_2 = \frac{\mathbf{b}/i\omega - \rho_{12}}{\mathbf{b}/i\omega + \rho_{22}}, \quad (13)$$

$$V_j = q_{22}\gamma_{11} - q_{12}\gamma_{12} - (q_{11}q_{22} - q_{12}^2) z_j, \quad (14)$$

где

$$\left\| \begin{array}{cc} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{array} \right\| = \frac{1}{H} \left\| \begin{array}{cc} A + 2\mu & Q \\ 0 & R \end{array} \right\|, \quad H = A + 2N + R + 2Q; \quad (15)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\rho}, \quad \rho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}. \quad (16)$$

$$\bar{k}_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} z_j, \quad j = 0, 1; \quad \bar{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\gamma_{11} + \gamma_{12}M_2 - i\gamma_b(1 - M_2)}{N/H}, \quad (17)$$

$$A^2 = \frac{H}{\rho}, \quad \bar{c}_i = \frac{\omega}{k_i}, \quad i = 0, 1, 2; \quad \gamma_b = \frac{b}{\rho\omega}. \quad (18)$$

z_0, z_1 — корни квадратного уравнения:

$$\alpha z^2 - \beta z + \gamma = 0, \quad (19)$$

$$\alpha = (q_{11}q_{22} - q_{12}^2), \quad \beta = q_{11}\gamma_{22} + q_{22}\gamma_{11} - 2q_{12}\gamma_{12} + b/(i\rho\omega), \quad (20)$$

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 + b/(i\rho\omega).$$

В уравнении (10) волновое число \bar{k}_0 и потенциал Φ_0 отвечают медленной продольной волне; \bar{k}_1, Φ_1 — быстрой продольной волне; \bar{k}_2, ψ_s — поперечной волне. Быстрая продольная и поперечная волны аналогичны волнам в упругом теле, медленная продольная волна описывает перетоки жидкости относительно упругого скелета [1,5,9].

Решения уравнений (10), (11) разыскиваем в виде интегральных разложений удовлетворяющих условию излучения Зоммерфельда:

$$\Phi_j(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_j(\xi) H_0^{(2)}(r\bar{\beta}_j) \exp(i\xi z) d\xi, \quad j = 0, 1. \quad (21)$$

$$\psi_s(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\xi) H_1^{(2)}(r\bar{\beta}_2) \exp(i\xi z) d\xi, \quad (22)$$

где

$$\bar{\beta}_i = \sqrt{\bar{k}_i^2 - \xi^2}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (23)$$

Граничные условия (3)–(5) на поверхности полости в терминах потенциалов принимают вид:

$$\tau_{rz}^s(r, z) = N \left[2 \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial r \partial z} - (2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{k}_2^2) \psi_s \right] = 0, \quad r = a, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z) &= 2N \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} - \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \right) + \\ &+ A \Delta \varphi_s + Q \Delta \varphi_f + q(Q \Delta \varphi_s + R \Delta \varphi_f) = -p_1(z), \quad r = a, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\sigma^f(r, z) = Q \Delta \varphi_s + R \Delta \varphi_f = -mp_2(z), \quad r = a. \quad (26)$$

Подставляя потенциалы (8), (9), выраженные через (21), (22) в граничные условия (24)–(26), и обращая преобразование Фурье, получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания интегральных плотностей $A_j(\xi)$:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_0(\xi) \\ A_1(\xi) \\ A_2(\xi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\bar{p}_1(\xi) \\ m \bar{p}_2(\xi) \end{vmatrix}, \quad (27)$$

$$a_{1j} = 2i\xi \bar{\beta}_j H_1^{(2)}(a\bar{\beta}_j), \quad a_{2j} = E_j H_1^{(2)}(a\bar{\beta}_j), \quad a_{3j} = T_j \bar{k}_j^2 H_0^{(2)}(a\bar{\beta}_j), \quad j = 0; 1.$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= -(2\xi^2 - \bar{k}_2^2) H_1^{(2)}(a\bar{\beta}_2), \\ a_{22} &= i\xi \bar{\beta}_2 [H_1^{(2)}(a\bar{\beta}_2)/(a\bar{\beta}_2) - H_0^{(2)}(a\bar{\beta}_2)], \quad a_{32} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$E_j = \frac{\bar{\beta}_j}{a} + (\xi^2 - \alpha_j^2) \frac{H_0^{(2)}(a\bar{\beta}_j)}{H_1^{(2)}(a\bar{\beta}_j)}, \quad (29)$$

$$\alpha_j^2 = \bar{k}_j^2 \left[1 + \frac{A + QM_j + qT_j}{2N} \right], \quad (30)$$

$$T_j = Q + RM_j. \quad (31)$$

В (27), $\bar{p}_j(\xi)$ — преобразование Фурье заданных нагрузок $p_j(z)$:

$$\bar{p}_j(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p_j(z) \exp(-i\xi z) dz.$$

Мы рассмотрим случай проницаемой границы скважины, полагая $p_2(z) = 0$. Тогда в силу (26), слагаемое в выражении (25), содержащее множитель q обращается в нуль, вследствие чего (30) принимает вид:

$$\alpha_j^2 = \bar{k}_j^2 [1 + (A + QM_j)/2N].$$

Решая систему (27) получим:

$$A_0(\xi) = \frac{a_{12}a_{31}}{D} P(\xi), \quad A_1(\xi) = -\frac{a_{12}a_{30}}{D} P(\xi), \quad A_2(\xi) = \frac{a_{11}a_{30} - a_{10}a_{31}}{D} P(\xi), \quad (32)$$

где

$$P(\xi) = -(2\mu)^{-1}\bar{p}_1(\xi), \quad (33)$$

D — главный определитель системы:

$$D = a_{12}(a_{20}a_{31} - a_{21}a_{30}) \left[1 - \left(\frac{a_{10}a_{31} - a_{11}a_{30}}{a_{20}a_{31} - a_{21}a_{30}} \right) \cdot \frac{a_{22}}{a_{12}} \right] \quad (34)$$

В итоге через найденные плотности выражаем поля перемещений твердой и жидкой фаз, напряжения в упругом скелете и поле давлений поровой жидкости.

Приведем здесь выражения составляющих вектора перемещений твердой фазы $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$ и давления поровой жидкости $p_{por}(r, z)$.

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi \mathcal{D}(\xi)} \left[(2\xi^2 - \bar{k}_2^2) \frac{\mathcal{A}_1(r)}{\mathcal{N}(\xi)} - 2\xi^2 \frac{\mathcal{B}(r)}{\mathcal{N}(\xi)} \right] e^{i\xi z} d\xi, \quad (35)$$

$$u_z(r, z) = \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}(\xi)}{\bar{\beta}_0 \mathcal{D}(\xi)} \left[(2\xi^2 - \bar{k}_2^2) \frac{\mathcal{A}_0(r)}{\mathcal{N}(\xi)} - 2\bar{\beta}_0 \bar{\beta}_2 \frac{\mathcal{B}(r)}{\mathcal{N}(\xi)} \right] e^{i\xi z} d\xi, \quad (36)$$

$$\sigma^f = \frac{\bar{k}_1^2 T_1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \left[(2\xi^2 - \bar{k}_2^2) \frac{H_1 \mathcal{H}^{(0)}(\bar{\beta}_0 r) - H_0 \mathcal{H}^{(0)}(\bar{\beta}_1 r)}{T\chi_0 H_1 - \chi_1 H_0} \right] e^{i\xi z} d\xi, \quad (37)$$

$$p_{por}(r, z) = -m^{-1} \sigma^f(r, z), \quad (38)$$

где

$$\mathcal{D}(\xi) = 4\xi \bar{\beta}_2 \left[\frac{1}{a\bar{\beta}_2} - H_2 \right] \frac{\mathcal{B}(a)}{\mathcal{N}(\xi)} - \frac{2\xi^2 - \bar{k}_2^2}{\xi} \left[\frac{2}{a} + \frac{2\xi^2 - 2\alpha_0^2}{\bar{\beta}_0} H_0 \right] \quad (39)$$

$$\mathcal{A}_i(r) = TH_1 \mathcal{H}^{(i)}(\bar{\beta}_0 r) - B^i H_0 \mathcal{H}^{(i)}(\bar{\beta}_1 r), \quad (40)$$

$$\mathcal{B}(r) = (TH_1 - BH_0) \mathcal{H}^{(1)}(\bar{\beta}_2 r), \quad (41)$$

$$\mathcal{N}(\xi) = TH_1 - EH_0, \quad (42)$$

$$\mathcal{H}^{(i)}(\bar{\beta}_j r) = \frac{H_i^{(2)}(\bar{\beta}_j r)}{H_1^{(2)}(\bar{\beta}_j a)}, \quad H_j = \frac{H_0^{(2)}(\bar{\beta}_j a)}{H_1^{(2)}(\bar{\beta}_j a)}, \quad i = 0, 1; \quad j = 0, 1, 2. \quad (43)$$

$$B = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_0}, \quad E = \frac{E_1}{E_0}, \quad T = \frac{T_1 \bar{k}_1^2}{T_0 \bar{k}_0^2}; \quad (44)$$

$$\chi_i = 2\xi^2 \bar{\beta}_i (\bar{\beta}_2 H_2 - a^{-1}) + (2\xi^2 - \bar{k}_2^2) E_i, \quad i = 0, 1, \quad (45)$$

E_j и T_j определены в (29), (31).

Численная реализация данной задачи и получение единственного решения, отвечающего физическому смыслу, требует анализа и специальных представлений интегралов (35), (36) в комплексной плоскости с учетом особенностей связанных с корнями уравнения (39).

3. Поверхностные волны на полости в ПУНЖС

В рассмотренной задаче граничные условия (3)–(5) приводят к неоднородной системе уравнений (27) для определения интегральных плотностей $A_j(\xi)$. Эта система имеет решение, если ее главный определитель D — (34), порождающий дисперсионное соотношение (39), отличен от нуля. Однако, наличие нулей соотношения (39) позволяет добавить к решению неоднородной системы (27) еще и решение вида $C(\xi_0)\delta(\xi - \xi_0)$, соответствующей однородной системы. При этом интегралы (35), (36), содержащие в знаменателе $\mathcal{D}(\xi)$, следует понимать в смысле Коши, с особенностью в точке $\xi = \xi_0$. Здесь $C(\xi_0)$ — неопределенная функция, δ — дельта-функция Дирака, ξ_0 — корень дисперсионного уравнения (39): $\mathcal{D}(\xi_0) = 0$. Указанное однородное решение определяет компоненты перемещений поверхностной волны (ПВ) Био на полости в ПУНЖС. Учесть однородное решение системы (27), снять при этом проблему определения неизвестной функции $C(\xi_0)$, и осуществить эффективную численную реализацию задачи можно также посредством контурных преобразований интегралов (35)–(37) в комплексной плоскости. При этом вклад ПВ будет определяться вычетом, который соответствует полюсу подынтегральных функций в (35), (36) в точке $\xi = \xi_0$. Такие преобразования также позволяют при соответствующем выборе ветвей радикалов $\bar{\beta}_i = \sqrt{\bar{k}_i^2 - \xi^2}$ получить однозначные решения, отвечающие физическому смыслу задачи.

4. Дисперсионное уравнение

Вопросы распределения энергии излучения по типам волн, возникающих при колебаниях цилиндрической полости в ПУНЖС, требует детального анализа волнового поля, включающего в себя, в частности, ПВ Био. Вклад такой волны определяется корнем выражения (39), через который выражается скорость ПВ в ПУНЖС.

Как известно, в случае плоской границы и в отсутствии диссипации скорость ПВ в ПУНЖС не зависит от частоты внешнего воздействия — дисперсия отсутствует [9]. В случае цилиндрической границы в **упругой** среде без диссипации энергии, скорость ПВ Био зависит от отношения длины ПВ — Λ к диаметру полости [6,11,15]. Аналогичная дисперсия скорости ПВ Био на цилиндрической полости имеет место и в случае **пористо-упругой насыщенной жидкостью среды** даже без учета диссипации энергии.

Для получения решения дисперсионного уравнения для ПВ на цилиндрической полости в ПУНЖС, введем в (39) безразмерные величины. В качестве последних примем: ζ_j — отношение скорости ПВ к скоростям медленной и быстрой продольных волн и поперечной волны в ПУНЖС; x — отношение длины поверхностной волны в ПУНЖС к диаметру цилиндрической полости:

$$\zeta_j = \frac{\bar{k}_j}{\xi} = \frac{\bar{V}}{\bar{c}_j}, \quad j = 0, 1, 2; \quad x = \bar{\Lambda}/D. \quad (46)$$

где \bar{V} — скорость поверхностных волн на полости; $\bar{c}_0 = \sqrt{\frac{H}{\rho_{z0}}}$, $\bar{c}_1 = \sqrt{\frac{H}{\rho_{z1}}}$, $\bar{c}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{11} + \rho_{12}M_2}}$ — скорости медленной и быстрой продольных и поперечной волн в ПУНЖС. Введем отношения $\sigma_j = \bar{c}_2/\bar{c}_j$, $j = 0, 1, 2$, тогда

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\mu\rho_{zj}}{H(\rho_{11} + \rho_{12}M)}} \quad j = 0, 1; \quad \sigma_2 = 1; \quad \zeta_j = \sigma_j\zeta, \quad \zeta_2 = \zeta. \quad (47)$$

Переходя в (39)–(45) от $\bar{\beta}_i = \sqrt{\bar{k}_i^2 - \xi^2}$ к $\bar{\kappa}_i = \sqrt{\xi^2 - \bar{k}_i^2}$, выбирая ветвь $Jm\bar{\beta}_i < 0$, так что $\bar{\beta}_i = -i\bar{\kappa}_i$, используя связь функций Ханкеля мнимого аргумента с функцией Макдональда [2], и учитывая (46), (47), дисперсионное соотношение (39) можно привести к виду:

$$\mathcal{D}(\xi) = a^{-2} \left(\frac{\pi}{x}\right)^2 \Delta_0(\zeta, x), \quad (48)$$

$$\Delta_0(\zeta, x) = 4 \left[\frac{x}{\pi} + \sqrt{1 - \zeta^2} \mathcal{K}_2 \right] \frac{B(a)}{N(\zeta)} - 2(2 - \zeta^2) \left[\frac{x}{\pi} + \frac{1 - r_0\sigma_0^2\zeta^2}{\sqrt{1 - \sigma_0^2\zeta^2}} \mathcal{K}_0 \right]. \quad (49)$$

Здесь

$$\mathcal{B}(a) = \frac{\sqrt{1 - \sigma_1^2\zeta^2}}{\sqrt{1 - \sigma_0^2\zeta^2}} \mathcal{K}_0 - \tau \frac{z_1}{z_0} \mathcal{K}_1, \quad \mathcal{N}(\xi) = \frac{e_1(\zeta)}{e_0(\zeta)} \mathcal{K}_0 - \tau \frac{z_1}{z_0} \mathcal{K}_1, \quad (50)$$

$$e_j(\zeta) = \sqrt{1 - \sigma_j^2\zeta^2} + \frac{\pi}{x} (1 - r_j\sigma_j^2\zeta^2) \mathcal{K}_j, \quad r_j = 1 + \frac{T_j}{2\mu}, \quad j = 0, 1. \quad (51)$$

$$\mathcal{K}_j = \frac{K_0 \left(\frac{\pi}{x} \sqrt{1 - \sigma_j^2\zeta^2} \right)}{K_1 \left(\frac{\pi}{x} \sqrt{1 - \sigma_j^2\zeta^2} \right)}, \quad j = 0, 1, 2; \quad \zeta = \zeta_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{c}_2}. \quad (52)$$

5. Решения дисперсионного уравнения для ПУНЖС с цилиндрической полостью для среды Фэтта

Приведем решение дисперсионного уравнения (49) для пористо-упругой насыщенной жидкостью среды, аналогичной среде Фэтта (песчаник, насыщенный нефтью), при значениях пористости $m = 0.15$, $m = 0.24$ и неизменных параметрах среды Фэтта [5]:

$$\left. \begin{aligned} A &= 0.4026 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 & N &= 0.2493 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 \\ Q &= 0.0672 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 & R &= 0.0295 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 \\ \rho_f &= 0.82 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 & \rho_s &= 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \\ \rho_{12} &= -0.0019 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 & \nu &= 0.25; m = 0.26; b = 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

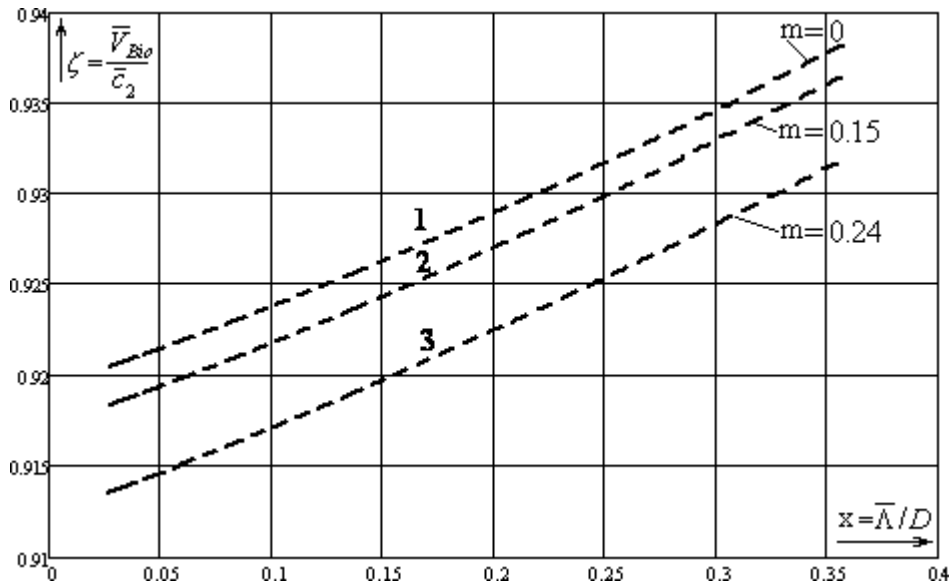


Рис. 1. Зависимость относительной скорости ПВ Био в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде Фэтта от относительной длины волны. Кривые 1–3 соответствуют коэффициентам пористости среды $m = 0; 0.15; 0.24$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$.

На рис.1 приведены графики зависимости $\zeta = \bar{V}_{Bio}/\bar{c}_2$ в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде с полостью (с параметрами среды Фэтта) от относительной длины поверхностной волны $x = \bar{\Lambda}/D$, а на рис.2 — от относительной частоты³ $\Omega = 2\pi a/\bar{\lambda}_2$ для коэффициентов пористости $m = 0; 0.15; 0.24$.

Дисперсионные кривые для абсолютной скорости ПВ Био в ПУНЖС в зависимости от относительных величин x и Ω определяются соотношениями $\bar{V}_{Bio}(x) = \bar{c}_2 \zeta(x)$ и $\bar{V}_{Bio}(\Omega) = \bar{c}_2 \zeta(\Omega)$ соответственно. На рис.3 изображены кривые зависимостей $\bar{V}_{Bio}(\Omega)$ для различных m . Из приведенных графиков видно, что с ростом пористости абсолютная скорость поверхностных волн в ПУНЖС возрастает. При $m = 0$ дисперсионные кривые совпадают с соответствующими кривыми для случая ПВ Био на цилиндрической полости в упругой среде с упругими параметрами скелета среды Фэтта [6,11,15].

6. Частные случаи для дисперсионного соотношения

В случае отсутствия пористости ($m = 0$) из (49) мы получим дисперсионное уравнение для определения зависимости относительной скорости ПВ Био от x в упругой среде [6,15]:

$$\frac{2}{\pi} x \zeta^2 + 4\sqrt{1-\zeta^2} \frac{K_0\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{K_1\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{1-\zeta^2}\right)} - \frac{(2-\zeta^2)^2}{\sqrt{1-\sigma^2\zeta^2}} \frac{K_0\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{1-\sigma^2\zeta^2}\right)}{K_1\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{1-\sigma^2\zeta^2}\right)} = 0, \quad (54)$$

³ $\bar{\lambda}_2$ — длина поперечных волн в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде.

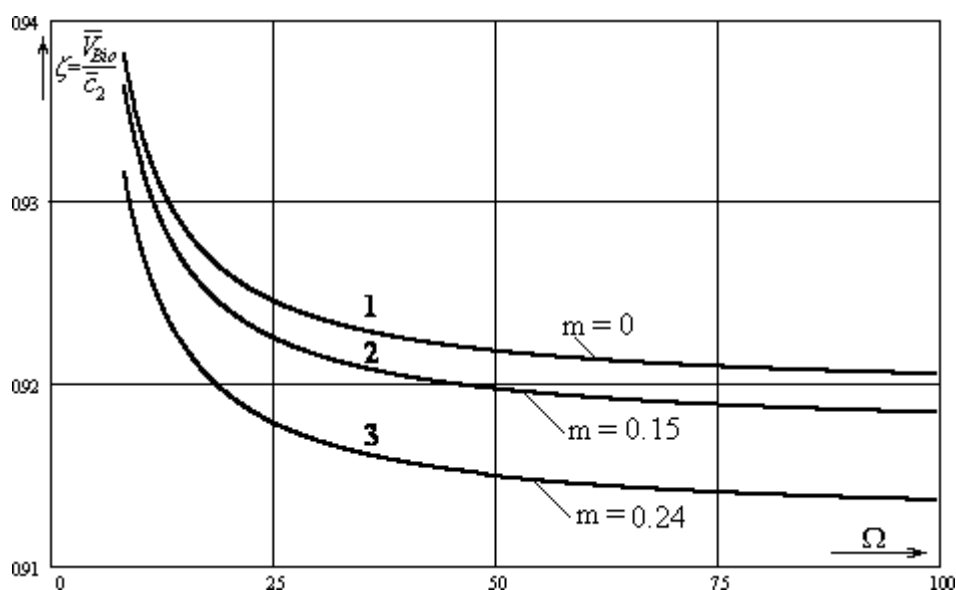


Рис. 2. Зависимость относительной скорости ПВ Био в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде Фэтта от относительной частоты. Кривые 1–3 соответствуют коэффициентам пористости среды $m = 0; 0.15; 0.24$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$.

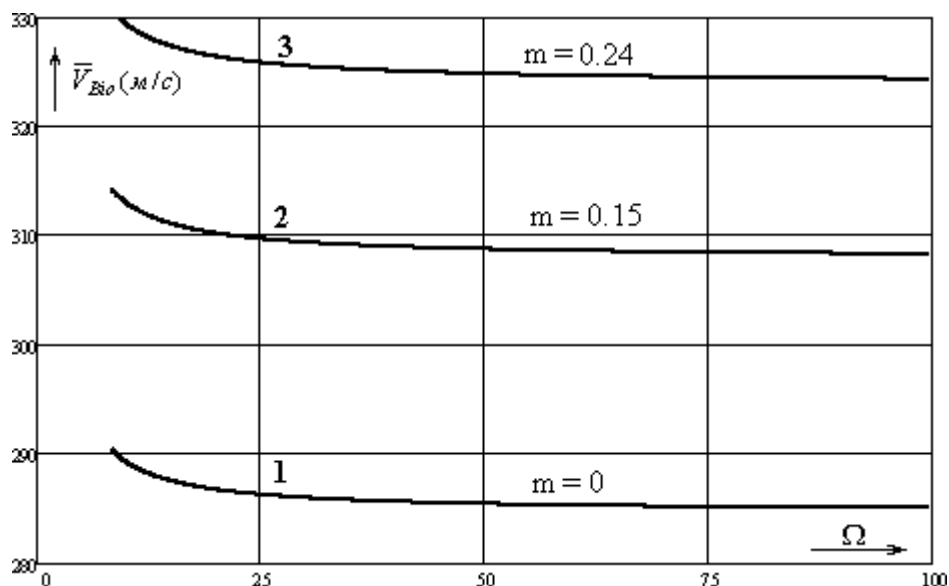


Рис. 3. Зависимость абсолютной скорости ПВ Био в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде Фэтта от относительной частоты. Кривые 1–3 соответствуют коэффициенту пористости среды $m = 0; 0.15; 0.24$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$.

где $\sigma = \sqrt{(0.5 - \nu) / (1 - \nu)}$, ν — коэффициент Пуассона. Действительно, дисперсионные кривые 1 зависимостей $\zeta(x)$ и $\zeta(\Omega)$ на рисунках 1, 2 совпадают с соответствующими кривыми для упругой среды с цилиндрической полостью [6,11,15].

При устремлении к бесконечности радиуса полости в (39) мы получим выражение пропорциональное функции Рэлея $F_R(\xi)$ для пористо-упругого насыщенного жидкостью полупространства [9]:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{D}(\xi) = \frac{i(\xi^2 - \alpha_0^2)}{\xi \bar{\beta}_0 [T(\xi^2 - \alpha_0^2) - (\xi^2 - \alpha_1^2)]} F_R(\xi),$$

$$F_R(\xi) = 2(2\xi^2 - \bar{k}_2^2)[T(\xi^2 - \alpha_0^2) - (\xi^2 - \alpha_1^2)] + 4\xi^2 \bar{\beta}_2 [T\bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_1]. \quad (55)$$

Выражение (55) при переходе к обозначениям принятым в монографии [9] приобретает вид:

$$F_R(\eta) = 2(2\eta^2 - 1)[n_1(\eta^2 - m_2) - n_2(\eta^2 - m_1)] -$$

$$-4\xi^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \left(n_1 \sqrt{\eta^2 - \beta_2^2} - n_2 \sqrt{\eta^2 - \beta_1^2} \right), \quad (56)$$

где величины $\beta_{1,2}$, $n_{1,2}$, $m_{1,2}$, η , выраженные в терминах настоящей статьи, будут:

$$n_1 = \beta_1^2 b_1, \quad n_2 = \beta_2^2 b_0; \quad m_1 = \beta_1^2(1 + a_1), \quad m_2 = \beta_2^2(1 + a_0);$$

$$\beta_1 = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}, \quad \beta_2 = \frac{\bar{k}_0}{\bar{k}_2}; \quad \eta = \frac{1}{\zeta};$$

$$a_j = \frac{A + QM_j}{2\mu}, \quad b_j = \frac{Q + RM_j}{2\mu}, \quad j = 0, 1. \quad (57)$$

Скорость \bar{c}_R рэлеевской волны в ПУНЖС определяется отношением: $\bar{c}_R = \bar{c}_2/\eta_1$, где \bar{c}_2 — скорость поперечных волн в ПУНЖС без учета диссипации; η_1 — вещественный корень функции Рэлея (56).

При больших Ω ($D \gg \bar{\lambda}_2/\pi$) скорости ПВ Био равны скоростям волн Рэлея: для кривых 2–3 (рис.3) — на поверхности пористо-упругого насыщенного жидкостью полупространства с параметрами среды Фэтта, для кривой 1 (рис.3) — на поверхности упругого полупространства с упругими константами: $\mu = 0.25$, $\nu = 0.25$, $\rho = \rho_s = 2.6 \cdot 10^3$ кг/м³ [5,9].

Заключение

В статье получено формальное решение задачи о гармоническом воздействии на поверхность цилиндрической полости в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде. Получено решение дисперсионного уравнения, позволяющее учитывать вклад поверхностной волны Био в волновое поле при различных геометрических и физических параметрах источника. Эти результаты дают возможность

после специальных представлений решений проводить расчеты возникающего волнового поля и его детальный анализ, исследовать энергетические характеристики излучения. Численная реализация рассмотренной задачи позволит также исследовать свойства грунтов и влияние вибрационных воздействий на происходящие в них динамические процессы.

С целью тестирования полученного формального решения задачи, положим параметр пористости среды равным нулю. Решая возникающую при этом из (27) систему линейных алгебраических уравнений, приходим к результату аналогичной задачи в постановке теории упругости, приведенному в монографии В. Новацкого [4]:

$$U_r = \frac{p_0 H_1^{(2)}(k_1 r)}{\mu [k_2^2 k_1^{-1} H_0^{(2)}(k_1 a) - 2a^{-1} H_1^{(2)}(k_1 a)]}, \quad U_z \equiv 0.$$

Благодарности

Автор выражает сердечную благодарность зав. отд. гидродинамики волновых процессов Института гидромеханики НАНУ, доктору физ.-мат. наук, профессору И.Т. Селезову и зам. директора по научной работе Института телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАНУ, доктору техн. наук, профессору А.Н. Трофимчуку за полезные советы и поддержку проекта 261/08 — “Деформирование и разрушение горной породы при механическом воздействии”, тематика которого связана с решением рассмотренной здесь задачи, и который реализован в 2008–2009 г. в Таврическом национальном университете им. В.И. Вернадского.

Список цитируемых источников

1. *Городецкая Н.С.* Отражение волн от свободной границы пористо-упругого насыщенного жидкостью полупространства. // Н.С. Городецкая // Акустичний вісник. — 2002. — Том 5, N 4. — С. 5–14.
2. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и приведений. // И.С. Градштейн, И.М. Рыжик — М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы. Недра, 1962. — 1100 с.
3. *Дыбленко В.П.* Повышение продуктивности и реанимация скважин с применением виброволнового воздействия. // В.П. Дыбленко, Р.Н. Камалов, Р.Я. Шарифуллин, И.А. Туфанов — М.: Недра, 2000. — 381 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. // В. Новацкий — М.: Мир, 1975. — 872 с.
5. *Сеймов В.М.* Колебания и волны в слоистых средах. // В.М. Сеймов, А.Н. Трофимчук, О.А. Савицкий — К.: Наук. думка, 1990. — 224 с.
6. *Сницер А.Р.* Поверхностные волны на полости в полубесконечной упругой среде // А.Р. Сницер // Динамические системы. — 2000. — Вып. 16 — С. 70–80.
7. *Сницер А.Р.* Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. I. Структура волнового поля на поверхности скважины и в дальней зоне. // А.Р. Сницер // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20 — С. 67–88.

8. *Сницер А.Р.* Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. II. Энергетические характеристики излучения. // А.Р. Сницер // Динамические системы. — 2008. — Вып. 25. — С. 103–123.
9. *Трофимчук А.Н.* Динамика пористо-упругих насыщенных жидкостью сред. // А.Н. Трофимчук, А.М. Гомилко, О.А. Савицкий — К.: Наук. думка, 2003. — 232 с.
10. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Я.И. Френкель // Изв.АН СССР. Сер. географическая и геофизическая. — 1944. — 8, N4. — С. 133–149.
11. *Biot M.A.* Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // M.A. Biot // J. Appl. Physics. — 1952. — Vol.23, No 9. — P. 997–1005.
12. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid i. low-frequency ii. higher frequency range // M.A. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — 28, N2. — P. 168–191.
13. *Parnes R.* Applied tractions on the surface of an infinite cylindrical bore // Parnes // Int. J. Solids and Structures. — 1983. — Vol.19, — P. 165–177.
14. *Plona T.J.* Observation of a second bulk compressional wave in porous medium at ultrasonic frequencies // T.J. Plona // Appl. Phys. Let. — 1980. — 36. — P. 259–261.
15. *Snitser A.R.* Surface waves on a cavity in a semi-infinite elastic medium // A.R. Snitser // J. Math. Scienc. — 2001. — Vol. 107, No. 6. — P. 4386–4394.
16. *Snitser A.R.* Radiation problem of normal stress loading of bore surface // A.R. Snitser // PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.) — 2008. — Vol. 7, Iss. 1. — P. 2040059–2040060.

Получена 30.11.2009