Динамические системы, том 2(30), No. 3-4, 309–321

УДК 519.64

Точность полностью дискретного проекционного метода на одном классе периодических интегральных уравнений

Е. В. Семенова, Е. А. Волынец
Институт Математики НАН Украины,
Киев 01601. *E-mail: lebedeva@ipnet.kiev.ua, volynets_ e_ a@ukr.net*

Аннотация. Для одного класса периодических интегральных уравнений с гладкими ядрами предложен полностью дискретный проекционный метод. Показано, что в метрике соболевских пространств предлагаемый подход реализует оптимальную по порядку точность, используя при этом объем дискретной информации на логарифмический множитель меньше, чем методы известные ранее.

Ключевые слова: эллиптические псевдодифференциальные уравнения, шкала соболевских пространств, полностью дискретный проекционный метод.

1. Введение

Как известно, уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые представляют собой естественное обобщение линейных дифференциальных операторов с частными производными, возникают при решении широкого круга задач классической математической физики (например, уравнение Гельмгольца или Лапласа с условиями Дирихле). На сегодняшний день наиболее исследованными являются эллиптические псевдодифференциальные уравнения, которые в пространстве $L_2(0,1)$ некорректно поставлены и требуют особых приемов регуляризации при их решении. Один из подходов к регуляризации таких задач состоит в поиске пары соответствующих пространств, с помощью которых может быть обеспечена устойчивость решаемого уравнения. Например, в работе [7] эллиптические псевдодифференциальные уравнения рассматривались в шкале соболевских пространств, а для построения приближений предлагался метод, состоящий в комбинации полностью дискретной галеркинской схемы с двухсеточным итерационным методом. В [6] на том же классе уравнений указанный подход был упрощен за счет применения метода сопряженных градиентов, допускающего простую итерационную реализацию. Более подробное описание различных методов решения эллиптических псевдодифференциальных уравнений содержится в монографии [8].

В то же время для некоторых конкретных уравнений из описанного класса (например, для уравнения Симма) разработаны иные, более эффективные, схемы решения, которые позволяют сокращать информационные затраты при сохранении порядка погрешности (см. [4], [9]) по сравнению со стандартными подходами.

В данной статье ставится задача применить разработанные в [4], [9] подходы к численному решению на общем классе эллиптических псевдодифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\mathcal{A}u = f, \tag{2.1}$$

где f — 1-периодическая функция, а оператор $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \sum_{p=0}^{q} A_p, \quad A_p u(t) = \int_0^1 k_p(t-s)a_p(t,s)u(s)ds, \quad t \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Обозначим через $C^\infty([0,1]^2)$ пространство C^∞-гладких 1-бипериодических функций двух переменных. Предположим, что $a_p \in C^\infty([0,1]^2)$, $p = 0, \ldots, q$, и

$$a_0(t,t) \neq 0, \forall t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Будем считать, что $k_p(t)$ — 1-периодическая функция с известными коэффициентами Фурье $\hat{k}_p(n)$ по тригонометрическому базису, такими что для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta > 0$ выполняется

$$c_{00}|n|^\alpha \le |\hat{k}_0(n)| \le c_0|n|^\alpha, \quad n \in \mathbb{Z}/0, \tag{2.4}$$

$$|\hat{k}_0(n) - \hat{k}_0(n-1)| \le c\underline{n}^{\alpha-\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

$$|\hat{k}_p(n)| \le c\underline{n}^{\alpha-\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}, p = 1, \ldots, q, \tag{2.6}$$

где c, c_0, c_{00} — некоторые положительные константы, а $\underline{n} = \begin{cases} |n|, & n \in \mathbb{Z}/0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$.

Введем шкалы соболевских пространств, на которых будем рассматривать уравнение (2.1). Обозначим через H^{λ_1} и H^{λ_1,λ_2}, $-\infty < \lambda_1, \lambda_2 < \infty$, гильбертовы пространства 1-периодических и 1-бипериодических функций с нормами

$$\|u\|_{\lambda_1} := \left(|\hat{u}(0)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}/0} |n|^{2\lambda_1} |\hat{u}(n)|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\|a\|_{\lambda_1,\lambda_2} := \left(|\hat{a}(0,0)|^2 + \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2/(0,0)} |k|^{2\lambda_1} |l|^{2\lambda_2} |\hat{a}(k,l)|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

соответственно. Здесь

$$\hat{u}(n) = \int_0^1 e_{-n}(t)u(t)dt, \quad \hat{a}(k,l) = \int_0^1 \int_0^1 e_{-k}(t)e_{-l}(s)a(t,s)dtds$$

— коэффициенты Фурье функций $u(t)$ и $a(t,s)$ по тригонометрическому базису $\{e_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, где $e_k(t) = e^{i2\pi kt}$, $t \in [0,1]$.

Далее нам потребуется утверждение из [7].

Предложение 1. [7, Теорема 5.5.1] Пусть $c_{00}\underline{n}^{\alpha} \leq |\hat{k}(n)| \leq c_0\underline{n}^{\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$, для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда оператор

$$Au(t) = \int_0^1 k(t-s)u(s)ds$$

образует изоморфизм между пространствами H^{λ} и $H^{\lambda-\alpha}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Обобщая сведения, изложенные в главе 6 из [7], сформулируем следующее утверждение, которое для полноты изложения приведем ниже с доказательством.

Предложение 2. Пусть выполнены условия (2.3)-(2.6), тогда оператор $\mathcal{A}$ (2.2) может быть представлен в следующем виде

$$\mathcal{A} = D + A_0' + \sum_{p=1}^{q} A_p, \tag{2.7}$$

где оператор $D \in \mathcal{L}(H^{\lambda}, H^{\lambda-\alpha})$ осуществляет изоморфизм между пространствами H^{λ} и $H^{\lambda-\alpha}$, а операторы $A_0', A_p \in \mathcal{L}(H^{\lambda}, H^{\lambda-\alpha+\beta})$, $p = 1, \ldots, q$, являются компактными на паре пространств H^{λ} и $H^{\lambda-\alpha}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор A_0:

$$A_0u(t) = \int_0^1 k_0(t-s)a_0(t,s)u(s)ds = a_0(t,t)\int_0^1 k_0(t-s)u(s)ds +$$
$$+ \int_0^1 k_0(t-s)(a_0(t,s) - a_0(t,t))u(s)ds =: Du(t) + A_0'u(t).$$

Перепишем оператор A_0' в следующем виде

$$A_0'u(t) = \int_0^1 k_0(t-s)(1-e_1(t-s))\frac{a_0(t,s)-a_0(t,t)}{1-e_1(t-s)}u(s)ds.$$

Очевидно, что коэффициенты Фурье функции $k_0'(t-s) := k_0(t-s)(1-e_1(t-s))$ могут быть найдены по формуле $\hat{k_0'}(n) = \hat{k}_0(n) - \hat{k}_0(n-1), n \in \mathbb{Z}$, а функция $a_0'(t,s) := \frac{a_0(t,s)-a_0(t,t)}{1-e_1(t-s)} \in C^{\infty}([0,1]^2)$ (ноль в знаменателе при $s = t$ компенсируется нулем в числителе). Тогда в силу свойства (2.5) оператор $A_0' \in \mathcal{L}(H^{\lambda}, H^{\lambda-\alpha+\beta})$, а поскольку вложение $H^{\lambda-\alpha+\beta} \subset H^{\lambda-\alpha}$ компактно, то оператор A_0' компактен как оператор, действующий на паре пространстве H^{λ} и $H^{\lambda-\alpha}$. Аналогично, из свойства (2.6) и компактности вложения $H^{\lambda-\alpha+\beta} \subset H^{\lambda-\alpha}$ следует компактность операторов $A_p : H^{\lambda} \to H^{\lambda-\alpha}$, $p = 1, \ldots, q$.

Теперь рассмотрим оператор D. Как следует из предложение 1, если выполнено условие (2.4) и $\hat{k}_0(0) \neq 0$, то отображение $Du(t) = \int_0^1 k_0(t-s)u(s)ds$ является изоморфизмом между пространствами H^λ и $H^{\lambda-\alpha}$. Пусть далее $\hat{k}_0(0) = 0$. В этом случае в качестве операторов D и A_0' возьмем

$$Du(t) = a_0(t,t)[\hat{u}(0) + \int_0^1 k_0(t-s)u(s)ds],$$

$$A_0'u(t) = \int_0^1 a_0'(t,s)k_0'(t-s)u(s)ds - a_0(t,t)\hat{u}(0).$$

Используя предложение 1 и ограниченность функции $a_0(t,t)$ в $H^{\lambda-\alpha}$, получаем, что D — изоморфизм между пространствами H^λ и $H^{\lambda-\alpha}$, а A_0' компактен как оператор, действующий на паре пространстве H^λ и $H^{\lambda-\alpha}$. Тем самым утверждение полностью доказано. $\square$

Из выше доказанного предложения следует, что оператор $\mathcal{A}$ осуществляет изоморфизм из H^λ в $H^{\lambda-\alpha}$. Таким образом, уравнение (2.1) однозначно разрешимо и существует ограниченный обратный оператор $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{\lambda-\alpha}, H^\lambda)$. Поэтому найдутся константы $c_\lambda', c_\lambda'' > 0$, такие что для любого $v \in H^\lambda$ выполняется

$$c_\lambda'\|v\|_\lambda \le \|\mathcal{A}v\|_{\lambda-\alpha} \le c_\lambda''\|v\|_\lambda. \tag{2.8}$$

Далее будем предполагать, что в шкале $\{H_\lambda\}$ известна гладкость правой части, а именно, пусть $f \in H^{\mu-\alpha}$ при некотором заданном $\mu > \alpha + 1/2$.

Отметим, что множество классических эллиптических псевдодиффференциальных уравнений входит в класс уравнений (2.1) с условиями (2.3)- (2.6) (см. [6]). Приведем даже примеры конкретных эллиптических уравнений, удовлетворяющих условиям (2.3)- (2.6).

Пример 1. Типичным уравнением из рассматриваемого класса задач является интегральное уравнение Симма вида

$$\mathcal{A}u(t) := \int_0^1 k_0(t-s)u(s)ds + \int_0^1 a_1(t,s)u(s)ds = f(t), \tag{2.9}$$

$$k_0(t-s) = \log|\sin\pi(t-s)|, \tag{2.10}$$

$$a_1(t,s) = \begin{cases} \log\frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|}{|\sin\pi(t-s)|}, & t \ne s \\ \log(|\gamma'(t)/\pi|), & t = s \end{cases}.$$

Как известно, ядро $a_1(t,s)$ оператора A_1 представляет собой C^∞-гладкую и 1-бипериодическую функцию, а коэффициенты Фурье функции k_0 имеют вид

$$\hat{k}_0(n) = \begin{cases} \frac{1}{2|n|}, & n \in \mathbb{Z}/0 \\ \log 2, & n = 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что условия (2.3)-(2.6) удовлетворяются при $a_0(t,s) = k_1(t,s) \equiv 1$, $\alpha = -1$ и любом $\beta > 0$.

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^1 |x(t)-x(s)|^2 \log|x(t)-x(s)|u(s)ds = f(t), \quad t\in[0,1].$$

Это уравнение соответствует бигармонической задаче Дирихле на ограниченной области Ω с гладкой жордановой границей Γ (более подробно об этом см. [1]). Перепишем это уравнение в форме

$$\int_0^1 k_0(t-s)a_0(t,s)u(s)ds + \int_0^1 a_1(t,s)u(s)ds = f(t),$$

где

$$a_0(t,s) = \frac{|x(t)-x(s)|^2}{\sin^2\pi(t-s)} \quad \text{для} \quad t\neq s, \quad a_0(t,t) = \frac{|x'(t)|^2}{\pi^2},$$

$$a_1(t,s) = |x(t)-x(s)|^2\log\frac{|x(t)-x(s)|}{|\sin\pi(t-s)|} \quad \text{для} \quad t\neq s, \quad a_1(t,t)=0,$$

$$k_0(t) = \sin^2\pi t\log|\sin\pi t|.$$

Коэффициенты Фурье функции k_0 известны и имеют вид

$$\hat{k}_0(0) = -\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}, \quad \hat{k}_0(\pm1) = \frac{1}{4}\log 2-\frac{3}{16}, \quad \hat{k}_0(n) = \frac{1}{4|n|(n^2-1)}, \quad |n|\geq 2.$$

Легко заметить, что условия (2.4) и (2.5) удовлетворяются при $\alpha=-3$, $\beta=1$. Таким образом, рассмотренное уравнение также входит в класс задач (2.1)-(2.6).

Для уточнения гладкостных свойств функций a_p, $p=0,\dots,q$, введем в рассмотрение пространство функций Жевре типа Румье порядка η_1 по обеим переменным (см. [3, с.112]):

$$G_{\eta_1,\eta_2} = \left\{a\in C^\infty : \|a\|^2_{\eta_1,\eta_2} := \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} |\hat{a}(k,l)|^2 e^{2\eta_2(|k|^{1/\eta_1}+|l|^{1/\eta_1})} < \infty\right\}, \eta_1,\eta_2>0. \tag{2.11}$$

Отметим, что при $\eta_1=1$ из (2.11) следует, что функция $a(t,s)$ имеет по обеим переменным аналитическое продолжение в полосу $\{z : z=t+is, |s|<\frac{\eta_2}{2\pi}\}$ комплексной плоскости. Далее будем считать, что $a_p\in G_{\eta_1,\eta_2}, p=0,\dots,q$, при $\eta_1\geq 1$ и $\eta_2>0$.

3. Вспомогательные неравенства

Для изложения дальнейшего материала нам потребуются следующие обозначения. Введем n-мерное подпространство тригонометрических полиномов

$$\mathcal{T}_N = \{u_N : u_N(t) = \sum_{k\in Z_N} c_k e_k(t)\},$$

$$Z_N = \left\{ k : -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}. \tag{3.1}$$

Обозначим через P_N и $P_{N,N}$ ортогональные проекторы

$$P_N u(t) = \sum_{k \in Z_N} \hat{u}(k) e_k(t) \in \mathcal{T}_N,$$

$$P_{N,N} a(t,s) = \sum_{l,k \in Z_N} \hat{a}(k,l) e_k(t) e_l(s) \in \mathcal{T}_N \times \mathcal{T}_N,$$

а через Q_N и $Q_{N,N}$ - интерполяционные проекторы, такие что $Q_N u(t) \in \mathcal{T}_N$ и $Q_{N,N} a(t,s) \in \mathcal{T}_N \times \mathcal{T}_N$ соответственно и на равномерной сетке справедливо

$$(Q_N u)(jN^{-1}) = u(jN^{-1}), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$(Q_{N,N} a)(jN^{-1}, iN^{-1}) = (Q_N^t \otimes Q_N^s) a(t,s) = a(jN^{-1}, iN^{-1}), \quad j, i = 1, 2, \dots, N.$$

Хорошо известно (см., например, [7, гл.8]), что

$$\|u - P_N u\|_\lambda \leq \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda - \nu} \|u\|_\nu, \quad \lambda \leq \nu, \quad u \in H^\nu, \tag{3.2}$$

$$\|u - Q_N u\|_\lambda \leq c_{\lambda,\nu} N^{\lambda-\nu} \|u\|_\nu, \quad 0 \leq \lambda \leq \nu, \quad \nu > \frac{1}{2}, \quad u \in H^\nu, \tag{3.3}$$

где $c_{\lambda,\nu} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda-\nu} \gamma_\nu$, а $\gamma_\nu = \left(1 + 2\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{2\nu}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Кроме того, для любого $v_N \in \mathcal{T}_N$ согласно обратному неравенству Бернштейна выполняется

$$\|v_N\|_\nu \leq \left(\frac{N}{2}\right)^{\nu-\lambda} \|v_N\|_\lambda, \quad \lambda \leq \nu. \tag{3.4}$$

Лемма 1. *Пусть $a \in G_{\eta_1,\eta_2}$, тогда для любых λ_1, λ_2 и $M \geq 2\max\{\left(\frac{\eta_1\lambda_1}{\eta_2}\right), \left(\frac{\eta_1\lambda_2}{\eta_2}\right)\}$ справедливо*

$$\|a - P_{M,M} a\|_{\lambda_1,\lambda_2} \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} e^{-2\eta_2 (\frac{M}{2})^{1/\eta_1}} \|a\|_{\eta_1,\eta_2}.$$

Доказательство. С учетом определения нормы в пространстве H^{λ_1,λ_2} и свойств проектора $P_{M,M}$ имеем

$$\|a - P_{M,M} a\|^2_{\lambda_1,\lambda_2} = \|\sum_{\substack{|k| \geq \frac{M}{2}, \\ k \neq -\frac{M}{2}}}^\infty \sum_{\substack{|l| \geq \frac{M}{2}, \\ l \neq -\frac{M}{2}}}^\infty \hat{a}(k,l) e_k(t) e_l(s)\|^2_{\lambda_1,\lambda_2} = \sum_{\substack{|l|,|k| \geq \frac{M}{2}, \\ l,k \neq -\frac{M}{2}}}^\infty |k|^{2\lambda_1} |l|^{2\lambda_2} |\hat{a}^2(k,l)| =$$

$$= \sum_{\substack{|l|,|k| \geq \frac{M}{2}, \\ l,k \neq -\frac{M}{2}}}^\infty |k|^{2\lambda_1} |l|^{2\lambda_2} |\hat{a}^2(k,l)| e^-_{k,l} e^+_{k,l}, \tag{3.5}$$

где $e^-_{k,l} = e^{-2\eta_2(|k|^{1/\eta_1}+|l|^{1/\eta_1})}$, $e^+_{k,l} = e^{2\eta_2(|k|^{1/\eta_1}+|l|^{1/\eta_1})}$.

Нетрудно убедиться, что функция $x^{2\nu}e^{-2\eta_2 x^{1/\eta_1}}$ убывает на промежутке $\left[\left(\frac{\eta_1\nu}{\eta_2}\right)^{\eta_1};+\infty\right]$. Тогда для всех $x : |x| \in [M;+\infty]$, $M \geq \left(\frac{\eta_1\nu}{\eta_2}\right)^{\eta_1}$, выполняется

$$|x|^{2\nu}e^{-2\eta_2|x|^{1/\eta_1}} < M^{2\nu}e^{-2\eta_2 M^{1/\eta_1}}.$$

Подставляя в последнее неравенство вместо x переменные k и l, а вместо ν — переменные λ_1 и λ_2 соответственно, получим, что для любых $M/2 \geq \max\left\{\left(\frac{\eta_1\lambda_1}{\eta_2}\right)^{\eta_1};\left(\frac{\eta_1\lambda_2}{\eta_2}\right)^{\eta_1}\right\}$ и $k,l : |k|,|l| = M/2,\ldots,+\infty$ имеет место

$$|k|^{2\lambda_1}e^{-2\eta_2|k|^{1/\eta_1}} < \left(\frac{M}{2}\right)^{2\lambda_1} e^{-2\eta_2(M/2)^{1/\eta_1}},$$

$$|l|^{2\lambda_2}e^{-2\eta_2|l|^{1/\eta_1}} < \left(\frac{M}{2}\right)^{2\lambda_2} e^{-2\eta_2(M/2)^{1/\eta_1}}.$$

Отсюда с учетом (3.5) окончательно получим

$$\|a - P_{M,M}a\|^2_{\lambda_1,\lambda_2} \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{2\lambda_1+2\lambda_2} e^{-4\eta_2(\frac{M}{2})^{1/\eta_1}}\|a\|^2_{\eta_1,\eta_2}.$$

□

Лемма 2. *Пусть* $a \in G_{\eta_1,\eta_2}$, *тогда для* $\forall\lambda_1,\lambda_2 \geq \frac{1}{2}$ *и* $M \geq 2\max\{\left(\frac{\eta_1(\lambda_1+1)}{\eta_2}\right),\left(\frac{\eta_1(\lambda_2+1)}{\eta_2}\right)\}$ *выполняется*

$$\|a - Q_{M,M}a\|_{\lambda_1,\lambda_2} \leq z_1(\lambda_1,\lambda_2)\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} e^{-2\eta_2(\frac{M}{2})^{1/\eta_1}}\|a\|_{\eta_1,\eta_2},$$

где $z_1(\lambda_1,\lambda_2) = \gamma_{\lambda_1+1} + \gamma_{\lambda_2+1} + \gamma_{\lambda_1+1}\gamma_{\lambda_2+1}$.

Доказательство. Обозначим через Q^t_M и Q^s_M интерполяционные проекторы по переменным t и s, соответственно. Так как $Q_M e_k(t) = e_k(t)$ для любого $k \in \mathbb{Z}_M$, то

$$Q_M P_M e_k = P_M e_k. \tag{3.6}$$

Тогда с учетом Леммы 1 и (3.3) получим

$$\|a - Q^t_M a\|_{\lambda_1,\lambda_2} = \|(a - P_{M,M}a) - Q^t_M(a - P_{M,M}a)\|_{\lambda_1,\lambda_2} \leq$$

$$\leq \gamma_{\lambda_1+1}\left(\frac{M}{2}\right)^{-1}\|a - P_{M,M}a\|_{\lambda_1+1,\lambda_2} \leq \gamma_{\lambda_1+1}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\|a\|_{\eta_1,\eta_2}.$$

Аналогично для проектора Q^s_M имеем

$$\|a - Q^s_M a\|_{\lambda_1,\lambda_2} \leq \gamma_{\lambda_2+1}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\|a\|_{\eta_1,\eta_2}.$$

Непосредственно из (3.3) и (3.6) с помощью леммы 1 находим

$$\|(I-Q_M^t)(I-Q_M^s)a\|_{\lambda_1,\lambda_2} \le \gamma_{\lambda_1+1}\left(\frac{M}{2}\right)^{-1}\|(I-Q_M^s)(a-P_{M,M}a)\|_{\lambda_1+1,\lambda_2} \le$$

$$\le \gamma_{\lambda_1+1}\gamma_{\lambda_2+1}\left(\frac{M}{2}\right)^{-2}\|a-P_{M,M}a\|_{\lambda_1+1,\lambda_2+1} \le \gamma_{\lambda_1+1}\gamma_{\lambda_2+1}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\|a\|_{\eta_1,\eta_2}.$$

В силу соотношений выше получим, что

$$\|a-Q_{M,M}a\|_{\lambda_1,\lambda_2} = \|a\pm a\pm Q_M^t a\pm Q_M^s a-Q_{M,M}a\|_{\lambda_1,\lambda_2} \le \|a-Q_M^t a\|_{\lambda_1,\lambda_2}+\|a-Q_M^s a\|_{\lambda_1,\lambda_2}+$$

$$+\|(I-Q_M^t)(I-Q_M^s)a\|_{\lambda_1,\lambda_2} \le (\gamma_{\lambda_1+1}+\gamma_{\lambda_2+1}+\gamma_{\lambda_1+1}\gamma_{\lambda_2+1})\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\|a\|_{\eta_1,\eta_2}.$$

Что и требовалось доказать. □

Далее для оценки нормы оператора $\mathcal{A}$ воспользуемся следующими двумя утверждениями, которые доказаны в монографии [7].

Предложение 3. [7, Лемма 6.1.3] Пусть $k(t)$ — 1-периодическая функция, такая что

$$|\hat{k}(n)| \le c_0\underline{n}^{\alpha} \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Тогда для любых $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\nu>1/2$ выполняется

$$\left\|\int_0^1 k(t-s)v(t,s)ds\right\|_{\lambda-\alpha} \le c_0\begin{cases} 2^{\lambda-\alpha+1}\gamma_{\lambda-\alpha}\|v\|_{\lambda-\alpha,\lambda}, & \lambda-\alpha>\frac{1}{2}\\ 2^{\lambda-\alpha+1}\gamma_{\nu}\|v\|_{\nu,\lambda}, & 0\le\lambda-\alpha\le\frac{1}{2}\\ 2^{|\lambda-\alpha|}\gamma_{\nu}\|v\|_{|\lambda-\alpha|+\nu,\lambda}, & \lambda-\alpha\le 0\end{cases},$$

где c_0 — некоторая константа, а $v(t,s)$ — 1-бипериодическая функция такая, что все задействованные соболевские нормы существуют.

Предложение 4. [7, Лемма 6.1.1] Для любых $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\nu>1/2$, $u\in H^{\lambda_1,\lambda_2}$ и $a\in H^{\max(|\lambda_1|,\nu),\max(|\lambda_2|,\nu)}$ имеет место следующее неравенство

$$\|au\|_{\lambda_1,\lambda_2} \le z_2(\lambda_1,\lambda_2)\|a\|_{\max(|\lambda_1|,\nu),\max(|\lambda_2|,\nu)}\|u\|_{\lambda_1,\lambda_2},$$

где $z_2(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{cases} 2^{|\lambda_1|+|\lambda_2|+2}\gamma_{|\lambda_1|}\gamma_{|\lambda_2|} & |\lambda_1|>\frac{1}{2},\ |\lambda_2|>\frac{1}{2}\\ 2^{\nu+|\lambda_2|+2}\gamma_{\nu}\gamma_{|\lambda_2|} & |\lambda_1|\le\frac{1}{2},\ |\lambda_2|>1/2\\ 2^{|\lambda_1|+\nu+2}\gamma_{\nu}\gamma_{|\lambda_1|} & |\lambda_1|>\frac{1}{2},\ |\lambda_2|\le 1/2\\ 2^{2(\nu+1)}\gamma_{\nu}^2 & |\lambda_1|\le\frac{1}{2},\ |\lambda_2|\le 1/2,\end{cases}$.

Теперь, опираясь на эти утверждения, легко получить оценку нормы оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия предложения 3 и*

$$(Au)(t) = \int_0^1 k(t-s)a(t,s)u(s)ds \quad (t \in [0,1]), \tag{3.8}$$

где a — C^∞ гладкая функция по обеим переменным. Тогда для любого $\nu > \frac{1}{2}$ выполняется

$$\|Au\|_{\lambda-\alpha} \leq z_2(\lambda'',\lambda)z_3(\lambda-\alpha)\|a\|_{\lambda'',\max(|\lambda|,\nu)}\|u\|_\lambda,$$

где $\lambda' = \begin{cases} \lambda-\alpha, & \lambda-\alpha > \frac{1}{2}, \\ \nu, & 0 \leq \lambda-\alpha \leq \frac{1}{2}, \\ |\lambda-\alpha|+\nu, & \lambda-\alpha \leq 0 \end{cases}$, $\lambda'' = \begin{cases} \max\{\lambda',\nu\}, & \lambda-\alpha > \frac{1}{2}, \\ \lambda', & \lambda-\alpha \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$,

$$z_3(\lambda-\alpha) = c_0 \begin{cases} 2^{\lambda-\alpha+1}\gamma_{\lambda-\alpha}, & \lambda-\alpha > \frac{1}{2}, \\ 2^{\lambda-\alpha+1}\gamma_\nu, & 0 \leq \lambda-\alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 2^{|\lambda-\alpha|}\gamma_\nu, & \lambda-\alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из предложений 3 и 4. □

4. Полностью дискретный проекционный метод

Аппроксимируем оператор $\mathcal{A}$ оператором

$$\mathcal{A}_M = \sum_{p=0}^{q} A_{p,M}, \tag{4.1}$$

где операторы $A_{p,M}, p = 0,..,q$ имеют вид

$$A_{p,M}u(t) = \int_0^1 k_p(t-s)a_{p,M}(t,s)u(s)ds \tag{4.2}$$

с ядром $a_{p,M} = Q_{M,M}a_p$. Точность построенного приближения (4.2) установлена в следующем утверждении.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия (2.4)- (2.6), а оператор $\mathcal{A}_M$ имеет вид (4.1), тогда для всех $M : M \geq 2\max\{\left(\frac{\eta_1(\lambda''+1)}{\eta_2}\right), \left(\frac{\eta_1(\lambda_\nu+1)}{\eta_2}\right)\}$*

$$\|(\mathcal{A}-\mathcal{A_M})v\|_{\lambda-\alpha} \leq z_4(\lambda-\alpha)c_2 e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \|v\|_\lambda,$$

где $c_2 = (q+1)\max_p\{\|a_p\|_{\eta_1,\eta_2}\}$, $z_4(\lambda-\alpha) = z_1(\lambda'',\lambda_\nu)z_2(\lambda'',\lambda)z_3(\lambda-\alpha)$ и $\lambda_\nu = \max\{|\lambda|,\nu\}$.

Доказательство. Используя леммы 2, 3 и предложение 4, получим

$$\|(\mathcal{A}-\mathcal{A}_{\mathcal{M}})v\|_{\lambda-\alpha} \leq \sum_{p=0}^{q} z_2(\lambda'',\lambda) z_3(\lambda-\alpha)\|a_p - Q_{M,M}a_p\|_{\lambda'',\lambda_\nu}\|v\|_\lambda \leq$$

$$\leq \sum_{p=0}^{q} z_1(\lambda'',\lambda_\nu) z_2(\lambda'',\lambda) z_3(\lambda-\alpha)\|a_p\|_{\eta_1,\eta_2} e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \|v\|_\lambda \leq$$

$$\leq z_1(\lambda'',\lambda_\nu) z_2(\lambda'',\lambda) z_3(\lambda-\alpha) c_2 e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \|v\|_\lambda.$$

□

Правую часть уравнения (2.1) будем аппроксимировать следующим образом

$$f_N := Q_N f, \quad \text{где} \quad N > M.$$

Суть полностью дискретного проекционного метода (ПДПМ) для уравнения (2.1) состоит в решении уравнения

$$P_N \mathcal{A}_M u_{M,N} := \sum_{p=0}^{q} P_N A_{p,M} u_{M,N} = Q_N f, \tag{4.3}$$

где $A_{p,M}$ имеет вид (4.2), а $u_{M,N}$ рассматривается в качестве приближенного решения уравнения (2.1). Отметим, что из свойств (2.4) и (2.5) следует, что $A_{0,M} \in \mathcal{L}(H^\lambda, H^{\lambda-\alpha})$, а $A_{p,M} \in \mathcal{L}(H^\lambda, H^{\lambda-\alpha+\beta})$, где $p = 1, \ldots, q$.

В следующем утверждении установливлено неравенство устойчивости для оператора $P_N\mathcal{A}$.

Лемма 5. [7, Лемма 9.8.2.] *Пусть выполнены условия (2.3)-(2.6). Тогда для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathcal{T}_N$ выполняется*

$$\|v\|_\lambda \leq d_\lambda \|P_N \mathcal{A} v\|_{\lambda-\alpha},$$

где некоторая константа $d_\lambda > 0$.

Описанный выше ПДПМ (4.3) широко применяется для решения такого рода задач и подробно описан в монографии [7]. Идея разделения уровней дискретизации для этого метода впервые была реализована при решении интегрального уравнения Симма (2.9) в [4]. В дальнейшем такой способ дискретизации также был использован в [9] на том же классе задач, что и в [4]. Теперь наша задача состоит в том, чтобы на классе интегральных периодических уравнений вида (2.1) при условиях (2.4)-(2.6) найти погрешность ПДПМ (4.3) с разделенными параметрами дискретизации в метрике соболевских пространств H^λ для $\lambda < \mu$. Кроме того, ставим задачу сократить информационные затраты (т.е. объем дискретной информации в виде значений функций $f(t)$ и $a_p(t,s)$ в точках равномерной сетки) необходимых для достижения точности $O(N^{\lambda-\mu})$. Эта цель будет достигнута за счет разделения параметров дискретизации для правой части и оператора уравнения.

Итак, в следующем утверждении сформулирован основной результат данной работы, где найдена оценка точности метода (4.3) в шкале соболевских пространств H^λ, $\lambda < \mu$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 4 и (2.3)- (2.6). Тогда для любого* $\nu > 1/2$, $\lambda \le \mu$, $\mu > \alpha + 1/2$ *и всех* M *таких, что*

$$z_4(\lambda-\alpha)e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \le 1/2,$$

справедливо

$$\|u-u_{M,N}\|_\lambda \le \left(z_5(\lambda,\alpha,\nu,\mu)N^{\lambda-\mu} + d'_\lambda z_4(\lambda-\alpha)e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu}\right)\|u\|_\mu, \tag{4.4}$$

где $z_4(\lambda-\alpha) = z_1(\lambda'',\lambda_\nu)z_2(\lambda'',\lambda)z_3(\lambda-\alpha)c_2$, $z_5(\lambda,\alpha) = 1 + 2d'_\lambda c''_\lambda$.

Доказательство. Используя неравенство (3.2), получим

$$\|u-u_{M,N}\|_\lambda \le \|u-P_N u\|_\lambda + \|P_N u - u_{M,N}\|_\lambda \le \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\mu}\|u\|_\mu + \|P_N u - u_{M,N}\|_\lambda. \tag{4.5}$$

Оценим последнюю норму отдельно следующим образом. Итак, из лемм 4 и 5 имеем

$$\begin{aligned}\|u_{M,N}-P_N u\|_\lambda &\le d_\lambda\|P_N\mathcal{A}P_N(u_{M,N}-u)\|_{\lambda-\alpha} \le d_\lambda\|P_N\mathcal{A}_M(u_{M,N}-P_N u)\|_{\lambda-\alpha}+\\ &+\|(\mathcal{A}-\mathcal{A}_M)(u_{M,N}-P_N u)\|_{\lambda-\alpha} \le d_\lambda\|P_N(Q_N f-\mathcal{A}_M P_N u)\|_{\lambda-\alpha}+\\ &+z_4(\lambda-\alpha)e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu}\|u_{M,N}-P_N u\|_\lambda.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для достаточно больших M, удовлетворяющих условию теоремы, выполняется

$$\|u_{M,N}-P_N u\|_\lambda \le d'_\lambda\|P_N(Q_N f-\mathcal{A}_M P_N u)\|_{\lambda-\alpha}, \tag{4.6}$$

где $d'_\lambda = 2d_\lambda$.

Из (4.6), используя лемму 4, неравенство (3.2) и (2.8), получим

$$\|u_{M,N} - P_N u\|_\lambda \le d'_\lambda \|P_N(Q_N f - \mathcal{A}_M P_N u)\|_{\lambda-\alpha} \le d'_\lambda (\|P_N(Q_N f - \mathcal{A} P_N u)\|_{\lambda-\alpha} +$$
$$+ \|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_M) P_N u\|_{\lambda-\alpha}) \le d'_\lambda \times$$
$$\left(\|Q_N f - f\|_{\lambda-\alpha} + \|P_N \mathcal{A}(I - P_N) u\|_{\lambda-\alpha} + z_4(\lambda-\alpha) e^{-2\eta_2 \left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \|u\|_\lambda \right) \le$$
$$d'_\lambda \left(\left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\mu} \|f\|_{\mu+\alpha} + c''_\lambda \|(I - P_N) u\|_\lambda + z_4(\lambda-\alpha) e^{-2\eta_2 \left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \|u\|_\lambda \right) \le$$
$$d'_\lambda \left(2c''_\lambda \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\mu} + z_4(\lambda-\alpha) e^{-2\eta_2 \left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \right) \|u\|_\mu.$$

Подставляя оценку выше в (4.5), окончательно получим

$$\|u - u_{M,N}\|_\lambda \le \|u - P_N u\|_\lambda + \|P_N u - u_{M,N}\|_\lambda \le$$
$$\left((1 + d'_\lambda 2c''_\lambda) \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\mu} + d'_\lambda z_4(\lambda-\alpha) e^{-2\eta_2 \left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda''+\lambda_\nu} \right) \|u\|_\mu.$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть* $(M/2)^{\frac{1}{\eta_1}} = \frac{\mu-\lambda}{2\eta_2} \log N + \frac{\eta_1(\lambda''+\lambda_\nu)}{2\eta_2} \log\log N,$ *тогда*

$$\|u - u_{N,M}\|_\lambda \asymp O(N^{\lambda-\mu}). \tag{4.7}$$

Доказательство. Из условия теоремы имеем

$$e^{-2\eta_2 (M/2)^{1/\eta_1}} = e^{(\lambda-\mu)\log N} e^{-\eta_1(\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\})\log\log N} = N^{\lambda-\mu} (\log N)^{-\eta_1(\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\})},$$
$$(M/2)^{\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\}} = \left[\frac{(\mu-\lambda)}{2\eta_2} \log N + \frac{\eta_1(\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\})}{2\eta_2} \log N \log N \right]^{\eta_1(\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\})}$$
$$\le \left[\frac{1}{2\eta_2} (\mu - \lambda + \frac{\eta_1(\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\})}{2\eta_2}) \log N \right]^{\eta_1(\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\})} \asymp (\log N)^{\eta_1(\lambda''+\max\{|\lambda|,\nu\})}.$$

Поставляя полученные соотношения в (4.4), получим утверждение теоремы. □

Замечание 1. В силу оценки (3.2), оценка точности (4.7) для ПДПМ оптимальна по порядку на множестве решений из H^μ, $\mu > \alpha + 1/2$.

Замечание 2. Подсчитаем количество дискретной информации об уравнении (2.1), необходимой для реализации предложенного алгоритма с оптимальной по порядку точностью (4.7). В рамках подхода (4.3) задействовано $O(\log^2 N)$ значений ядра $a_p(t,s)$ в точках равномерной сетки. В то же время в монографии [7] подробно описан подобный подход к решения (2.1), где для его реализации задействован объем дискретной информации порядка $O(N \log N)$. Очевидно преимущество подхода реализованного в данной статье по сравнению с классическими методами из [7].

5. Заключение

Как видно из выше приведенного анализа, применение ПДПМ с разделенными параметрами дискретизации обеспечивает оптимальную по порядку точность на всем классе исследуемых эллиптических псевдодифференциальных уравнения вида (2.1). При этом удается сократить объем информационных затрат на логарифмический множитель.

Отметим также, что в данной работе не предполагалось возмущение входных данных уравнения (2.1). Дальнейшей перспективной задачей в этом направлении представляется исследование аппроксимационных и информационных свойств ПДПМ с разделенными параметрами дискретизации на классе эллиптических псевдодифференциальных уравнения вида (2.1) с неточно заданными входными данными и неизвестной гладкостью μ искомого решения.

Список цитируемых источников

1. *Cheng G., Shou J.* Boundary Element Methods. — San Diego: Academic Press, 1992.
2. *Harbrecht H., Pereverzev S., Schneider R.* Self-regularization by projection for noisy pseudodifferential equations of negative order // Numer. Math. — 2003. — V. 95, No.1. — P. 123–143.
3. *Gorbachuk, V. I., Gorbachuk, M. L.* Boundary value problems for operator differential equations — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1991.
4. *Pereverzev S. V., Prossdorf S.* On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for Symm's integral equation // J. Integral Equations Appl. — 2000. — V. 12, No.2. — P. 113–130.
5. *Pereverzev S., Schock E.* On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — V. 43, No.5. —P. 2060–2076.
6. *Plato R., Vainikko G.* On the fast fully discretized solution of intergral and pseudo-differential equations on smooth curves // Calcolo. — 2001. — V. 38, No.1. — P. 13–36.
7. *Saranen J., Vainikko G.* Periodic Integral and Pseudodifferential Equations with Numerical Approximation. Berlin: Springer. — 2002. — 452 p.
8. *Saranen J., Vainikko G.* Fast solvers of integral and pseudodifferential equations on closed curves // Math. Comp. — 1998. — V. 67, No.224. — P. 1473–1491
9. *Solodky S. G., Lebedeva E. V.* Error bounds of a fully discrete projection method for Symm's integral equation // Comp. Method Appl. Math. — 2007. — V. 7, No.3. — P. 255–263.

Получена 16.11.2012