Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 95–101

УДК 539.3

Элемент в виде прямоугольной пластины в рамках Dynamic Stiffness Method

С. О. Папков

Севастопольский национальный технический университет,

E-mail: stanislav.papkov@gmail.com

Аннотация. Построена динамическая матрица жесткости для прямоугольной пластины в случае общих граничных условий. Данная матрица описывает зависимость между смещениями и усилиями на контуре пластины. Точность построения обеспечивает использование известной асимптотики для элементов бесконечной матрицы, которая находится на основе обобщения достаточного признака существования ненулевого предела у решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: Dynamic Stiffness Method, динамическая матрица жесткости, прямоугольная пластина, бесконечные системы

1. Введение

На сегодняшний день, наиболее распространенными методами для динамического моделирования механических структур являются методы конечных элементов [1] и метод граничных элементов [2]. Для области средних и высоких частот в некоторых отраслях промышленности, таких как авиастроение, оба данных метода приводят к системам уравнений высокого порядка. В связи с этим были развиты такие методы как Statistical Energy Analysis Method [3], Continuous Element Method [4], Spectral Element Method [5] и Dynamic Stiffness Method (DSM) [6].

DSM основывается на точном решении краевой задачи о гармонических колебаниях для элемента. Так для поперечных колебаний прямоугольной пластины, таким решением является решение типа Levy, которое обобщается на случай анизотропии и для уточненных теорий пластин [7]. Данное решение позволяет построить точные аналитические соотношения между векторами нагрузок и соответствующими векторами смещений на границах элемента, которые определяют динамическую матрицу жесткости элемента (DSM). Объединение элементов в единую структуру позволяет на основе DSM матриц для элементов построить глобальную DSM матрицу всего объекта. Существенно сужает область применимости данного метода тот факт, что при использовании формы решения типа Levy на двух противоположных сторонах пластины обязательно реализуются условия шарнирного опирания. Преодоление данного ограничения связано с новыми аналитическими решениями для динамических элементов.

2. Основные соотношения

Рассмотрим прямоугольную изотропную пластину $(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]$, установившиеся вынужденные поперечные колебания которой описываются в рамках классической теории тонких пластин дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \Omega^4 W = 0, \tag{2.1}$$

относительно функции прогиба $w^0(x,y,t) = W(x,y)e^{i\omega t}$. Здесь введен безразмерный частотный параметр $\Omega^4 = \rho h\omega^2/D$, $D = Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга материала, h — толщина пластины, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластины.

Введем векторы граничных смещений и граничных усилий

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} W(a,y) \\ \phi_y(a,y) \\ W(-a,y) \\ \phi_y(-a,y) \\ W(x,b) \\ \phi_x(x,b) \\ W(x,-b) \\ \phi_x(x,-b) \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} V_x(a,y) \\ M_x(a,y) \\ V_x(-a,y) \\ M_x(-a,y) \\ V_y(x,b) \\ M_y(x,b) \\ V_y(x,-b) \\ M_y(x,-b) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

предполагая возможность их разложения в тригонометрические ряды.

Напомним, что если на стороне $x = a$ заданы значения функции прогиба $W(a,y) = 0$ и угла поворота $\phi_y(a,y) = 0$ то это соответствует условию жесткого защемления данной стороны, в случае если момент $M_x(a,y) = 0$ и опорная реакция $V_x(a,y) = 0$ получаем условие свободной стороны пластины. Если же край пластины свободно оперт, то $W(a,y) = 0$ и $M_x(a,y) = 0$. Только в последнем случае переменные в (2.1) разделяются и можно получить аналитическое решение задачи в форме ряда.

Зная общее решение (2.1) можно по известным формулам выразить все кинематические и динамические характеристики колебаний пластины

$$\phi_x = \frac{\partial W}{\partial y};\ \phi_y = -\frac{\partial W}{\partial x}; \tag{2.3}$$

$$V_x = -D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right);\ V_y = D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right); \tag{2.4}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right);\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right); \tag{2.5}$$

Динамическая матрица жесткости $\mathbf{K}$ пластины дает соотношения между последовательностями коэффициентов Фурье граничных смещений и усилий

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \delta \tag{2.6}$$

где $\mathbf{F} = \{f_m^1, f_m^2, ..., f_m^8\}^T; \delta = \{d_m^1, d_m^2, ..., d_m^8\}^T \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$.

В случае свободно опертого края, динамическая матрица жесткости строится на основе решения Levy в следующие три этапа [7]:

— строится общее решение уравнения колебаний (2.1) имеющее достаточное количество неопределенных констант для удовлетворения произвольным граничным условиям на сторонах пластины, которые не оперты;

— вводятся разложения в тригонометрические ряды для векторов граничных смещений и усилий на не опертых сторонах пластины;

— неопределенные константы исключаются для каждой моды колебаний с номером m, что дает блок $\mathbf{K}_m$ динамической матрицы жесткости для каждой гармоники;

Будем следовать данному алгоритму для произвольных граничных условий на всех сторонах пластины, с учетом того факта, что решение уже не будет распадаться на моды.

3. Динамическая матрица жесткости

Общее решение уравнения колебаний (2.1) может быть построено на основе техники разделения переменных как сумма

$$W = W^{00} + W^{01} + W^{10} + W^{11}, \tag{3.1}$$

где W^{00} — симметричная по обеим координатам часть решения, W^{01} — симметричная по x, и антисимметричная по y, и т.п.

В частности, симметричная часть решения может быть записана в форме

$$\begin{gathered} W^{00} = \mathrm{A}_0 \cos \Omega y + B_0 \mathrm{ch} \Omega y + C_0 \cos \Omega x + D_0 \mathrm{ch} \Omega x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{ch} p_{1n} y + B_n \mathrm{ch} p_{2n} y) \cos \alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \mathrm{ch} q_{1n} x + D_n \mathrm{ch} q_{2n} x) \cos \beta_n y; \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\alpha_m = \pi\, m/a$; $\beta_m = \pi\, m/b$; $p_{1n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \Omega^2}$; $p_{2n} = \sqrt{\alpha_n^2 + \Omega^2}$; $q_{1n} = \sqrt{\beta_n^2 - \Omega^2}$; $q_{2n} = \sqrt{\beta_n^2 + \Omega^2}$.

Решение (3.2) удовлетворяет (2.1) a priori, в то же время данное решение содержит достаточный произвол для выполнения любых граничных условий.

Граничные смещения и усилия также могут быть представлены в виде комбинации четырех векторов, каждый из которых отвечает своему типу симметрии, тогда динамическая матрица жесткости пластины $\mathbf{K}$ представляется в виде комбинации четырех матриц $\mathbf{K}^{ij}$ по типу симметрии.

Рассмотрим более подробно построение матрицы $\mathbf{K}^{00}$ для симметричной по обеим координатам составляющей решения. Пусть разложения граничных смещений и усилий имеют вид

$$\vec{d}^{00} = \begin{bmatrix} W_{1_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} W_{1_n} \cos \beta_n y \\ \phi_{y_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi_{y_n} \cos \beta_n y \\ W_{2_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} W_{2_n} \cos \alpha_n x \\ -\phi_{x_0} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi_{x_n} \cos \alpha_n x \end{bmatrix}; \vec{f}^{00} = -D \cdot \begin{bmatrix} V_{x_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_{x_n} \cos \beta_n y \\ M_{x_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} M_{x_n} \cos \beta_n y \\ -V_{y_0} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_{y_n} \cos \alpha_n x \\ M_{y_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} M_{y_n} \cos \alpha_n x \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Вычисляя компоненты векторов (2.2) согласно (2.3)-(2.5) по формуле (3.2) для общего решения W^{00} и сверяя их затем с представлением (3.3), получаем из равенства тригонометрических рядов:

$$\begin{gathered} A_0 = \frac{V_{y_0} + \Omega^2 \phi_{x_0}}{2\Omega^3 \sin \Omega b}; B_0 = \frac{V_{y_0} - \Omega^2 \phi_{x_0}}{2\Omega^3 \mathrm{sh} \Omega b}; C_0 = \frac{V_{x_0} + \Omega^2 \phi_{y_0}}{2\Omega^3 \sin \Omega a}; D_0 = \frac{V_{x_0} - \Omega^2 \phi_{y_0}}{2\Omega^3 \mathrm{sh} \Omega a}; \\ A_n = -\frac{V_{y_n} + (p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2)\phi_{x_n}}{2\Omega^2 p_{1n} \mathrm{sh} p_{1n} b}; B_n = \frac{V_{y_n} + (p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2)\phi_{x_n}}{2\Omega^2 p_{2n} \mathrm{sh} p_{2n} b}; \\ C_n = -\frac{V_{x_n} + (q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2)\phi_{y_n}}{2\Omega^2 q_{1n} \mathrm{sh} q_{1n} a}; D_n = \frac{V_{x_n} + (q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2)\phi_{y_n}}{2\Omega^2 q_{2n} \mathrm{sh} q_{2n} a}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Таким образом, после подстановки (3.4) в (3.2), общее решение оказывается представленным через коэффициенты $\phi_{x_n}, \phi_{y_n}, V_{x_n}, V_{y_n}$. Данные коэффициенты, в свою очередь, могут быть связаны между собой и с коэффициентами $W_{1_n}, M_{x_n}, W_{2_n}, M_{y_n}$ посредством равенств:

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{ctg}\Omega a+\mathrm{cth}\Omega a}{2\Omega^3}V_{x_0}+\frac{1}{b\Omega^4}V_{y_0}-W_{1_0}+\frac{\mathrm{ctg}\Omega a-\mathrm{cth}\Omega a}{2\Omega}\phi_{y_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{bp_{1n}^2p_{2n}^2}\left(V_{y_n}+\nu\alpha_n^2\phi_{x_n}\right),\\
\frac{1}{a\Omega^4}V_{x_0}+\frac{\mathrm{ctg}\Omega b+\mathrm{cth}\Omega b}{2\Omega^3}V_{y_0}-W_{2_0}+\frac{\mathrm{ctg}\Omega b-\mathrm{cth}\Omega b}{2\Omega}\phi_{x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{aq_{1n}^2q_{2n}^2}\left(V_{x_n}+\nu\beta_n^2\phi_{y_n}\right),\\
M_{x_0}+\frac{\mathrm{ctg}\Omega a-\mathrm{cth}\Omega a}{2\Omega}V_{x_0}+\frac{\Omega(\mathrm{ctg}\Omega a+\mathrm{cth}\Omega a)}{2}\phi_{y_0}+\frac{\nu}{b}\phi_{x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{bp_{1n}^2p_{2n}^2}\left(\alpha_n^2V_{y_n}+\nu\Omega^4\phi_{x_n}\right),\\
M_{y_0}+\frac{\mathrm{ctg}\Omega b-\mathrm{cth}\Omega b}{2\Omega}V_{y_0}+\frac{\nu}{a}\phi_{y_0}+\frac{\Omega(\mathrm{ctg}\Omega b+\mathrm{cth}\Omega b)}{2}\phi_{x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{aq_{1n}^2q_{2n}^2}\left(\beta_n^2V_{x_n}+\nu\Omega^4\phi_{y_n}\right),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{2m}V_{x_m}-2\Omega^2W_{1_m}+\Delta_{1m}\phi_{y_m}=\\
&\qquad=\frac{4\Omega^2(-1)^m}{bq_{1m}^2q_{2m}^2}(V_{y_0}+\beta_m^2\phi_{x_0})+\frac{4\Omega^2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\left(V_{y_n}+(\beta_m^2+\nu\alpha_n^2)\phi_{x_n}\right)}{(\alpha_n^2+q_{1m}^2)(\alpha_n^2+q_{2m}^2)},\\
&\Delta_{4m}V_{y_m}-2\Omega^2W_{2_m}+\Delta_{3m}\phi_{x_m}=\\
&\qquad=\frac{4\Omega^2(-1)^m}{ap_{1m}^2p_{2m}^2}(V_{x_0}+\alpha_m^2\phi_{y_0})+\frac{4\Omega^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\left(V_{x_n}+(\alpha_m^2+\nu\beta_n^2)\phi_{y_n}\right)}{(\beta_n^2+p_{1m}^2)(\beta_n^2+p_{2m}^2)},\\
&2\Omega^2M_{x_m}-\Delta_{6m}V_{x_m}+\Delta_{5m}\phi_{y_m}=\frac{4\nu\Omega^2(-1)^m}{bq_{1m}^2q_{2m}^2}(\beta_m^2V_{y_0}+\Omega^4\phi_{x_0})+\\
&\qquad+\frac{4\Omega^2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\left(\left(\nu\beta_m^2+\alpha_n^2\right)V_{y_n}+\left((1-\nu)^2\beta_m^2\alpha_n^2+\nu\Omega^4\right)\phi_{x_n}\right)}{(\alpha_n^2+q_{1m}^2)(\alpha_n^2+q_{2m}^2)},\\
&2\Omega^2M_{y_m}-\Delta_{8m}V_{y_m}+\Delta_{7m}\phi_{x_m}=\frac{4\nu\Omega^2(-1)^m}{ap_{1m}^2p_{2m}^2}\left(\alpha_m^2V_{x_0}+\Omega^4\phi_{y_0}\right)+\\
&\qquad+\frac{4\Omega^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\left(\left(\nu\alpha_m^2+\beta_n^2\right)V_{x_n}+\left((1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2+\nu\Omega^4\right)\phi_{y_n}\right)}{(\beta_n^2+p_{1m}^2)(\beta_n^2+p_{2m}^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta_{1n}&=\frac{q_{1n}^2-(2-\nu)\beta_n^2}{q_{2n}}\mathrm{cth}q_{2n}a-\frac{q_{2n}^2-(2-\nu)\beta_n^2}{q_{1n}}\mathrm{cth}q_{1n}a,\\
\Delta_{2n}&=\frac{\mathrm{cth}q_{2n}a}{q_{2n}}-\frac{\mathrm{cth}q_{1n}a}{q_{1n}},\\
\Delta_{3n}&=\frac{p_{1n}^2-(2-\nu)\alpha_n^2}{p_{2n}}\mathrm{cth}p_{2n}b-\frac{p_{2n}^2-(2-\nu)\alpha_n^2}{p_{1n}}\mathrm{cth}p_{1n}b,\\
\Delta_{4n}&=\frac{\mathrm{cth}p_{2n}b}{p_{2n}}-\frac{\mathrm{cth}p_{1n}b}{p_{1n}},\\
\Delta_{5n}&=\frac{(q_{2n}^2-(2-\nu)\beta_n^2)(q_{1n}^2-\nu\beta_n^2)}{q_{1n}}\mathrm{cth}q_{1n}a-\frac{(q_{1n}^2-(2-\nu)\beta_n^2)(q_{2n}^2-\nu\beta_n^2)}{q_{2n}}\mathrm{cth}q_{2n}a,
\end{aligned}
$$

$$\Delta_{6n}=\frac{q_{2n}^2-\nu\beta_n^2}{q_{2n}}\mathrm{cth}q_{2n}a-\frac{q_{1n}^2-\nu\beta_n^2}{q_{1n}}\mathrm{cth}q_{1n}a,$$
$$\Delta_{7n}=\frac{(p_{2n}^2-(2-\nu)\alpha_n^2)(p_{1n}^2-\nu\alpha_n^2)}{p_{1n}}\mathrm{cth}p_{1n}b-\frac{(p_{1n}^2-(2-\nu)\alpha_n^2)(p_{2n}^2-\nu\alpha_n^2)}{p_{2n}}\mathrm{cth}p_{2n}b;$$
$$\Delta_{8n}=\frac{p_{2n}^2-\nu\alpha_n^2}{p_{2n}}\mathrm{cth}p_{2n}b-\frac{p_{1n}^2-\nu\alpha_n^2}{p_{1n}}\mathrm{cth}p_{1n}b.$$

Система (3.5) может быть записана в матричной форме относительно последовательностей коэффициентов Фурье граничных смещений и усилий:

$$\begin{cases} A^{clamped}\bar{V}+\bar{W}+A^{mix1}\bar{\phi}=0 \\ A^{free}\bar{\phi}+\bar{M}+A^{mix2}\bar{V}=0 \end{cases} \tag{3.6}$$

где

$$\bar{W}=\{W_{1_0},W_{2_0},\ldots,W_{1m},W_{2_m},\ldots\}^T;\qquad \bar{\phi}=\{\phi_{y_0},\phi_{x_0},\ldots,\phi_{y_m},\phi_{x_m},\ldots\}^T;$$
$$\bar{M}=\{M_{x_0},M_{y_0},\ldots,M_{x_m},M_{y_m},\ldots\}^T;\quad \bar{V}=\{V_{x_0},V_{y_0},\ldots,V_{x_m},V_{y_m},\ldots\}^T.$$

В случае колебаний пластины со свободными краями $\bar{M}=\bar{V}=0$ система (3.6) принимает вид

$$\begin{cases} \bar{W}+A^{mix1}\bar{\phi}=0 \\ A^{free}\bar{\phi}=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

и собственные частоты колебаний определяются в этом случае из уравнения

$$\det\begin{bmatrix} I & A^{mix1} \\ 0 & A^{free}\end{bmatrix}=\det A^{free}=0 \tag{3.8}$$

Аналогично, собственные частоты колебания полностью защемленной пластины $\bar{W}=\bar{\phi}=0$ находятся из уравнения

$$\det A^{clamped}=0 \tag{3.9}$$

Собственные частоты колебаний двух смешанных краевых задач дают дисперсионные уравнения

$$\bar{W}=\bar{V}=0:\quad \det A^{mix1}=0$$
$$\bar{\phi}=\bar{M}=0:\quad \det A^{mix2}=0$$

Система (3.6) может быть разрешена относительно смещений согласно формулам

$$\begin{aligned}\bar{W}&=P^{11}\bar{V}+P^{12}\bar{M}\\ \bar{\phi}&=P^{21}\bar{V}+P^{22}\bar{M},\end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$P^{11}=A^{mix1}(A^{free})^{-1}A^{mix2}-A^{clamped};\quad P^{12}=A^{mix1}(A^{free})^{-1};$$
$$P^{21}=-(A^{free})^{-1}A^{mix2};\qquad P^{22}=-(A^{free})^{-1}.$$

Тогда получаем блок обратной матрицы к матрице $\mathbf{K}^{00}$ следующего вида

$$\left(\mathbf{K}^{00}\right)^{-1}_{mn}=\begin{bmatrix} P^{11}_{mn} & P^{12}_{mn} \\ P^{21}_{mn} & P^{22}_{mn}\end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Главное преимущество такого подхода заключается в возможности практически точного обращения бесконечной матрицы $(A^{free})^{-1}$. Действительно, пусть элементы этой матрицы равны $(A^{free})^{-1} = \{z_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$ (для удобства нумерацию начинаем с нуля), тогда из матричного тождества

$$A^{free}(A^{free})^{-1} = I \tag{3.12}$$

следует бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно столбца данной матрицы $\{z_{m,j}\}_{m=0}^{\infty} \quad (j = 0, 1, \dots)$

$$\begin{gathered}
\frac{\Omega(\cot\Omega a + \coth\Omega a)}{2} z_{0j} + \frac{\nu}{b} z_{1j} = \frac{\nu\Omega^4}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p_{1n}^2 p_{2n}^2} z_{2n+1,j} + \delta_{j0},\\
\frac{\nu}{a} z_{0j} + \frac{\Omega(\cot\Omega b + \coth\Omega b)}{2} z_{1j} = \frac{\nu\Omega^4}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{q_{1n}^2 q_{2n}^2} z_{2n,j} + \delta_{j1},\\
(-1)^m z_{2m,j} = \frac{4\nu\Omega^6}{b\Delta_{5m} q_{1m}^2 q_{2m}^2} z_{1j} +\\
+\frac{4\Omega^2}{b\Delta_{5m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)^2\beta_m^2\alpha_n^2 + \nu\Omega^4}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)}(-1)^n z_{2n+1,j} + \frac{2\Omega^2(-1)^m\delta_{j,2m}}{\Delta_{5m}},\\
(-1)^m z_{2m+1,j} = \frac{4\nu\Omega^6}{a\Delta_{7m} p_{1m}^2 p_{2m}^2} z_{0j} +\\
+\frac{4\Omega^2}{a\Delta_{7m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)^2\beta_n^2\alpha_m^2 + \nu\Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)}(-1)^n z_{2n,j} + \frac{2\Omega^2(-1)^m\delta_{j,2m+1}}{\Delta_{7m}}.
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Система (3.13) исследована в [8], где доказана ее квазирегулярность

$$\lim_{m\to\infty}\frac{4\Omega^2}{b\Delta_{5m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)^2\beta_m^2\alpha_n^2 + \nu\Omega^4}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{4\Omega^2}{a\Delta_{7m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)^2\beta_n^2\alpha_m^2 + \nu\Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} = \frac{1-\nu}{3+\nu} < 1,$$

что приводит к наличию единственного ограниченного решению на частотах колебаний, отличных от собственных частот. На основе авторского обобщения достаточного признака существования ненулевого предела у решения такой системы [9], находится асимптотика

$$z_{2m,j} = \frac{(-1)^m b G_j}{\beta_m^{2+\lambda}};\, z_{2m+1,j} = \frac{(-1)^m a G_j}{\alpha_m^{2+\lambda}} \tag{3.14}$$

где G_j — некоторая константа, $\lambda \in (0;\ 1)$ определяется как корень уравнения

$$\frac{(1-\nu)(1+\lambda)}{3+\nu} = \cos\frac{\pi\lambda}{2} \tag{3.15}$$

Знание асимптотики (3.14) позволяет определить столбец матрицы $(A^{free})^{-1}$ из решения системы порядка $2N+3$ относительно первых элементов $z_{0j}, z_{1j}, ..., z_{2N,j},\ z_{2N+1,j}$ и предельной константы G_j.

Алгоритм построения остается без изменений и для всех других типов симметрии, если в качестве констант разделения для нечетной составляющей решения по осям x и y выбрать соответственно $\tilde{\alpha}_m = \pi\,(m-1/2)/a$; $\tilde{\beta}_m = \pi\,(m-1/2)/b$. Остается справедливой также асимптотика (3.14), что позволяет получить сначала $\mathbf{K}^{ij}$, а затем и общую динамическую матрицу жесткости прямоугольной пластины.

4. Заключение

Впервые получена динамическая матрица жесткости для прямоугольной пластины в случае общих граничных условий, которая устанавливает взаимосвязь между величинами граничных векторов смещений и усилий. Точность построения элементов данной бесконечной матрицы обеспечивается знанием степенной асимптотики элементов $(A^{free})^{-1}$. Полученная динамическая матрица жесткости пластины позволяет описать соответствующий непрерывный элемент структуры данного вида и дает возможность для стыковки отдельных матриц ансамбля пластин в единую динамическую матрицу жесткости структуры.

Список цитируемых источников

1. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The Finite Element Method — Volume 1: the basis. —5-th edition. — Btterworth-Heinemann, Boston, 2000.
2. *Banerjee P. K., Butterfield R.* Boundary Element Methods in Engineering Science. — McGraw-Hill Book Company, UK, 1981.
3. *Lyon R. H., DeJong R. G.* Theory and Application of Statistical Energy Analysis —Butterworth-Heinemann, Boston, 1995.
4. *Kevorkian S., Pascal M.* An accurate method for free vibration analysis of structures with application to plates // Journal of Sound and Vibration —246 (5). — 2001. —pp. 795-814.
5. *Lee U., Lee J.* Spectral-element method of Levy-type plates subjected to dynamics loads //Journal of Engineering Mechanics. —February, 1999.— pp. 243-247.
6. *Wittrick, W. H., Williams F. W.* A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures//Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics —1971; 24 —pp. 263-84.
7. *Boscolo M., Banerjee J. R.* Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory // Computers Structures — 2011; 89: — pp. 395-410.
8. *Папков С. О., Мелешко В. В.* Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // Акустичний вісник. — Київ, 2009., Т.12. №4. — С.34-51.
9. *Папков С. О.* Обобщение закона асимптотических выражений Кояловича на случай неотрицательной бесконечной матрицы // Динамические системы. — 2011, т.1. (29) —№2 — С. 255-267.

Получена 08.06.2013