Динамические системы, вып. 26 (2009), 69–78

УДК 517.9

Зліченновимірні крайові задачі для диференціальних рівнянь

Є.В. Панасенко
Запорізький національний університет,
Запоріжжя, 69600. *E-mail: innovatory@rambler.ru*

Анотація. В даній роботі отримано критерій існування розв'язків лінійних неоднорідних зліченновимірних крайових задач в просторі обмежених числових послідовностей. Використовуючи апарат теорії узагальнено обернених матриць, знайдено умови нормальної розв'язності таких задач. Крім того розглянуто приклади існування розв'язків зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, де кількість крайових умов і кількість розв'язків може бути зліченновимірним.

Ключові слова: зліченновимірна крайова задача, узагальнено обернена матриця, еволюційний оператор, нормально розв'язний оператор.

1. Постановка задачі

Розглянуто крайову задачу для зліченновимірної системи диференціальних рівнянь в банаховому просторі обмежених числових послідовностей $\mathfrak{M} = \ell_\infty$ [8, 9, с.25]:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{1.1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{1.2}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a;b]$ в банахів простір $\mathfrak{M}$: $f(t) \in C([a;b], \mathfrak{M}) := \{f(\cdot) : [a;b] \to \mathfrak{M}, \|f\| = \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|\}$, $C([a;b], \mathfrak{M})$ — банахів простір неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій; $\ell = \mathrm{col}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n, \ldots)$ — лінійний зліченновимірний вектор-функціонал, який діє з $C[a;b]$ в банахів простір $\mathfrak{M}$: $\ell : C[a;b] \to \mathfrak{M}$; α елемент простору $\mathfrak{M}$. $A(t)$ — зліченновимірна матриця, яка при кожному дійсному значенні t діє в просторі $\mathfrak{M}$ сильно неперервна [5, с.141], норма в якому визначається наступним чином:

$$|||A||| = \sup_{t\in[a;b],i,j\in\mathbb{N}} \|a_{ij}(t)\| < \infty.$$

Тоді розв'язок $x(t)$ рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_a^t (A(s)x(s) + f(s))ds,$$

неперервно-диференційовний в кожній точці $t \in [a; b]$ і задовольняє рівняння (1.1) всюди на $[a; b]$. Отже розв'язок $x(t)$ рівняння (1.1) будемо шукати в просторі $C^1([a; b], \mathfrak{M})$ неперервно-диференційовних на $[a; b]$ функцій зі значеннями в банаховому просторі обмежених числових послідовностей $\mathfrak{M}$.

У даному випадку

$$x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots) \in C^1([a; b], \mathfrak{M}),$$
$$f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), \dots) \in C([a; b], \mathfrak{M}),$$

— зліченновимірні вектор-стовпчики.

Знайдемо умови існування та структуру розв'язків неоднорідної зліченновимірної крайової задачі (1.1)-(1.2). У випадку $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ присвячено роботи [1, 2, 11], а для зліченновимірних некретичних крайових задач у монографії [8].

2. Основний результат

Використовуючи апарат теорії узагальнено обернених матриць [2, 11], знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності зліченновимірної крайової задачі (1.1)-(1.2) в просторі обмежених числових послідовностей $\mathfrak{M}$. Позначимо через $U(t, \tau)$ — еволюційний оператор [5, с.147], який задовольняє операторне рівняння:

$$\frac{dU(t, \tau)}{dt} = A(t)U(t, \tau);$$

$U(\tau, \tau) = I$ — одиничний оператор, оператор $U(t, \tau)$ можна знайти у вигляді рівномірно збіжного за операторною нормою ряду методом послідовних наближень [5, 6]. Загальний розв'язок матричного рівняння має вигляд [5, с.147]:

$$x(t) = U(t)x_0 + \overline{x}(t), \; U(t) = U(t, a), \tag{2.1}$$

де $x_0 = x(a)$ – елемент простору $\mathfrak{M}$ (зліченновимірний вектор-стовпчик), $\overline{x}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.1), який може бути записаний у вигляді:

$$\overline{x}(t) = \int_a^b K(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

де $K(t, \tau) = U(t)U^{-1}(\tau), \quad \tau \leq t; \quad K(t, \tau) = 0, \quad \tau > t.$

Зауваження 1. У випадку зліченних систем еволюційний оператор $U(t)$ співпадає з нормальною фундаментальною матрицею $X(t)$, яка буде зліченновимірною [8].

Підставимо (2.1) в крайову умову (1.2) та отримаємо наступне рівняння відносно елемента x_0 простору $\mathfrak{M}$:

$$Qx_0 = \alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau, \tag{2.2}$$

де $Q = \ell X(\cdot)$ — оператор (який представляє собою зліченновимірну матрицю Q), отриманий підстановкою в крайову умову (1.2) нормальної фундаментальної матриці $X(t)$. Будемо припускати, що зліченновимірна матриця $Q : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є узагальнено-оборотна. Відомо [2, с.39], що ця умова еквівалентна наступним умовам:

1) оператор Q є нормально розв'язним оператором;
2) підпростір $\ker Q$ має пряме доповнення в $\mathfrak{M}$;
3) підпростір $\mathrm{Im} Q$ має пряме доповнення в $\mathfrak{M}$.

Тоді існують [5] обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathfrak{M} \to N(Q)$ та $\mathcal{P}_Y : \mathfrak{M} \to Y$, які індукують розбиття $\mathfrak{M}$ в прямі топологічні суми замкнутих підпросторів

$$\mathfrak{M} = N(Q) \oplus X,$$

$$\mathfrak{M} = Y \oplus R(Q).$$

В силу нормальної розв'язності оператора Q рівняння (2.2) розв'язне [9] тоді й тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right] = 0, \tag{2.3}$$

де $\mathcal{P}_{N(Q^*)}$ проектор (представляє собою зліченновимірну матрицю) на ядро матриці Q^* спряженої до матриці Q. При умові (2.3) і тільки при ній, матричне рівняння рівняння (2.2) має множину розв'язків у вигляді:

$$x_0 = \mathcal{P}_{N(Q)} c + Q^- \left(\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right), \tag{2.4}$$

де c довільний елемент з простору обмежених числових послідовностей $\mathfrak{M} : c \in \mathfrak{M}$; Q^- — узагальнено-обернена матриця до матриці Q [2]. Підставимо x_0 у вираз (2.1), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1.1)-(1.2) у вигляді:

$$x(t) = X(t) \mathcal{P}_{N(Q)} c + X(t) Q^- \alpha + (Gf)(t), \tag{2.5}$$

де $(Gf)(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (1.1)-(1.2), який діє на вектор-функцію $f(t) \in C([a; b], \mathfrak{M})$ наступним чином:

$$(Gf)(t) := \int_a^b K(t, \tau) f(\tau) d\tau - X(t) Q^- \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau. \tag{2.6}$$

Отже, критерій розв'язності крайової задачі (1.1)-(1.2) в просторі обмежених числових послідовностей може бути сформульований наступним чином.

Теорема 1. *Якщо матриця Q є узагальнено-оборотна, то однорідна крайова задача* (1.1)-(1.2) *має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків, де $U(t, \tau)$*

— еволюційний оператор [5] *однорідного рівняння* (1.1). *Неоднорідна задача* (1.1)-(1.2) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли* $f(t) \in C\left([a;b], \mathfrak{M}\right)$ *та* $\alpha \in \mathfrak{M}$ *задовольняють зліченну кількість лінійно незалежних умов* (2.3) *і при цьому має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків* (2.5).

Зауваження 2. Якщо в умовах теореми 1 розмірності ядра Q та спряженого ядра Q^* є нескінченними, то неоднорідна крайова задача (1.1)-(1.2) має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків. Якщо розмірність ядра Q скінченна, а розмірність спряженого ядра Q^* нескінченна, тоді неоднорідна крайова задача (1.1)-(1.2) має скінченну кількість лінійно незалежних розв'язків. Якщо розмірність ядра Q нескінченна, а розмірність спряженого ядра Q^* скінченна, тоді неоднорідна крайова задача (1.1)-(1.2) має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків. Якщо $\dim\ker Q < \infty$ і $\dim\ker Q^\star < \infty$, тоді маємо нетерову крайову задачу.

3. Приклади

Розглянемо декілька прикладів зліченних крайових задач, які ілюструють вище наведену теорію.

3.1. Нормально розв'язна задача

Розглянемо систему (1.1)-(1.2) з матрицями $A(t)$ і $f(t)$:

$$A(t) = \mathrm{diag}\{-\mathrm{tg}\ t, -\mathrm{tg}\ t, \ldots, -\mathrm{tg}\ t, \ldots\},$$

$$f(t) = \mathrm{col}\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots\},$$

і крайовою умовою виду $\ell x(\cdot) = Mx(0) - Nx(\frac{\pi}{3}) = \alpha$, де

$$M = \mathrm{diag}\{4, 2, 4, 2, \ldots, 4, 2, \ldots\},$$

$$N = \mathrm{diag}\{4, 4, 4, \ldots, 4, \ldots\},$$

$$\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\} \in \mathfrak{M};\ \alpha_i = \mathrm{const},\ i = \overline{1, \infty}.$$

Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді зліченновимірного вектор-стовпчика $x(t) = \mathrm{col}\{x_1(t),\, x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots\} \in C^1\left([a;b], \mathfrak{M}\right)$.

Дійсно, оператор $A(t)$ належить даному простору:

$$|||A||| = \sup_{t\in[0;\frac{\pi}{3}], i,j\in\mathbb{N}} \|a_{ij}(t)\| = \sup_{t\in[0;\frac{\pi}{3}]} \|-\mathrm{tg}\ t\| \leq \sqrt{3} < +\infty.$$

Еволюційний оператор задачі має вигляд:

$$U(t) = \mathrm{diag}\{\cos t, \cos t, \ldots, \cos t, \ldots\}.$$

Обернений до $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\cos t}, \frac{1}{\cos t}, \dots, \frac{1}{\cos t}, \dots\right\}.$$

$$Q = M - NU\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = \operatorname{diag}\{2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, \dots\},$$

$$Q^{-} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{diag}\{1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots\}.$$

Проектори відповідно дорівнюють:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^{-}Q = \operatorname{diag}\{0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots\},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^{-} = \operatorname{diag}\{0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots\}.$$

Довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (1.1) має вид:

$$\overline{x}(t) = \int_0^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= \operatorname{col}\left(\int_0^t \frac{\cos t f_1(\tau) d\tau}{\cos \tau}, \int_0^t \frac{\cos t f_2(\tau) d\tau}{\cos \tau}, \dots, \int_0^t \frac{\cos t f_k(\tau) d\tau}{\cos \tau}, \dots\right).$$

Умова розв'язності (2.3) для даної задачі має вид:

$$\begin{cases} \alpha_2 &= -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f_2(\tau)}{\cos\tau} d\tau, \\ \alpha_4 &= -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f_4(\tau)}{\cos\tau} d\tau, \\ \dots \\ \alpha_{2k} &= -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f_{2k}(\tau)}{\cos\tau} d\tau, \\ \dots \end{cases}$$

При знайдених $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2k}, \dots (k \in \mathbb{N})$ і $\forall\ \alpha_{2k+1},\ (k \in \mathbb{N})$, будь-яких $f(t) \in C([a;b], \mathfrak{M})$ задача має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків:

$$x(t) = \operatorname{diag}\{0, \cos t, 0, \cos t, \dots, 0, \cos t, \dots\}c +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{\cos t, 0, \cos t, 0, \dots, \cos t, 0, \dots\}\alpha + (Gf)(t),\ \forall\ c \in \mathfrak{M},$$

або

$$x(t) = \operatorname{diag}\{0, \cos t, 0, \cos t, \dots, 0, \cos t, \dots\}c +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{\cos t, 0, \cos t, 0, \dots, \cos t, 0, \dots\}\alpha +$$

$$+ \operatorname{col}\left(\int_0^t \frac{\cos t f_1(\tau) d\tau}{\cos \tau}, \int_0^t \frac{\cos t f_2(\tau) d\tau}{\cos \tau}, \dots, \int_0^t \frac{\cos t f_k(\tau) d\tau}{\cos \tau}, \dots\right) +$$

$$+\mathrm{col}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t f_1(\tau)d\tau}{\cos\tau}, 0, \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t f_3(\tau)d\tau}{\cos\tau}, 0, \ldots, \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t f_{2k+1}(\tau)d\tau}{\cos\tau}, 0, \ldots\right),$$

де $k \in \mathbb{N}$.

3.2. n-нормальна задача

Розглянемо систему (1.1)-(1.2) з матрицями $A(t)$ і $f(t)$:

$$A(t) = \mathrm{diag}\left\{\frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right\},$$

$$f(t) = \mathrm{col}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\},$$

і крайовою умовою виду $\ell x(\cdot) = Mx(0) - Nx(2) = \alpha$, де

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\} \in \mathfrak{M}; \ \alpha_i = \mathrm{const}, \ i = \overline{1, \infty}.$$

Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді скінченого вектор-стовпчика $x(t) = \mathrm{col}\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} \in C^1([a;b], \mathbb{R}^3)$.

Дійсно, оператор $A(t)$ належить даному простору:

$$|||A||| = \sup_{t\in[0;2], i,j\in\mathbb{N}} \|a_{ij}(t)\| = \sup_{t\in[0;2]} \left\|\frac{2t}{1+t^2}\right\| \leq 1 < +\infty.$$

Еволюційний оператор задачі має вигляд:

$$U(t) = \mathrm{diag}\{1+t^2, 1+t^2, 1+t^2\}.$$

Обернений до $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right\}.$$

$$Q = M - NU(2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, Q^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Проектори відповідно дорівнюють:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^{-}Q = \mathrm{diag}\{0, 1, 1\},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^{-} = \mathrm{diag}\{0, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}.$$

Довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (1.1) має вид:

$$\overline{x}(t) = \int_0^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= \mathrm{col}\left(\int_0^t \frac{(1+t^2) f_1(\tau) d\tau}{1+\tau^2}, \int_0^t \frac{(1+t^2) f_2(\tau) d\tau}{1+\tau^2}, \int_0^t \frac{(1+t^2) f_3(\tau) d\tau}{1+\tau^2} \right).$$

При довільному $f_1(t) \in C([a;b], \mathbb{R}^3)$ задача розв'язна тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} \alpha_2 &= -10 \int_0^2 \frac{f_2(\tau)}{1+\tau^2} d\tau, \\ \alpha_3 &= -15 \int_0^2 \frac{f_3(\tau)}{1+\tau^2} d\tau, \\ \alpha_4 &= 0 \\ \ldots & \\ \alpha_k &= 0 \\ \ldots & \end{cases}$$

При знайдених $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_k, \ldots (k \in \mathbb{N})$ і $\forall\ \alpha_1 = \mathrm{const}$ задача має три лінійно незалежних розв'язки:

$$x(t) = \mathrm{diag}\{0, 1+t^2, 1+t^2\} c + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \alpha + (Gf)(t),\ \forall\ c \in \mathbb{R}^3,$$

або

$$x(t) = \mathrm{diag}\{0, 1+t^2, 1+t^2\} c + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \alpha +$$

$$+ \mathrm{col}\left(\int_0^t \frac{(1+t^2) f_1(\tau) d\tau}{1+\tau^2}, \int_0^t \frac{(1+t^2) f_2(\tau) d\tau}{1+\tau^2}, \int_0^t \frac{(1+t^2) f_3(\tau) d\tau}{1+\tau^2} \right) +$$

$$+ \mathrm{col}\left(\int_0^2 \frac{5}{2} \cdot \frac{(1+t^2) f_1(\tau) d\tau}{1+\tau^2}, 0, 0 \right).$$

3.3. d-нормальна задача

Розглянемо систему (1.1)-(1.2) з матрицями $A(t)$ і $f(t)$:

$$A(t) = \mathrm{diag}\{-\mathrm{tg}\ t, -\mathrm{tg}\ t, -\mathrm{tg}\ t, -\mathrm{tg}\ t, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\},$$

$$f(t) = \mathrm{col}\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots\},$$

і крайовою умовою виду $\ell x(\cdot) = Mx(0) - Nx(\frac{\pi}{3}) = \alpha$, де

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}, \alpha = \mathrm{const}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді зліченного вектор-стовпчика $x(t) = \mathrm{col}\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots\} \in C^1([a; b], \mathfrak{M})$.

Дійсно, оператор $A(t)$ належить даному простору:

$$|||A||| = \sup_{t\in[0;\frac{\pi}{3}], i,j\in\mathbb{N}} \|a_{ij}(t)\| = \sup_{t\in[0;\frac{\pi}{3}]} \|-\mathrm{tg}\ (t)\| \leq \sqrt{3} < +\infty.$$

Еволюційний оператор задачі має вигляд:

$$U(t) = \mathrm{diag}\{\cos t, \cos t, \cos t, \cos t, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}.$$

Обернений до $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\cos t}, \frac{1}{\cos t}, \frac{1}{\cos t}, \frac{1}{\cos t}, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\right\}.$$

$$Q = M - NU\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix},$$

$$Q^- = \frac{1}{50}\mathrm{col}(3, 3, 4, 4, 0, 0, \ldots).$$

Проектори відповідно дорівнюють:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^-Q = \begin{pmatrix} 41 & -9 & -12 & -12 & 0 & 0 & \ldots \\ -9 & 41 & -12 & -12 & 0 & 0 & \ldots \\ -12 & -12 & 34 & -16 & 0 & 0 & \ldots \\ -12 & -12 & -16 & 34 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^- = 0.$$

Отже, умова розв'язності (2.3) для даної задачі виконується для будь-яких $\alpha = \mathrm{const}$ і будь-яких $f(t) \in C([a; b], \mathfrak{M})$. Задача має зліченну кількість розв'язків:

$$x(t)=\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 41\cos t & -9\cos t & -12\cos t & -12\cos t & 0 & 0 & \dots \\ -9\cos t & 41\cos t & -12\cos t & -12\cos t & 0 & 0 & \dots \\ -12\cos t & -12\cos t & 34\cos t & -16\cos t & 0 & 0 & \dots \\ -12\cos t & -12\cos t & -16\cos t & 34\cos t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} c+$$

$$+\frac{1}{50}\mathrm{col}(3\cos t, 3\cos t, 4\cos t, 4\cos t, 0, 0, \dots)+$$

$$+\mathrm{col}(\int_0^t \frac{\cos t f_1(\tau)d\tau}{\cos\tau}, \int_0^t \frac{\cos t f_2(\tau)d\tau}{\cos\tau}, \int_0^t \frac{\cos t f_3(\tau)d\tau}{\cos\tau},$$

$$\int_0^t \frac{\cos t f_4(\tau)d\tau}{\cos\tau}, \int_0^t f_5(\tau)d\tau, \int_0^t f_6(\tau)d\tau, \dots)+$$

$$+\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 6\cos t & 6\cos t & 6\cos t & 6\cos t & 0 & 0 & \dots \\ 6\cos t & 6\cos t & 6\cos t & 6\cos t & 0 & 0 & \dots \\ 8\cos t & 8\cos t & 8\cos t & 8\cos t & 0 & 0 & \dots \\ 8\cos t & 8\cos t & 8\cos t & 8\cos t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times$$

$$\times\mathrm{col}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f_1(\tau)d\tau}{\cos\tau}, \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f_2(\tau)d\tau}{\cos\tau}, \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f_3(\tau)d\tau}{\cos\tau}, \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f_4(\tau)d\tau}{\cos\tau}, \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_5(\tau)d\tau, \dots\right),\ \forall\, c\in\mathfrak{M}.$$

Ці задачі можна розглядати як приклад можливого застосування загальної теорії, розробленої для крайових задач в банаховому просторі [3].

Перелік цитованих джерел

1. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач / Бойчук А.А. — К.: Наукова думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А.А.* Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи / Бойчук А.А., Журавлёв В.Ф., Самойленко А.М. — К.: Институт математики НАНУ, 1995. — 320 с.
3. *Бойчук О.А.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь в банаховому просторі // Нелінійні коливання / Бойчук О.А., Панасенко Є.В. — К.: Інститут математики НАНУ: 2009. — т.12, №1 — С. 16–19.
4. *Гохберг И.Ц.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов / Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
5. *Далецкий Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. — М.:Наука, 1970. — 536 с.

6. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве / Крейн С.Г. — М.: 1960. — 472 с.
7. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Кук Р. — К.: Наукова думка, 1990. — 96 с.
8. *Самойленко А.М.* Счётные системы дифференциальных уравнений / Самойленко А.М., Теплинский Ю.В. — К.: Институт математики НАНУ, 1993. — 308 с.
9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / Треногин В.А. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
10. *Эрроусмит Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Эрроусмит Д., Плейс К. — М.: МИР, 1986. — 242 с.
11. *Boichuk A.A.* Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems / Boichuk A.A., Samoilenko A.M. — VSP, Utrecht-Boston, 2004. — 317 p.

Получена 26.06.2009