

УДК 517.98

Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Лоренца

М. А. Муратов*, Ю. С. Пашкова*, Б. А. Рубштейн**

*Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. E-mail: kromsh@mail.ru

**Университет Бен-Гуриона в Негеве,
Беер-Шева, ИЗРАИЛЬ.

Аннотация. В настоящей работе приводятся необходимые и достаточные условия порядковой сходимости чезаровских средних для абсолютных сжатий в пространствах Лоренца. Мы рассматриваем случай пространства с бесконечной мерой. Рассмотрение порядковой сходимости приводит как к доминантной, так и к индивидуальной эргодическим теоремам в пространствах $\Lambda_{W,q}$ и $\mathbf{L}_{p,q}$. При исследовании используется техника симметричных пространств измеримых функций на пространстве с бесконечной мерой и эргодичной теории.

Ключевые слова: эргодические теоремы, пространства Лоренца, порядковая сходимость.

1. Введение

В работах [2], [13], [14] были получены аналоги доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в симметричных пространствах измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ и на полуоси $[0, +\infty)$. Эти результаты являются обобщениями классических эргодических теорем Данфорда-Шварца на пространствах $\mathbf{L}_p$, $1 \leq p < \infty$ [3].

В случае, когда верны как индивидуальная ($\mathcal{IET}$), так и доминантная ($\mathcal{DET}$) эргодические теоремы, имеет место порядковая сходимость ((o) -сходимость) соответствующих средних Чезаро. Так например, для любого абсолютного сжатия T и $f \in \mathbf{L}_p$ последовательность $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$ является сходящейся в $\mathbf{L}_p$, если $1 < p < \infty$. В случае $p = 1$ последовательность $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$ (o) -сходится в $\mathbf{L}_1$, если $f \in \mathbf{L} \log \mathbf{L}$.

В данной заметке изучаются необходимые и достаточные условия порядковой сходимости указанных чезаровских средних пространствах Лоренца Λ_W . Мы используем технику и терминологию перестановочно инвариантных пространств из [12], [2], [4], [6], [8] и эргодической теории.

2. Предварительные сведения

Пусть (Ω, μ) пространство с бесконечной σ -конечной неатомической мерой, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mu)$ пространство всех μ -измеримых почти всюду конечных функций f на Ω и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$. В случае, когда $\Omega = \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ и $\mu = \mathbf{m}$ — мера Лебега на $[0, +\infty)$, будем писать: $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Линейный оператор $T : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \rightarrow \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ называется *абсолютным сжатием* или $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$ -сжатием, если T является сжатием как в $\mathbf{L}_1$ так и в $\mathbf{L}_\infty$. Обозначим через $\mathcal{PAC}$ множество всех абсолютных сжатий.

Для любых $T \in \mathcal{PAC}$ и $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим чезаровские средние

$$A_{n,T}f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

и соответствующую доминантную функцию

$$B_T f = \sup_{n \geq 1} A_{n,T}|f|.$$

Заметим, что $B_T f$ почти всюду конечна, то есть $B_T f \in \mathbf{L}_0$ для всех $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ (см. [3]).

Напомним, что банахово пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ измеримых функций из $\mathbf{L}_0(\Omega, \mu)$ называется *перестановочно инвариантным (п.и.)* или *симметричным*, если выполнены следующие два условия:

(i) Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $|f(t)| \leq |g(t)|$ почти всюду на Ω , то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \leq \|g\|_{\mathbf{E}}$;

(ii) Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Здесь f^* — невозрастающая, непрерывная справа перестановка функции $|f|$. Отметим, что невозрастающая перестановка f^* может быть определена формулой:

$$f^*(x) := \inf\{y \in [0, +\infty) : \mathbf{n}_f(y) \leq x\}, \quad x \in [0, \infty),$$

где $\mathbf{n}_f$ — функция распределения $|f|$:

$$\mathbf{n}_f(y) = \mu\{u \in \Omega : |f(u)| > y\}.$$

Функции f и g называются *равноизмеримыми* ([12]), если $n_{|f|}(y) = n_{|g|}(y)$, то есть $f^* = g^*$.

Если $(\Omega, \mu) = (\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, то п.и. пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ называется *стандартным*. Для п.и. пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mu)$ на произвольном пространстве с мерой (Ω, μ) существует единственное стандартное п.и. пространство $\mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ на $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ (называемое стандартной реализацией $\mathbf{E}$) такое, что

$$f \in \mathbf{E}(\Omega, \mu) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad f^* \in \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m}).$$

Здесь и далее мы не предполагаем, что пространство с мерой (Ω, μ) сепарабельно и изоморфно стандартному пространству с мерой $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Известно, что для каждого п.и. пространства $\mathbf{E}$ имеет место вложение

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty.$$

Мы будем использовать максимальную функцию Харди-Литлвуда, которая определяется для $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mu)$ следующим образом:

$$f^{**}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f^*(s) ds, \quad x \in (0, +\infty).$$

Известно, что $f^{**}(t)$ — непрерывная, невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция, $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, для $u > f^*(\infty)$ имеет место равенство $f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u$ и $f^{**}(\infty) = f^*(\infty)$.

Важную роль в исследовании порядковой сходимости играет перестановочно инвариантное пространство $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\Omega, \mu)$, определяемое следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : f^*(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} f^*(x) = 0\} = \\ &= \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : \mathbf{n}_f(y) < +\infty, \text{ для всех } y > 0\}. \end{aligned}$$

Пусть для любой функции $f \in \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$:

$$D_t f(x) := f(x/t), \quad 0 < x, t < \infty$$

Тогда $\{D_t, 0 < t < \infty\}$ — группа ограниченных линейных операторов $D_t: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ на стандартном п.и. пространстве $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, соответствующем $\mathbf{E}(\Omega, \mu)$.

Функция $d_{\mathbf{E}}(t) := \|D_t\|_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}}$ является полумультипликативной на $(0, \infty)$, то есть

$$d_{\mathbf{E}}(s+t) \leq d_{\mathbf{E}}(s) d_{\mathbf{E}}(t)$$

для всех s, t . Поэтому существуют пределы

$$p_{\mathbf{E}} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} = \sup_{t > 1} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)}, \quad q_{\mathbf{E}} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} = \inf_{0 < t < 1} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)},$$

которые называются *нижним и верхним индексами Бойда* п.и. пространства $\mathbf{E}$ (см. [12], [8]).

3. Пространства Лоренца

Пусть W — неубывающая функция на $[0, +\infty)$, вогнутая на $(0, +\infty)$, такая, что $W(0) = 0$ и $W(x) > 0$ для некоторых $x > 0$. Тогда W — абсолютно непрерывна на $(0, \infty)$ и ее производная $W'(x)$ убывает при $x > 0$. Отметим, что может быть $W(0+) > 0$.

Пространством Лоренца называется множество

$$\Lambda_W = \Lambda_W(\mathbf{W}, \mu) := \{f \in \mathbf{L}_0 : \|f\|_{\Lambda_W} < +\infty\}$$

с нормой

$$\|f\|_{\Lambda_W} := \int_0^\infty f^*(x) dW(x) = f^*(0)W(0+) + \int_0^\infty f^*(x) W'(x) dx < \infty,$$

где предполагается, что $(+\infty) \cdot 0 = 0$ (см. [12], [8], [9]).

Интеграл Стилтеса $\int_0^\infty f^*(x) dW(x)$ содержит слагаемое $f^*(0)W(0+)$ в случае, когда $W(0+) > 0$.

Непосредственно из определения следует, что

- $\Lambda_W \subseteq \mathbf{L}_\infty$, если $W(0+) > 0$;
- $\Lambda_W \supseteq \mathbf{L}_\infty$, если $W(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) < +\infty$;
- $\Lambda_W = \mathbf{L}_\infty$, если $W(0+) > 0$ и $W(+\infty) < +\infty$.

Пространство Лоренца Λ_W является перестановочно инвариантным и интерполяционным между пространствами банаховой пары $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_\infty$. Поэтому для любого $T \in \mathcal{PAC}$ $T(\Lambda_W) \subseteq \Lambda_W$, и сужение $T|_{\Lambda_W} : \Lambda_W \rightarrow \Lambda_W$ является сжатием: $\|Tf\|_{\Lambda_W} \leq \|f\|_{\Lambda_W}$.

Как и всякое перестановочно инвариантное пространство, пространство Лоренца Λ_W является банаховой решеткой и подрешеткой решетки $\mathbf{L}_0$ относительно обычного частичного порядка на функциях.

Пространство $\mathbf{L}_0$ также является порядково σ -полной, и вполне порядково полной решеткой, поскольку мера μ σ -конечна. Это означает, что каждое порядково ограниченное подмножество $F \subset \mathbf{L}_0$ имеет наименьшую верхнюю грань $\bigvee F \in \mathbf{L}_0$ и наибольшую нижнюю грань $\bigwedge F \in \mathbf{L}_0$ (см. [8], [11]). Отметим, что

$$\bigvee F = \text{ess sup } F, \quad \bigwedge F = \text{ess inf } F.$$

Напомним еще, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ элементов частично упорядоченного множества F называется (o) -сходящейся или порядково сходящейся к $f \in F$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f$), если существуют такие $g_n \in F$ и $h_n \in F$, что

$$g_n \uparrow f, \quad h_n \downarrow f, \quad f = \bigvee_{n \geq 1} g_n = \bigwedge_{n \geq 1} h_n \in F.$$

Если F — σ -полная решетка, то последовательность $f_n \xrightarrow{(o)} f \in F$ тогда и только тогда, когда множество $\{f_n, n \geq 1\}$ порядково ограничено в F и

$$f = \bigvee_{n \geq 1} \bigwedge_{m \geq n} f_m = \bigwedge_{n \geq 1} \bigvee_{m \geq n} f_m \in F.$$

Таким образом, для каждого пространства Лоренца $\Lambda_W \subseteq \mathbf{L}_0(\Omega, \mu)$ имеем, что:

(i). Λ_W является порядково полной подрешеткой порядково полной решетки $\mathbf{L}_0$;

(ii). Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o) -сходится в Λ_W ($f_n \xrightarrow{(o)} f \in \Lambda_W$) тогда и только тогда, когда

(1) $\{f_n, n \geq 1\}$ порядково ограничено в Λ_W (то есть $|f_n| \leq g$ для всех n и некоторого $g \in \Lambda_W$), и

(2) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o) -сходится в $\mathbf{L}_0$ (то есть $f_n \rightarrow f$ почти всюду на (Ω, μ)).

Далее будут рассмотрены две взаимосвязанные задачи:

Проблема 1. Пусть $T \in \mathcal{PAC}$. Описать подмножество

$$\Lambda_W^T := \{f \in \Lambda_W : \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty \text{ (o)-сходится в } \Lambda_W\}.$$

Проблема 2. Описать подкласс всех пространств Лоренца, таких что $\Lambda_W^T = \Lambda_W$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, то есть, для которых последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty$ (o) -сходится в Λ_W для всех $f \in \Lambda_W$ и $T \in \mathcal{PAC}$.

Отметим, что последовательность $\{A_{n,T}f\}_{n \geq 1}$ чезаровских средних

$$A_{n,T}f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

(o) -сходится в Λ_W тогда и только тогда, когда соответствующая доминантная функция $B_T f = \sup_{n \geq 1} A_{n,T}|f|$ принадлежит Λ_W , и последовательность $\{A_{n,T}f\}_{n \geq 1}$ сходится почти всюду на (Ω, μ) .

Будем говорить, что пространство Лоренца Λ_W

1) удовлетворяет *доминантной эргодической теореме* ($\Lambda_W \in \mathcal{DET}$), если последовательность чезаровских средних $A_{n,T}f$ является порядково ограниченной в Λ_W , то есть $B_T f \in \Lambda_W$ для любой функции $f \in \Lambda_W$;

2) удовлетворяет *индивидуальной эргодической теореме* ($\Lambda_W \in \mathcal{IET}$), если последовательность чезаровских средних $A_{n,T}f$ является порядково сходящейся в $\mathbf{L}_0$, т.е. сходящейся почти всюду на Ω , для любой функции $f \in \Lambda_W$;

3) удовлетворяет *порядковой эргодической теореме* ($\Lambda_W \in \mathcal{OET}$), если

$$\Lambda_W^T = \Lambda_W$$

для всех $T \in \mathcal{PAC}$, т.е., для любого $f \in \Lambda_W$ и $T \in \mathcal{PAC}$ последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T}f\}_{n \geq 1}$ порядково сходится в Λ_W .

Заметим что $\Lambda_W \in \mathcal{OET}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_W \in \mathcal{DET}$ и $\Lambda_W \in \mathcal{IET}$.

Пусть $\Lambda_W = \Lambda_W(\Omega, \mu)$ пространство Лоренца на пространстве с мерой (Ω, μ) , и $\Lambda_W(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ — соответствующее ему стандартное пространство Лоренца. Если функция $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mu)$ и $f^{**} \in \Lambda_W(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, то $f \in \Lambda_W(\Omega, \mu)$.

Обозначим

$$(\Lambda_W)_H = (\Lambda_W)_H(\Omega, \mu) = \{f \in (L_1 + L_\infty)(\Omega, \mu) : f^{**} \in \Lambda_W(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})\}$$

и положим $\|f\|_{(\Lambda_W)_H} = \|f^{**}\|_{\Lambda_W}$.

Тогда пространство $((\Lambda_W)_H, \|\cdot\|_{(\Lambda_W)_H})$ является п.и. и $(\Lambda_W)_H$ — замкнутое подпространство в Λ_W .

Наша цель — найти подпространство $(\Lambda_W)_H$.

Предложение 1. [12] Пусть Λ_W — пространство Лоренца, $d_{\Lambda_W}(t) = \|D_t\|_{\Lambda_W \rightarrow \Lambda_W}$ и p_{Λ_W} — нижний индекс Бойда. Тогда, следующие условия эквивалентны:

- (i). $(\Lambda_W)_H = \Lambda_W$.
- (ii). $p_{\Lambda_W} > 1$.
- (iii). $\int_0^1 d_{\Lambda_W}(1/t) dt < \infty$.
- (iv). $d_{\Lambda_W}(t) = o(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Отметим, что это предложение верно для любого перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E}$.

Для пространств Лоренца Λ_W функция $d_{\Lambda_W}(t)$ имеет следующий вид:

$$d_{\Lambda_W}(t) = \|D_t f\|_{\Lambda_W} = M_W(t),$$

где

$$M_W(t) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{W(st)}{W(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

Подпространство $(\Lambda_W)_H$ пространства Лоренца Λ_W и его нижний индекс Бойда p_{Λ_W} легко вычисляется по функции W .

Теорема 1. 1) Пусть $\Lambda_{W_H} = \Lambda_{W_H}(\Omega, \mu)$ — пространство Лоренца, фундаментальная функция которого W_H определяется однозначно из условий:

$$W_H(0) = W(0) = 0, \quad W_H(0+) = W(0+)$$

и

$$W'_H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{W'(u)}{u} du < +\infty, \quad x \in (0, +\infty).$$

Тогда $(\Lambda_W)_H = \Lambda_{W_H}$.

2) Индекс p_{Λ_W} равен $(\beta_W)^{-1}$, где β_W — верхний индекс растяжения функции W , который определяется следующим образом:

$$\beta_W = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log M_W(x)}{\log x}, \quad \text{где } M_W(x) = \sup_{0 < y < \infty} \frac{W(xy)}{W(y)}.$$

3) $\Lambda_W \subseteq \mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда

$$W(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty.$$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{L}_\Phi$ — пространство Орлича и $T \in \mathcal{PAC}$.

Тогда из $f \in (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$ следует, что доминантная функция $B_T f \in \mathbf{L}_\Phi$ и

$$\|B_T f\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leq \|f\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}}.$$

Для любого пространства Лоренца Λ_W имеем:

Теорема 3. 1) Если $f \in \Lambda_{W_H}$ и $f^*(+\infty) = 0$, то последовательность средних $A_{n,T}f$ сходится порядково в Λ_W .

2) $\Lambda_W \in \mathcal{OET}$ тогда и только тогда, когда $\beta_W < 1$ и $W(+\infty) = +\infty$.

Более общий вид пространства Лоренца $\Lambda_{W,q} = \Lambda_{W,q}(\Omega, \mu)$ определяется следующим образом:

$$\Lambda_{W,q} := \left\{ f \in \mathcal{L}_0 : \|f\|_{\Lambda_{W,q}} := \left(\int_0^\infty (f^*(x))^q dW(x) \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

для $1 \leq q < \infty$, где $\Lambda_{W,1} = \Lambda_W$.

Порядковая эргодическая теорема в пространствах $\Lambda_{W,q}$ при $1 < q < +\infty$ полностью аналогична случаю Λ_W . Вообще говоря, второй индекс q не оказывает влияние на порядковую сходимость в $\Lambda_{W,q}$.

Это легко увидеть на примере классических пространств Лоренца $\mathbf{L}_{p,q}$:

$$\mathbf{L}_{p,q} = \left\{ f \in S_0(0, \infty) : \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

с нормой:

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} = \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $q \leq p$.

Вычислим $\|D_t f\|_{\mathbf{L}_{p,q}}$.

$$\|D_t f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} = \left[\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \left[f^* \left(\frac{u}{t} \right) \right]^q \frac{du}{t} \right]^{\frac{1}{q}} = \left| \frac{u}{t} = s, \quad u = ts \right| =$$

$$= \left[\int_0^\infty (ts)^{\frac{q}{p}} [f^*(s)]^q \frac{tds}{ts} \right]^{\frac{1}{q}} = t^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty (s)^{\frac{q}{p}} [f^*(s)]^q \frac{ds}{s} \right]^{\frac{1}{q}} = t^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}}.$$

Следовательно

$$\|D_t\|_{\mathbf{L}_{p,q}} = t^{\frac{1}{p}}.$$

Список цитируемых источников

1. *Birkhoff G. D.* Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1931. — No. 17. — P. 656–660.
2. *Braverman M, Rubshtein B, Veksler A.* Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.
3. *Dunford N., Schwartz J. T.* Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rat. Mech. Anal. — 1956. — No. 5. — P. 129–178.
4. *Edgar G.A., Sucheston L.* Stopping times and directed processes — Cambridge: University press, 1992. — 430 p.
5. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A maximal theorem with function-theoretic application // Acta Math. — 1930. — No. 54. — P. 81–116.
6. *Krengel U.* Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.
7. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.*, Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. Springer, 1979.
8. *Lindenstrauss J. and Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.
9. *G.G. Lorentz.* On the theory of spaces gL . Pacific J. of Math., 1(1951), 411–429.
10. *Weiner N.* The ergodic theorem // Duke. Math. J. — 1939. — No. 5. — P. 1–18.
11. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ — Москва: Наука, 1977. — 742 с.
12. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
13. *Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.
14. *Муратов М. А., Рубштейн Б. А.* Аналогии доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.

Получена 13.06.2010