Динамические системы, вып. 21 (2006), 67–76

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 513.88

Обобщенные размерности $*$-представлений алгебры, ассоциированной с расширенной диаграммой Дынкина $\tilde{E}_6$

Ю.П. Москалева[*], **И.Г. Фомина**[**]

[*] Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: YulMosk@mail.ru*
[**] Крымский государственный медицинский университет им. С.И. Георгиевского,
E-mail: irina_f@csmu.strace.net

Аннотация. В статье получены формулы обобщенных размерностей $*$-представлений одной из алгебр, которая может быть описана в терминах графов и положительных меток вершин. Для случая, когда граф является одной из расширенных диаграмм Дынкина, а именно диаграммой Дынкина $\tilde{E}_6$ получены формулы обобщенных размерностей алгебры для параметра из дискретного спектра.

1. Введение

Целью данной статьи является описание формул обобщенных размерностей *-представлений алгебры, связанной с расширенной диаграммой Дынкина $\tilde{E}_6$ при всех параметрах γ из дискретного спектра.

1.1.

Рассмотрим алгебры:

$$\rho_{R_1,\ldots,R_n,\gamma} = \mathbb{C}\langle a_1,\ldots,a_n | R_k(a_k) = 0, k = 1,\ldots,n, \sum_{k=1}^{n} a_k = \gamma e\rangle,$$

где $R_k, k = 1,\ldots,n$ – полиномы с комплексными коэффициентами и $\gamma \in \mathbb{C}$. Будем полагать, что корни полиномов $R_k, k = 1,\ldots,n$ простые, вещественные и $\gamma \in \mathbb{R}_+$, тогда эти алгебры изоморфны алгебрам

$$\rho_{M_1,\ldots,M_n,\gamma} = \mathbb{C}\langle p_1^{(1)},\ldots,p_{m_1}^{(1)},\ldots,p_1^{(n)},\ldots,p_{m_n}^{(n)} | p_k^{(i)^2} = p_k^{(i)},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k^i p_k^i = \gamma e, \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)} = e, p_j^{(i)} p_k^{(i)} = 0, j,k = 1,\ldots,m_i, j \neq k, i = 1,\ldots,n\rangle,$$

где $M_i = \{\alpha_1^{(i)}, \dots \alpha_{m_i}^{(i)}\}$.

Алгебры $\rho_{M_1,\dots,M_n,\gamma}$ могут быть рассмотрены как *-алгебры с инволюцией

$$(p_{i_1}^{(j_1)}, p_{i_2}^{(j_2)}, \dots, p_{i_k}^{(j_k)}) = (p_{i_k}^{(j_k)}, \dots, p_{i_2}^{(j_2)}, p_{i_1}^{(j_i)}).$$

Будем предполагать, что $M_i = \{0 = \alpha_1^{(i)} < \dots < \alpha_{m_i}^{(i)}\}$. *-Представлением π алгебры $\rho_{M_1,\dots,M_n,\gamma}$ называется набор из n неотрицательных операторов $A_i = \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k^{(i)} P_k^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $A_1 + \dots + A_n = \gamma I$.

Алгебру $\rho_{M_1,\dots,M_n,\gamma}$ удобно ассоциировать с неориентированным графом без циклов Γ, содержащим n веток, исходящих из корня и имеющих длину m_i, $i = 1, \dots, n$, таких, что i-я ветка содержит m_i вершин, включая корень. Задание алгебры $\rho_{M_1,\dots,M_n,\gamma}$ в совокупности с графом Γ, имеющим вершины p_k^i на i-й ветке, порождают набор чисел $\{\alpha_k^i\}_{i=1}^m, k = 1, \dots, m_i - 1$, что эквивалентно определению положительной функции χ графа Γ, определенной как $\chi(p_k^{(i)}) = \alpha_k^{(i)}$ для $i = 1, \dots, n$ и $k = 1, \dots, m_i - 1$ и параметра γ. Алгебру $\rho_{M_1,\dots,M_n,\gamma}$ можно переопределить как алгебру, ассоциированную с графом Γ следующим образом:

$$\rho_{M_1,\dots,M_n,\gamma} = \rho_{\Gamma,\chi,\gamma} = \mathbb{C}\langle p_1^{(1)}, \dots, p_{m_1}^{(1)}, \dots, p_1^{(n)}, \dots, p_{m_n}^{(n)} | p_k^{(i)^2} = p_k^{(i)},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k^i p_k^i = \gamma e, p_j^{(i)} p_k^{(i)} = 0, j, k = 1, \dots, m_i, j \neq k, i = 1, \dots, n\rangle,$$

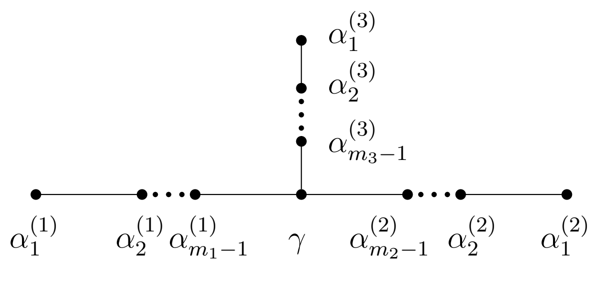
где $p_{m_i}^{(i)} = e - \sum_{k=1}^{m_i - 1} p_k^{(i)}, i = 1, \dots, n$. Функцию χ на графе Γ будем называть характером алгебры $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$.

1.2.

Граф Γ алгебры $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$ разметим следующим образом: на вершинах $p_k^{(i)}$ запишем все значения $\{\alpha_k^i\}_{i=1}^m, k = 1, \dots, m_i - 1$, число γ запишем в корне. Например, для алгебры

$$\rho_{\Gamma,\chi,\gamma} = \rho_{\{0=\alpha_0^{(1)}<\alpha_1^{(1)}<\dots<\alpha_{m_1-1}^{(1)}\},\{0=\alpha_0^{(2)}<\alpha_1^{(2)}<\dots<\alpha_{m_2-1}^{(2)}\},\{0=\alpha_0^{(3)}<\alpha_1^{(3)}<\dots<\alpha_{m_3-1}^{(3)}\}}$$

граф Γ будет выглядеть следующим образом:



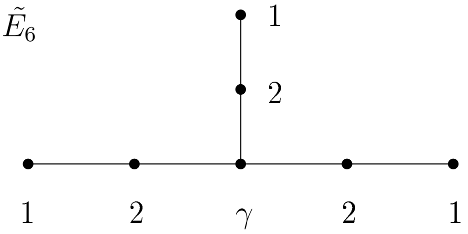
Алгебра $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$, которая ассоциирована с диаграммами Дынкина, имеет более простую структуру, чем алгебры, ассоциированные с другими графами. Алгебра

$\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$ является конечномерной тогда и только тогда, когда граф Γ является одной из диаграмм Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 [4]. Алгебра $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$ является бесконечномерной и полиномиального роста тогда и только тогда, когда граф Γ является одной из расширенных диаграмм Дынкина $\tilde{D}_4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ или $\tilde{E}_8$. Если граф Γ не является диаграммой или расширенной диаграммой Дынкина, то алгебра $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$ содержит свободную алгебру с двумя образующими [4].

1.3.

В настоящей статье получены формулы обобщенной размерности *-представлений, связанных с расширенной диаграммой Дынкина $\tilde{E}_6$ со специальным характером $\chi_6 = (1,2;1,2;1,2)$.

$\tilde{E}_6$



2. Функторы Кокстера

Существенным инструментом описания алгебр, связанных с графами, заданных выше, являются функторы Кокстера. Техника функторов позволяет получить формулы обобщенных размерностей алгебры $\rho_{\tilde{E}_6,\chi_6,\gamma}$.

Рассмотрим конструкцию функторов [1, 2, 3].

2.1.

Рассмотрим неотрицательный оператор $A = 0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1 + \ldots + \alpha_n \cdot P_n$ с конечным спектром $\sigma(A) \in \{0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m\}$. Зададим отображение $A \mapsto \tilde{A} = \alpha_m I - A$. Тогда $\tilde{A}$ – неотрицательный оператор со спектром $\sigma(\tilde{A}) \in \{0 = \tilde{\alpha}_0 < \tilde{\alpha}_1 < \ldots < \tilde{\alpha}_m\}$, где $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_m - \alpha_m = 0, \tilde{\alpha}_1 = \alpha_m - \alpha_{m-1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{m-1} = \alpha_m - \alpha_1, \tilde{\alpha}_m = \alpha_m$. Пусть $A_i = \sum_{k=0}^{m_i} \alpha_k^{(i)} p_k^{(i)}, 0 = \alpha_0^{(i)} < \ldots < \alpha_{m_i}^{(i)}, i = 1, \ldots, d, \sum_{i=1}^{d} A_i = \gamma I$. Для расширенной диаграммы Дынкина $\tilde{E}_6$ $d = 2$. Для оператора $\tilde{A}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{d} \tilde{A}_i = (\sum_{i=1}^{d} \alpha_{m_i}^{(i)} - \gamma) I.$$

Таким образом, мы получили отображение из множества представлений алгебры $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$ в множество представлений $\rho_{\Gamma,\tilde{\chi},\tilde{\gamma}}$, где χ определена множеством $\alpha_k^{(i)}$, $\tilde{\chi}$ определена множеством $\tilde{\alpha}_k^{(i)}$, $\tilde{\gamma} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{m_i}^{(i)} - \gamma$. Это отображение обозначим через S. Применив S дважды, получим исходное представление.

2.2.

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ – проекторы в Гильбертовом пространстве H, такие, что $\sum \alpha_k P_k = \gamma I$ для некоторых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma$. Построим другое Гильбертово пространство $\hat{H}$ и семейство ортопроекторов $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n, \hat{P}$ в Гильбертовом пространстве $\hat{H}$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k = I$ и $\hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k = \frac{\alpha_k}{\gamma} \hat{P}_k$.

Пусть $\sum \alpha_k P_k = \gamma I$. Положим $H_k = Im P_k$ и пусть $O_k : H_k \to \hat{H}$ – изометрическое вложение, тогда $O_k O_k^* = P_k$ и $O_k^* O_k = I_{H_k}$; определим $\hat{H} = \bigoplus_{k=1}^{n} H_k$. Рассмотрим оператор

$$O = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} O_1^* \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_n} O_n^* \end{pmatrix} : H \to \hat{H}$$

тогда

$$O^* : \hat{H} \to H, O^* = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\alpha_1} O_1 \ldots \sqrt{\alpha_n} O_n)$$

и $O^* O = \gamma^{-1} \sum \alpha_k O_k O_k^* = \gamma^{-1} \sum \alpha_k P_k = I$, т.е. $O : H \to \hat{H}$ – изометрическое вложение.

Положим $P = OO^*$, тогда $Im \hat{P} = H$, и пусть $\hat{P}_j$ – ортопроекторы в ортогональных подпространствах $H_j \in \hat{H}$, тогда имеем $\sum P_j = I$ и $\hat{P}_j \hat{P} \hat{P}_j = \frac{\alpha_j}{\gamma} \hat{P}_j$.

2.3.

Построение дилатации, описанное выше, обратимо. А именно, пусть $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n, \hat{P}$ – проекторы в некотором Гильбертовом пространстве $\hat{P}$ такие, что $\sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k = I$, и для некоторых $\alpha_k > 0, \gamma > 0$ имеем $\hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k = \frac{\alpha_k}{\gamma} \hat{P}_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Определим $H = Im \hat{P}$ и пусть $O : H \to \hat{H}$ – вложение. Тогда $O^* O = I_H, OO^* = \hat{P}$. Определим $P_k = \frac{\gamma}{\alpha_k} O^* \hat{P}_k O, k = 1, \ldots, n$. Тогда мы имеем

$$P_k^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha_k^2} O^* \hat{P}_k OO^* \hat{P}_k O = \frac{\gamma^2}{\alpha_k^2} O^* \hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k O = \frac{\gamma}{\alpha_k} O^* \hat{P}_k O = P_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k = \gamma O^* \sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k O = \gamma I.$$

Применив описанную выше процедуру, получим семейство проекторов $P_1, \ldots, P_n$, унитарно эквивалентных исходным операторам.

2.4.

Пусть проекторы $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n, \hat{P}$ в $\hat{H}$ такие, что $\sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k = I$ и $\hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k = \frac{\alpha_k}{\gamma} \hat{P}_k$. Взяв вместо $\hat{P}$ проектор $\hat{P}' = I - \hat{P}$, получим $\hat{P}_k \hat{P}' \hat{P}_k = \frac{\gamma - \alpha_k}{\gamma} \hat{P}_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Таким образом, взяв семейство проекторов $P_1, \ldots, P_n$, для которых $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k = \gamma I$, затем построив дилатацию, получим $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n, \hat{P}$. Взяв $\hat{P}' = I - \hat{P}$ и применив обратную процедуру, получим семейство проекторов $P_1', \ldots, P_n'$ в некотором Гильбертовом пространстве H', для которых

$$\sum_{k=1}^{n} (\gamma - \alpha_k) P_k' = \gamma I.$$

2.5.

Суммируя представленные выше конструкции, получаем другое отображение из множества представлений $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$ в множество представлений $\rho_{\Gamma,\chi',\gamma}$, где χ определена посредством множества $\alpha_k^{(i)}$, и χ' – посредством $\alpha_k^{(i)'}$,где $\alpha_0^{(i)'} = 0, \alpha_1^{(i)'} = \gamma - \alpha_{m_i}^{(i)}, \ldots, \alpha_{m_i}^{(i)'} = \gamma - \alpha_1^{(i)}$. Это отображение назовем T.

3. Формулы обобщенных размерностей *-представлений алгебры $\rho_{\tilde{E}_6,\chi_6,\gamma}$

В настоящем пункте, используя технику функторов Кокстера, получим формулы обобщенных размерностей *-алгебры, ассоциированной с диаграммой Дынкина $\tilde{E}_6$.

3.1.

Заметим, что функторы S и T не сохраняют характер графов. Под действием $(TS)^2$ характер $\chi = (\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \delta_1, \delta_2)$ диаграммы $\tilde{E}_6$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&S : (\chi, \gamma) \to (\chi', \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 - \gamma),\\
&\chi' = (\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2; \beta_2 - \beta_1, \beta_2; \delta_2 - \delta_1, \delta_2),\\
&T : (\chi, \gamma) \to (\gamma - \alpha_2, \gamma - \alpha_1; \gamma - \beta_2, \gamma - \beta_1; \gamma - \delta_2, \gamma - \delta_1, \gamma),\\
&(TS)^2 : (\chi, \gamma) \to (\chi'', \alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 - 2\gamma),\\
&\chi'' = (\alpha_2 + \beta_1 + \delta_1 - \gamma, \beta_1 + \delta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 - 2\gamma; \alpha_1 + \beta_2 + \delta_1 - \gamma, \alpha_1 +\\
&\delta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 - 2\gamma; \alpha_1 + \beta_1 + \delta_2 - \gamma, \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 - 2\gamma).
\end{aligned}$$

Предложение 1 ([5]). *Характер χ на расширенной диаграмме Дынкина $\tilde{E}_6$ инвариантен относительно действия $(TS)^2$ для всех γ тогда и только тогда, когда $\chi = \chi_6 = (1, 2; 1, 2; 1, 2)$.*

Тогда для $\tilde{E}_6$ со специальным характером $\chi_6 = (1,2;1,2;1,2)$ имеем

$$S(\chi_6,\gamma) \to (\chi_6, 6-\gamma),$$

$$(TS)^2 : (\chi_6,\gamma) \to (\chi_6, 2 + \frac{1}{4-\gamma}).$$

Приведем утверждения работы [5], необходимые для доказательства теорем, описывающих формулы обобщенных размерностей *-представлений алгебры $\rho_{\tilde{E}_6,\chi_6,\gamma}$.

Лемма 1 ([5]). *Пусть $P_1,\ldots,P_n$ проекторы такие, что $\sum_{k=1}^n \alpha_k P_k = \gamma I$ для некоторых положительных $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ и некоторого γ. Тогда $P_j = 0$ для всех j, для которых $\alpha_j > \gamma$.*

Теорема 1 ([5]). *Множество $W_{\tilde{E}_6,\chi_6}$ тех γ, для которых существует представление алгебры $\rho_{\tilde{E}_6},\chi_6,\gamma$ имеет следующий вид:*

$$W_{\tilde{E}_6,\chi_6} = \{3 \pm \frac{1}{k+s} | k = 0,1\ldots; s \in \{1/3, 1/2, 2/3, 1\}\} \cup \{3\}.$$

Заметим, что $\{3\pm\frac{1}{k+s}|k=0,1\ldots;s\in\{1/3,1/2,2/3,1\}\}$ называется дискретным спектром задачи описания множества значений γ, при которых существует хотя бы одно *-представление алгебры, ассоциированной с графом.

Множество всех γ, полученных из множества $W_{\tilde{E}_6,\chi_6}$ при $k=0$ выглядит следующим образом: $\{0,1,3/2,2,3,4,9/2,5,6\}$. Функтор S устанавливает симметрию множества $W_{\tilde{E}_6,\chi_6}$ относительно точки 3. Следовательно, имеет смысл получить формулы обобщенных размерностей для интервала $[0,3]$ и, действием функтора S, в симметричных точках.

3.2.

Выпишем алгебру $\rho_{\Gamma,\chi,\gamma}$ для случая расширенной диаграммы Дынкина $\tilde{E}_6$:

$$\rho_{\tilde{E}_6,\chi_6,\gamma} = \mathbf{C}\langle p_1^{(1)}, p_2^{(1)}; p_1^{(2)}, p_2^{(2)}; p_1^{(3)}, p_2^{(3)} | {p_k^{(i)}}^2 = p_k^{(i)},$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} \alpha_k^{(i)} p_k^i = \gamma e, p_j^{(i)} p_k^{(i)} = 0, j,k \in \{1,2\}, j \neq k, i \in \{1,2,3\}\rangle.$$

Обозначим размерности проекторов $P_k^{(i)}$ следующим образом: $dimP_i^{(1)} = a_i$, $dimP_i^{(2)} = b_i$, $dimP_i^{(3)} = c_i, i = 0,1,2$ ($P_0^{(i)} = I - P_1^{(i)} - P_2^{(i)}$); размерность всего пространства обозначим через n. Обобщенной размерностью будем называть вектор вида $(a_0,a_1,a_2;b_0,b_1,b_2;c_0,c_1,c_2;n)$.

Из описания действий функторов (см. п.2) следует справедливость следующих формул преобразования вектора обобщенной размерности

$$S(a_0,a_1,a_2;b_0,b_1,b_2;c_0,c_1,c_2;n) = (a_2,a_1,a_0;b_2,b_1,b_0;c_2,c_1,c_0;n),$$

$$T(a_0,a_1,a_2;b_0,b_1,b_2;c_0,c_1,c_2;n) = (b_1+b_2+c_1+c_2-n, a_2, a_1; a_1+a_2+c_1+c_2-n, b_2, b_1;$$
$$a_1+a_2+b_1+b_2-n, c_2, c_1; a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2-n).$$

Лемма 2. *Обобщенные размерности *-представлений $\pi(p_k^{(i)})$ алгебры $\rho_{\tilde{E}_6,\chi_6,\gamma}$, с точностью до перестановки проекторов, соответствующих различным веткам $\tilde{E}_6$, при $\gamma \in \{0, 1, 3/2, 2\}$ имеют следующий вид:*

1) $a_0 = b_0 = c_0 = 1, a_i = b_i = c_i = 0, i \in \{1, 2\}, n = 1$ *при* $\gamma = 0$;

2) $a_0 = b_0 = 1, a_i = b_i = 0, i \in \{1, 2\}, c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, n = 1$ *при* $\gamma = 1$;

3) $\{a\}$: $a_0 = b_0 = 1, a_i = b_i = 0, i \in \{1, 2\}, c_0 = c_1 = 0, c_2 = 1, n = 1$ *при* $\gamma = 2$;

   $\{b\}$: $a_0 = 1, a_i = 0, i \in \{1, 2\}; b_1 = c_1 = 1, b_i = c_i = 0, i \in \{0, 2\}, n = 1$ *при* $\gamma = 2$;

4) $a_i = b_i = c_i = 1, i \in \{0, 1\}, a_2 = b_2 = c_2 = 0, n = 2$ *при* $\gamma = 3/2$.

Пункты 1-3 утверждения Леммы 2 следуют непосредственно из Леммы 1.

Соответствующие представления выписываются как комбинации единичных и нулевых операторов. Пункт 4 следует из выписанного в явном виде представления для $\gamma = 3/2$ в работе [5]. А именно: $A_1 = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot 0, A_2 = 1 \cdot P_2 + 2 \cdot 0, A_3 = 1 \cdot P_3 + 2 \cdot 0, A_1 + A_2 + A_3 = \frac{3}{2} I$, где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, P_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что знаменатель γ всегда совпадает с размерностью n всего пространства кроме случая $\gamma = 3/2$ при $n = 2$.

Для получения формул обобщенных размерностей *-представлений алгебры $\rho_{\tilde{E}_6,\chi_6,\gamma}$ где γ из дискретного спектра множества $W_{\tilde{E}_6,\chi_6}$ представим дискретный спектр $W_{\tilde{E}_6,\chi_6}$ в виде:

$$W_{\tilde{E}_6,\chi_6} \setminus \{3\} = W^{0^-} \cup W^{0^+} \cup W^{1^-} \cup W^{1^+} \cup W^{2^-} \cup W^{2^+} \cup W^{3/2^-} \cup W^{3/2^+}.$$

где

$$W^{0\pm} = \{3 \pm \frac{1}{k + 1/3} \mid k = 0, 1, \ldots\}, \quad W^{1\pm} = \{3 \pm \frac{1}{k + 1/2} \mid k = 0, 1, \ldots\},$$

$$W^{2\pm} = \{3 \pm \frac{1}{k + 1} \mid k = 0, 1, \ldots\}, \quad W^{3/2\pm} = \{3 \pm \frac{1}{k + 2/3} \mid k = 0, 1, \ldots\}.$$

Вектор обобщенной размерности представления для γ из множества W^{i+} легко получается из вектора обобщенной размерности представления для γ из множества $W^{i-}, i \in \{0, 1, 2, 3/2\}$ с учетом действия функтора S.

Теорема 2. *Формулы обобщенной размерности для $\gamma \in W^{0-}$ имеют следующий вид:*

$$a_0 = b_0 = c_0 = k + 1, a_i = b_i = c_i = k, i \in \{1, 2\}, n = 3k + 1, k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Формулы получены для случая 1) Леммы 2 действием функтора $(TS)^{2k}, k = 0, 1 \ldots$.

Докажем теорему методом математической индукции.

1. При $k = 0$ получаем вектор обобщенной размерности Леммы 2, следовательно теорема верна.

2. Пусть теорема верна при $k = t$.

3. Проверим для $k = t + 1$. Подействуем функтором $(TS)^2$. Имеем

$a_0 = t+1, a_1 = t, a_2 = t, b_0 = t+1, b_1 = t, b_2 = t, c_0 = t+1, c_1 = t, c_2 = t, n = 3t+1.$

Действуем функтором S, получаем размерности: $a_0 = t, a_1 = t, a_2 = t + 1, b_0 = t, b_1 = t, b_2 = t + 1, c_0 = t, c_1 = t, c_2 = t + 1, n = 3t + 1.$

Действуем функтором T, получаем размерности: $a_0 = t + 1, a_1 = t + 1, a_2 = t, b_0 = t + 1, b_1 = t + 1, b_2 = t, c_0 = t + 1, c_1 = t + 1, c_2 = t, n = 3t + 2.$

Действуем функтором S, получаем размерности: $a_0 = t, a_1 = t+1, a_2 = t+1, b_0 = t, b_1 = t + 1, b_2 = t + 1, c_0 = t, c_1 = t + 1, c_2 = t + 1, n = 3t + 2.$

Действуем функтором T, получаем размерности: $a_0 = t + 2, a_1 = t + 1, a_2 = t + 1, b_0 = t + 2, b_1 = t + 1, b_2 = t + 1, c_0 = t + 1, c_1 = t + 2, c_2 = t + 1, n = 3t + 4.$

Следовательно, $a_0 = (t + 1) + 1, a_1 = (t + 1), a_2 = (t + 1), b_0 = (t + 1) + 1, b_1 = (t + 1), b_2 = (t + 1), c_0 = (t + 1), c_1 = (t + 1) + 1, c_2 = (t + 1), n = 3(t + 1) + 1.$

□

Теорема 3. *Формулы обобщенной размерности для $\gamma \in W^{1-}$ имеют следующий вид:*

1. $k = 3s \;\Rightarrow\; a_0 = b_0 = 2/3k + 1, a_i = b_i = 2/3k, i \in \{1, 2\}, c_0 = 2/3k, c_1 = 2/3k + 1, c_2 = 2/3k, s = 0, 1 \ldots$;

2. $k = 3s + 1 \;\Rightarrow\; a_i = b_i = 1/3k + 1/3, i \in \{0, 1, 2\}, c_0 = 2/3k + 4/3, c_1 = 2/3k + 1/3, c_2 = 2/3k - 2/3, s = 0, 1 \ldots$;

3. $k = 3s + 2 \;\Rightarrow\; a_i = b_i = 2/3k + 2/3, i \in \{0, 1\}, a_2 = b_2 = 2/3k - 1/3, c_0 = 2/3k + 2/3, c_1 = 2/3k - 1/3, c_2 = 2/3k + 2/3, s = 0, 1 \ldots$;

   $n = 2k + 1$ *для всех* $k = 0, 1 \ldots$.

Доказательство. Для доказательства применим метод математической индукции.

1. При $s = 0$ получаем исходные представления.

2. Пусть теорема верна при $s = t$.

3. Проверим для $s = t + 1$. Подействуем функтором $(TS)^2$ на проекторы размерности $k = 3s$. Получим:

$(TS)^2$: $a_i = b_i = 2/3t + 1, c_0 = 2/3t + 2, c_1 = 2/3t + 1, c_2 = 2/3t, n = 2t + 3.$

Очевидно, что выделив $t + 1$, мы получаем проекторы размерности $k = 3s + 1$ на шаге $t + 1$.

Подействуем функтором $(TS)^2$ на проекторы размерности $k = 3s+1$. Получим:

$(TS)^2$: $a_i = b_i = 2/3t + 4/3, i \in \{0, 1\}, a_2 = b_2 = 2/3t + 1/3, c_0 = 2/3t + 4/3, c_1 = 2/3t + 1/3, c_2 = 2/3t + 4/3, n = 2t + 3.$

Выделив $t+1$,получаем проекторы размерности $k=3s+2$ на шаге $t+1$.

Подействуем функтором $(TS)^2$ на проекторы размерности $k=3s+2$. Получим: $(TS)^2$: $a_0=b_0=2/3t+5/3, a_i=b_i=2/3t+2/3, i\in\{1,2\}, c_0=c_2=2/3t+2/3, c_1=2/3t+5/3, n=2t+3$.

Выделив $t+1$, получаем проекторы размерности $k=3s$ на шаге $t+1$.

Таким образом, для всех k можно получить размерности проекторов действием $(TS)^2$.

□

Доказательства теорем для формул обобщенных размерностей *-представлений алгебры $\rho_{\tilde{E}_6,\chi_6,\gamma}$ при $\gamma\in W^2, \gamma\in W^{3/2}$ аналогичны, поэтому теоремы 4-5 приводятся в статье без доказательства.

Теорема 4. *Формулы обобщенной размерности для $\gamma\in W^{2-}$ имеют следующий вид:*

Для случая $\{a\}$:

1. $k=3s \Rightarrow a_0=b_0=1/3k+1, a_i=b_i=1/3k, i\in\{1,2\}, c_0=c_1=1/3k, c_2=1/3k+1, s=0,1\ldots;$

2. $k=3s+1 \Rightarrow a_1=b_1=1/3k-1/3, a_i=b_i=1/3k+2/3, i\in\{0,2\}c_0=c_1=1/3k+2/3, c_2=1/3k-1/3, s=0,1\ldots;$

3. $k=3s+2 \Rightarrow a_i=b_i=1/3k+1/3, i\in\{0,1,2\}, c_0=1/3k+4/3, c_1=1/3k-2/3, c_2=1/3k+1/3, s=0,1\ldots;$

Для случая $\{b\}$:

1. $k=3s \Rightarrow a_0=1/3k+1, a_i=1/3k, i\in\{1,2\}, b_i=c_i=1/3k, i\in\{0,2\}, b_1=c_1=1/3k+1, s=0,1\ldots;$

2. $k=3s+1 \Rightarrow a_0=1/3k-1/3, a_i=1/3k+2/3, i\in\{1,2\}, b_i=c_i=1/3k+2/3, i\in\{0,1\}, b_2=c_2=1/3k-1/3, s=0,1\ldots;$

3. $k=3s+2 \Rightarrow a_0=1/3k+1/3, a_1=1/3k+4/3, a_2=1/3k-2/3, b_i=c_i=1/3k+1/3, i\in\{0,1,2\}, s=0,1\ldots;$

   $n=2k+1$ *для всех* $k=0,1\ldots.$

Теорема 5. *Формулы обобщенной размерности для $\gamma\in W^{3/2-}$ имеют следующий вид:*

1. $k=3s \Rightarrow a_i=b_i=2/3k+1, i\in\{0,1\}, a_2=b_2=2/3k, b_i=c_i=2/3k+1, i\in\{0,2\}, c_1=2/3k, s=0,1\ldots;$

2. $k=3s+1 \Rightarrow a_0=b_0=2/3k+4/3, a_i=b_i=2/3k+1/3, i\in\{1,2\}, c_0=c_2=2/3k+1/3, c_1=2/3k+4/3, s=0,1\ldots;$

3. $k = 3s + 2 \quad \Rightarrow \quad a_i = b_i = 2/3k + 2/3, i \in \{0, 1, 2\}, c_0 = 2/3k + 5/3, c_1 = 2/3k + 2/3, c_2 = 2/3k - 1/3, s = 0, 1 \ldots$*;*

$n = 2k + 1$ *для всех* $k = 1, 2 \ldots$.

Замечание 1. В теореме 5 для случая $k = 3s$ $c_2 = 0$ при $k = 0$, остальные координаты вектора обобщенной размерности выражаются с помощью приведенных в теореме формулах для $k = 0$.

Таким образом в теоремах 2-5 получен полный список обобщенных размерностей *-представлений алгебры, ассоциированной с расширенной диаграммой Дынкина $\tilde{E}_6$ для γ из дискретного спектра.

Список цитируемых источников

1. *S. Kruglyak, V. Popovich, and Yu. Samoylenko.* Representation of algebras associated with Dynkin graphs and spectral problem // Journ. Algebra Appl. To appear.
2. *S.A. Kruglyak, V.I. Rabanovich, and Yu.S. Samoylenko.* On sum of projections // Funct. Anal. Prilozh. – 2002. no. 36 – P. 20-35.
3. *S.A. Kruglyak.* Coxeter functors for a certain class of *-quivers and *-algabras, Methods Funct. Anal. Topol. – 2002, no. 8. – P. 49-57.
4. *M.S. Vlasenko, A.S. Melit, and Yu.S. Samoylenko.* On algebras generated with linearly dependent generators that have given spectra // Funct. Anal. Appl. – 2005, no. 39. – P. 175-186.
5. *Ю.С. Самойленко, В.Л. Островський.* Про спектральні теореми для лінійно пов'язанних сімей самоспряжених операторів з заданими спектрами, асоційованих з розширеними графами Динкіна // УМЖ – 2006. – Т. 58, № 11. – С. 1556-1570.

Получено 11.10.2006