Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 77–88

УДК 517.983

Спектральный анализ квантового графа с нелокальными граничными условиями

И. И. Карпенко, А. Н. Кандагура
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: i_karpenko@ukr.net*, dtyshk@inbox.ru

Аннотация. В настоящей работе исследуется самосопряженный оператор Лапласа, которому соответствует квантовый граф с нелокальными граничными условиями. Для изучения спектральных свойств этого графа рассматриваются возможности метода граничных троек и соответствующей функции Вейля.

Ключевые слова: квантовый граф, собственные расширения симметрических операторов, метод граничных троек, функция Вейля.

Введение

В математической физике понятие "квантовый граф" используется для одномерного оператора Лапласа на графе, в вершинах которого заданы некоторые граничные условия (см.подробный обзор в [10]). Квантовые графы относятся к категории метрических графов, т.е. таких графов, каждое ребро e которых снабжено положительной длиной $l_e \in (0, \infty]$. В современной математике квантовые графы служат моделью при изучении распространения волн в различных средах в квази-одномерных системах, которые представляют собой сеть тонких трубок, построенных на каркасе данного графа. Конструкция самосопряженных операторов с соответствующими граничными условиями на графах была впервые рассмотрена в работе [12]. Аналогичные подходы в математической физике к графам, как к сетям тонких проволок, диаметр которых значительно меньше их длины, рассмотрены в [3], [8]. Впервые строгий математический анализ гамильтонианов на плоских графах провели в своих работах Б.С. Павлов и Н.И. Герасименко [1], [2]. В последнее время в статьях П. Курасова и Бомана [11], [4], П. Экснера [6] была установлена связь между спектральными характеристиками квантового графа с различными типами локальных граничных условий и такими свойствами плоского графа, как его порядок, число связных компонент, длина ребер и другими.

В настоящей работе исследуется самосопряженный оператор Лапласа, которому соответствует квантовый граф с нелокальными граничными условиями. Это означает, что граничные условия связывают значения функции из области определения и ее производной в различных вершинах графа. Одним из методов, позволяющих эффективно исследовать спектр самосопряженных дифференциальных операторов, является метод граничных троек, получивший свое развитие в работах

В.И. Горбачук, М.Л. Горбачука [7], М.М. Маламуда и В.А. Деркача [5]. Именно такой подход для изучения квантового графа используется в нашей работе. Прежде всего, этот метод предлагает рассматривать такой оператор как собственное расширение некоторого симметрического оператора с равными дефектными числами. Ниже мы приводим основные теоретические положения метода граничных троек.

1. Предварительные сведения

Пусть A — замкнутый симметрический оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и имеющий равные индексы дефекта $n_{\pm}(A) = \dim \mathfrak{N}_{\pm i} < \infty$, где $\mathfrak{N}_{\lambda} := \ker(A^* - \lambda I)$ — дефектное подпространство оператора A. Заметим, что область определения $\mathrm{dom}(A)$ оператора A предполагается плотной в $\mathfrak{H}$.

Определение 1. Тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, состоящая из вспомогательного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и линейных отображений

$$\Gamma_i : \mathrm{dom}(A^*) \to \mathcal{H},\ i = 0, 1,$$

называется граничной тройкой для сопряженного оператора A^*, если выполняются следующие два условия:

1. $(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \qquad f, g \in D(A^*);$
2. Отображение
$$\Gamma := \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : \mathrm{dom}(A^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$
действующее как $\Gamma f = \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ является сюръективным.

Так как индексы дефекта оператора A предполагаются равными, то граничная тройка для оператора A^* существует, но определяется неоднозначно. Кроме того, $n_{\pm}(A) = \dim \mathcal{H}$, и имеет место равенство $A = A^* \lceil (\ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1)$.

Замкнутое расширение $\widetilde{A}$ оператора A называется *собственным*, если $A \subset \widetilde{A} \subset A^*$. С каждой граничной тройкой связаны два собственных самосопряженных расширения оператора A:

$$A_\infty := A^* \lceil \ker \Gamma_0,\ A_1 := A^* \lceil \ker \Gamma_1.$$

Определение 2. Собственное расширение $\widetilde{A}$ оператора A называется ***почти разрешимым*** относительно граничной тройки $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, если существует оператор $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что

$$\mathrm{dom}(\widetilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0).$$

Такой оператор $\widetilde{A}$ будем обозначать A_B. Заметим, что любое самосопряженное расширение оператора A является почти разрешимым относительно некоторой граничной тройки.

В работе [5] классическая m-функция Вейля–Титчмарша оператора Штурма–Лиувилля обобщается на случай симметрических операторов с равными индексами дефекта.

Определение 3. Пусть A — замкнутый симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с равными индексами дефекта, и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*, $\rho(A_\infty)$ — резольвентное множество оператора A_∞. Оператор-функция $M(\cdot) : \rho(A_\infty) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, определенная равенством

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \quad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda.$$

называется **функцией Вейля** оператора A, соответствующей граничной тройке Π.

Функция Вейля $M(\cdot)$ является R–функцией, т.е. является $\mathcal{H}$-значной голоморфной функцией на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям:

$$\mathrm{Im}\lambda \cdot \mathrm{Im}M(\lambda) \geq 0, \qquad M(\lambda)^* = M(\overline{\lambda}),\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Следующий результат позволяет описывать точечный спектр собственных расширений оператора замкнутого симметрического оператора A в терминах функции Вейля $M(\cdot)$ и соответствующих граничных параметров [5]. Заметим, что без ограничения общности рассуждений оператор A предполагается простым, т.е не имеющим приводящего самосопряженного подпространства.

Предложение 1. Если $\lambda \in \rho(A_\infty)$, то следующие условия эквивалентны:

(i) $\lambda \in \sigma_p(A_B)$;

(ii) $0 \in \sigma_p(B - M(\lambda))$.

Отметим, что аналогичные утверждения верны для непрерывного и остаточного спектра оператора A_B.

2. Квантовый граф с нелокальными граничными условиями

Пусть $X = \{[x_{2k-1}, x_{2k}] \mid k = \overline{1,4}\}$ — семейство отрезков вещественной прямой, которое мы условно изобразим в следующем виде:

Для вещественных пар $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ и $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ в $L_2(X) = \oplus_{k=1}^4 L_2(\Delta_k),\ \Delta_k = [x_{2k-1}, x_{2k}]$, рассмотрим семейство операторов Лапласа

$$A_{\alpha,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2},\ \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}^2,$$

область определения $\mathrm{dom}(A_{\alpha,\beta})$ которых состоит из функций $f \in W^{2,2}(X) = \oplus_{k=1}^4 W^{2,2}(\Delta_k)$, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

(i) $f(x_1) + \alpha_0 f'(x_1) = 0; \qquad f(x_8) - \beta_0 f'(x_8) = 0;$

(ii) $f(x_3) = f(x_4) = f(x_5) = f(x_6);$

(iii) $f(x_2) + \alpha_1 f(x_3) = 0; \qquad f(x_7) + \beta_1 f(x_6) = 0;$

(iv) $f'(x_3) - f'(x_4) + f'(x_5) - f'(x_6) = -\alpha_1 f'(x_2) + \beta_1 f'(x_7).$

Предложение 2. При любых вещественных значениях параметров α_k и $\beta_k,\ k = 0, 1$, оператор Лапласа $A_{\alpha,\beta}$ является самосопряжённым.

Доказательство. Для фиксированных пар вещественных чисел $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ и $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ найдем область определения оператора $A^*_{\alpha,\beta}$. Пусть $f \in \mathrm{dom}(A_{\alpha,\beta}),\ g \in W^{2,2}(X)$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\Delta &= -\sum_{k=1}^4 \int_{\Delta_k} f''(x)\overline{g(x)}\,dx + \sum_{k=1}^4 \int_{\Delta_k} f(x)\overline{g''(x)}\,dx = \\ &= \sum_{k=1}^4 \Big(-f'(x)\overline{g(x)} + f(x)\overline{g'(x)}\Big)\Big|_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} = \\ &= \sum_{k=1}^4 \Big(-f'(x_{2k})\overline{g(x_{2k})} + f(x_{2k})\overline{g'(x_{2k})} + f'(x_{2k-1})\overline{g(x_{2k-1})} - f(x_{2k-1})\overline{g'(x_{2k-1})}\Big).\end{aligned}$$

Используя граничные условия **(i)** – **(iv)**, получим:

$$\begin{aligned}\Delta &= f'(x_1)\overline{(g(x_1) + \alpha_0 g'(x_1))} - f'(x_8)\overline{(\beta_0 g'(x_8) - g(x_8))} - \\ &- f(x_3)\overline{(\alpha_1 g'(x_2) + g'(x_3) + g'(x_5) - g'(x_4) - g'(x_6) - \beta_1 g'(x_7))} - \\ &- f'(x_4)\overline{(g(x_3) - g(x_4))} + f'(x_5)\overline{(g(x_5) - g(x_3))} - f'(x_6)\overline{(g(x_3) - g(x_6))} - \\ &- f'(x_2)\overline{(g(x_2) + \alpha_1 g(x_3))} + f'(x_7)\overline{(\beta_1 g(x_6) + g(x_7))}.\end{aligned}$$

Для того, чтобы $\Delta = 0$, необходимо выполнение следующих граничных условий для функции $g \in W^{2,2}(X)$:

1. $g(x_1) + \alpha_0 g'(x_1) = 0;\ g(x_8) - \beta_0 g'(x_8) = 0;$

2. $g(x_3) = g(x_4) = g(x_5) = g(x_6);$

3. $g(x_2) + \alpha_1 g(x_3) = 0;\ g(x_7) + \beta_1 g(x_6) = 0;$

4. $g'(x_3) - g'(x_4) + g'(x_5) - g'(x_6) = -\alpha_1 g'(x_2) + \beta_1 g'(x_7),$

Эти условия совпадают с граничными условиями **(i)** – **(iv)** для функции f, то есть $\mathfrak{D}(A^*_{\alpha,\beta}) = \mathfrak{D}(A_{\alpha,\beta})$. □

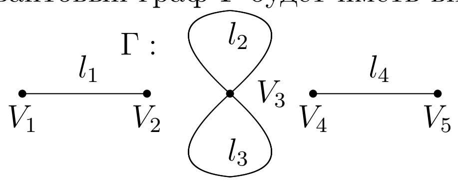
Поставим в соответствие семейству операторов Лапласа $A_{\alpha,\beta}$ квантовый граф Г, компоненты связности которого отражают граничные условия непрерывности. Для этого введём на множестве $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ отношение эквивалентности:

концы отрезков x_k и x_j будем называть *эквивалентными*, если для любой функции $f \in \mathrm{dom}(A_{\alpha,\beta})$ имеет место равенство $f(x_k) = f(x_j)$.

Для операторов $A_{\alpha,\beta}$ это отношение эквивалентности порождает классы эквивалентности

$$V_1 = \{x_1\},\ V_2 = \{x_2\},\ V_3 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\},\ V_4 = \{x_7\},\ V_5 = \{x_8\},$$

которые являются вершинами графа Г. Если точки x_{2k-1} и x_{2k} являются концами отрезка из семейства X, то вершины соответствующих классов эквивалентности соединены ребром или петлей длины $l_k = x_{2k} - x_{2k-1},\ k = \overline{1,4}$. В нашем случае квантовый граф Г будет иметь вид:



Построенный граф позволяет более компактно записать граничные условия (**i**) – (**iv**) соответствующего оператора Лапласа $A_{\alpha,\beta}$:

(I) $f(V_1) + \alpha_0 \partial_n f(V_1) = 0;\ f(V_5) + \beta_0 \partial_n f(V_5) = 0;$

(II) f непрерывна в V_3;

(III) $f(V_2) + \alpha_1 f(V_3) = 0;\ f(V_4) + \beta_1 f(V_3) = 0;$

(IV) $\partial_n f(V_3) = \alpha_1 \partial_n f(V_2) + \beta_1 \partial_n f(V_4),$

где $\partial_n f(V_3) = \sum\limits_{x_i \in V_3} \partial_n f(x_i)$, а $\partial_n f(x_k)$ обозначает нормальную производную функции f в точке x_k :

$$\partial_n f(x_k) = \begin{cases} f'(x_k), & \text{если } x_k \text{ – левый конец интервала,} \\ -f'(x_k), & \text{если } x_k \text{ – правый конец интервала.} \end{cases}$$

Для данного семейства операторов $A_{\alpha,\beta}$ построим симметрический оператор $A_{\min}$ так, чтобы каждый оператор этого семейства являлся его собственным расширением. Так как функция $f \in \mathrm{dom}(A_{\min})$ должна удовлетворять граничным условиям (**I**) и (**III**) для всех α_k и β_k, то $\mathrm{dom}(A_{\min})$ будет определяться функциями из $W^{2,2}(X)$, для которых имеют место равенства:

(a) $f(V_k) = 0, \quad k = \overline{1,5}$;

(b) $\partial_n f(V_k) = 0, \quad k = \overline{1,5}$.

При этом

$$\mathrm{dom}(A^*_{\min}) = \{f \in W^{2,2}(X) \mid f \text{ непрерывна в } V_3\}. \tag{2.1}$$

Что касается конкретного вычисления базиса дефектного подпространства $\mathfrak{N}_\lambda = \ker(A^* - \lambda I)$, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, то здесь мы принимаем соглашение, которое не влияет на спектр операторов $A_{\alpha,\beta}$. А именно, предполагаем, что начало всех интервалов $[x_{2k-1}, x_{2k}]$, $k = \overline{1,4}$, сдвинуто в точку нуль, тогда концы интервалов будут соответственно принимать значения l_k, $k = \overline{1,4}$. Так как собственные функции оператора A^* имеют вид

$$f(x) = \oplus_{k=1}^4 C_1^k \exp i\sqrt{\lambda}x + C_2^k \exp(-i\sqrt{\lambda}x)$$

и, в соответствии с формулами (2.1), удовлетворяют условию непрерывности в V_3, то приходим к следующим условиям на коэффициенты:

$$C_1^2 + C_2^2 = C_1^2 \exp i\sqrt{\lambda}l_2 + C_2^2 \exp(-i\sqrt{\lambda}l_2) = C_1^3 + C_2^3 = C_1^3 \exp i\sqrt{\lambda}l_3 + C_2^3 \exp(-i\sqrt{\lambda}l_3).$$

Отсюда получаем соотношения:

$$C_2^2 = C_1^2 \exp i\sqrt{\lambda}l_2,\ C_2^3 = C_1^3 \exp i\sqrt{\lambda}l_3,\ C_1^3 = C_1^2(1 + \exp i\sqrt{\lambda}l_2)(1 + \exp i\sqrt{\lambda}l_3)^{-1}.$$

Следовательно, размерность дефектного подпространства оператора $A_{\min}$ равна 5, и базисные векторы подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&n_\lambda^1(x) = \exp i\sqrt{\lambda}x \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0,\\
&n_\lambda^2(x) = \exp(-i\sqrt{\lambda}x) \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0,\\
&n_\lambda^3(x) = 0 \oplus \big(1 + \exp i\sqrt{\lambda}l_3\big)\big(\exp i\sqrt{\lambda}x + \exp i\sqrt{\lambda}(l_2 - x)\big) \oplus\\
&\big(1 + \exp i\sqrt{\lambda}l_2\big)\big(\exp i\sqrt{\lambda}x + \exp i\sqrt{\lambda}(l_3 - x)\big) \oplus 0,\\
&n_\lambda^4(x) = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \exp i\sqrt{\lambda}x,\\
&n_\lambda^5(x) = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \exp(-i\sqrt{\lambda}x),
\end{aligned}$$

Заметим, что при таком выборе симметрического сужения $A_{\min}$ *размерность дефектного подпространства совпадает с порядком графа* Γ.

Теорема 1. 1. *Граничную тройку* $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *для оператора* $A^*_{\min}$, *относительно которой все операторы* $A_{\alpha,\beta}$ *являются почти разрешимыми, можно выбрать следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} = \mathbb{C}^5,\\
&\Gamma_0 f = \Big(\partial_n f(V_1), \partial_n f(V_2), f(V_3), \partial_n f(V_4), \partial_n f(V_5)\Big)^{\mathrm{T}},\\
&\Gamma_1 f = \Big(-f(V_1), -f(V_2), \partial_n f(V_3), -f(V_4), -f(V_5)\Big)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2. *Функция Вейля $M(\lambda)$ для данной граничной тройки $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ имеет блочно-диагональный вид*

$$M(\lambda) = \operatorname{diag}\{M_1(\lambda), M_2(\lambda), M_3(\lambda)\},$$

где

$$M_1(\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \cot l_1\sqrt{\lambda} & \csc l_1\sqrt{\lambda} \\ \csc l_1\sqrt{\lambda} & \cot l_1\sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

$$M_2(\lambda) = 2\sqrt{\lambda}\left(\tan\frac{l_2\sqrt{\lambda}}{2} + \tan\frac{l_3\sqrt{\lambda}}{2}\right),$$

$$M_3(\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \cot l_4\sqrt{\lambda} & \csc l_4\sqrt{\lambda} \\ \csc l_4\sqrt{\lambda} & \cot l_4\sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

Доказательство. (1) Покажем, что

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = \sum_{k=1}^{5}\Big(\partial_n f(V_k)\overline{g(V_k)} - f(V_k)\overline{\partial_n g(V_k)}\Big). \tag{2.3}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&(A^*f, g) - (f, A^*g) = \\
&-\sum_{k=1}^{4}\int_{\Delta_k} f''(x)\overline{g(x)}\,dx + \sum_{k=1}^{4}\int_{\Delta_k} f(x)\overline{g''(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{4}\left(-f'(x)\overline{g(x)} + f(x)\overline{g'(x)}\right)\Big|_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} = \\
&= \sum_{k=1}^{4}\Big(-f'(x_{2k})\overline{g(x_{2k})} + f(x_{2k})\overline{g'(x_{2k})} + f'(x_{2k-1})\overline{g(x_{2k-1})}_f(x_{2k-1})\overline{g'(x_{2k-1})}\Big) = \\
&= f'(x_1)\overline{g(x_1)} - f(x_1)\overline{g'(x_1)} - f'(x_2)\overline{g(x_2)} + f(x_2)\overline{g'(x_2)} + f'(x_3)\overline{g(x_3)} - f(x_3)\overline{g'(x_3)} - \\
&- f'(x_4)\overline{g(x_4)} + f(x_4)\overline{g'(x_4)} + f'(x_5)\overline{g(x_5)} - f(x_5)\overline{g'(x_5)} - f'(x_5)\overline{g(x_5)} + f(x_5)\overline{g'(x_5)} + \\
&+ f'(x_7)\overline{g(x_7)} - f(x_7)\overline{g'(x_7)} - f'(x_8)\overline{g(x_8)} + f(x_8)\overline{g'(x_8)} = f'(x_1)\overline{g(x_1)} - f(x_1)\overline{g'(x_1)} - \\
&- f'(x_2)\overline{g(x_2)} + f(x_2)\overline{g'(x_2)} - f(x_3)\left(\overline{g'(x_3) - g'(x_4) + g'(x_5) - g'(x_6)}\right) + \\
&+ \left(f'(x_3) - f'(x_4) + f'(x_5) - f'(x_6)\right)\overline{g(x_3)} + f'(x_7)\overline{g(x_7)} - f(x_7)\overline{g'(x_7)} \\
&- f'(x_8)\overline{g(x_8)} + f(x_8)\overline{g'(x_8)} = \sum_{k=1}^{5}\left(\partial_n f(V_k)\overline{g(V_k)} - f(V_k)\overline{\partial_n g(V_k)}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, значения граничных операторов Γ_0 и Γ_1 на функции f могут быть выбраны как векторы значений этой функции и ее нормальных производных в вершинах графа. Для того, чтобы самосопряженный оператор $A_{\alpha,\beta}$ являлся почти разрешимым расширением оператора $A_{\min}$ относительно данной граничной тройки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\Gamma_0\left(\operatorname{dom}(A_{\alpha,\beta})\right) = \mathcal{H}$.

Заметим, что значения функции $f \in \mathrm{dom}(A_{\alpha,\beta})$ в точке V_3 связано с ее значениями в точках V_2 и V_4. То же самое можно сказать о ее производных в этих точках. Следовательно, если вектор $\Gamma_0 f$ составить только из значений функции f или только из значений ее производных в вершинах графа, то $\Gamma_0\,(\mathrm{dom}(A_{\alpha,\beta})) \subset \mathcal{H}$, и расширения $A_{\alpha,\beta}$ не будут почти разрешимыми. Равенство (2.3) объясняет выбор граничных операторов по формулам (2.2).

Докажем сюръективность отображения $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\}$. Действительно, для пары векторов

$$\Big(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\Big)^{\mathrm{T}},\ \Big(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\Big)^{\mathrm{T}}$$

всегда найдется функция $f \in \mathrm{dom}(A^*)$ такая, что

$$\begin{aligned}
&f(V_1) = -b_1,\ f(V_2) = -b_2,\\
&f'(V_1) = a_1,\ f'(V_2) = -a_2,\\
&f(V_3) = a_3,\ \sum_{x_i \in V_3} f'(x_i) = b_3,\\
&f(V_4) = -b_4,\ f(V_5) = -b_5,\\
&f'(V_4) = a_4,\ f'(V_5) = -a_5.
\end{aligned}$$

Для такого выбора граничной тройки $\mathfrak{D}(A_{\alpha,\beta}) = \ker(\Gamma_1 - B_{\alpha,\beta}\Gamma_0)$, где матрица $B_{\alpha,\beta}$ имеет блочно-диагональный вид $B_{\alpha,\beta} = \mathrm{diag}\{\alpha_0, B_1, \beta_0\}$ с матрицей

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Вычислим функцию $M(\lambda)$ для данной граничной тройки. Обозначим через $\widehat{\Gamma}_i$, $i = 0, 1$, матрицу, столбцы которой являются значениями оператора Γ_i на базисных векторах дефектного подпространства. Тогда

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\Gamma}_{02} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\Gamma}_{03} \end{pmatrix},\ \widehat{\Gamma}_1 = -\begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\Gamma}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\Gamma}_{13} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Gamma}_{01} = \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} & -i\sqrt{\lambda} \\ -i\sqrt{\lambda}\exp i\sqrt{\lambda}l_1 & i\sqrt{\lambda}\exp(-i\sqrt{\lambda}l_1) \end{pmatrix},\\
&\widehat{\Gamma}_{02} = (1 + \exp i\sqrt{\lambda}l_3)(1 + \exp i\sqrt{\lambda}l_2),\\
&\widehat{\Gamma}_{03} = \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} & -i\sqrt{\lambda} \\ -i\sqrt{\lambda}\exp i\sqrt{\lambda}l_4 & i\sqrt{\lambda}\exp(-i\sqrt{\lambda}l_4) \end{pmatrix},\\
&\widehat{\Gamma}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp i\sqrt{\lambda}l_1 & \exp(-i\sqrt{\lambda}l_1) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\widehat{\Gamma}_{12} = 4i\sqrt{\lambda}(1 - \exp i\sqrt{\lambda}(l_2 + l_3)),$$
$$\widehat{\Gamma}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp i\sqrt{\lambda}l_4 & \exp(-i\sqrt{\lambda}l_4) \end{pmatrix},$$

Следовательно,

$$M(\lambda) = -\mathrm{diag}\{\widehat{\Gamma}_{11}\widehat{\Gamma}_{01}^{-1},\ \widehat{\Gamma}_{12}\widehat{\Gamma}_{02}^{-1},\ \widehat{\Gamma}_{13}\widehat{\Gamma}_{03}^{-1}\} = \mathrm{diag}\{M_1(\lambda), M_2(\lambda), M_3(\lambda)\}.$$

□

3. Спектральный анализ самосопряженных операторов $A_{\alpha,\beta}$

В этом разделе мы рассматриваем возможности спектрального анализа самосопряженных расширений оператора $A_{\min}$ с помощью построенной граничной тройки и функции Вейля. Для этого сначала исследуем спектр самосопряженного оператора A_{∞}.

Так как $A_{\infty} := A^*\lceil\ker\Gamma_0$, то собственные функции оператора A_{∞} имеют вид

$$f(x) = \oplus_{k=1}^{4} C_1^k \exp i\sqrt{\lambda}x + C_2^k \exp(-i\sqrt{\lambda}x)$$

и в соответствии с формулами (2.2) удовлетворяют условиям:

(1) $\partial_n f(V_1) = 0,\ \partial_n f(V_2) = 0$, откуда ненулевые решения для $C_1^2,\ C_2^2$ возможны только при условии

$$\sin\sqrt{\lambda}l_1 = 0;$$

(2) $\partial_n f(V_4) = 0,\ \partial_n f(V_5) = 0$, откуда константы $C_1^4,\ C_2^4$ могут быть выбраны ненулевыми при условии

$$\sin\sqrt{\lambda}l_4 = 0;$$

(3) $f(V_3) = 0$, т.е. $f_2(0) = f_2(l_2) = f_3(0) = f_3(l_3) = 0$, где $f_k(x)$ — значение функции f на отрезке $\Delta_k = [0, l_k]$ $(k = 2, 3)$ в точке x, откуда нетривиальные решения для $C_1^2,\ C_2^2,\ C_1^3,\ C_2^3$ определяются условиями

$$\sin\sqrt{\lambda}l_2 = 0 \text{ или } \sin\sqrt{\lambda}l_3 = 0,\ \lambda \neq 0.$$

Следовательно,

$$\sigma(A_{\infty}) = \sigma_p(A_{\infty}) = \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \sin\sqrt{\lambda}l_i = 0,\ i = \overline{1,4}\}$$

Согласно Предложению 1 спектр оператора $A_{\alpha,\beta}$ на множестве $\rho(A_{\infty})$ определяется корнями уравнения $\det(M(\lambda) - B_{\alpha,\beta}) = 0$:

$$\mu^3 \det(M(\lambda) - B_{\alpha,\beta}) = 2(\alpha_0\mu\cot l_1\mu - 1)(\beta_0\mu\cot l_4\mu - 1)\left(\tan\frac{l_2}{2}\mu + \tan\frac{l_3}{2}\mu\right) +$$
$$+ \alpha_1^2(\cot l_1\mu + \alpha_0\mu)(\beta_0\mu\cot l_4\mu - 1) + \beta_1^2(\cot l_4\mu + \beta_0\mu)(\alpha_0\mu\cot l_1\mu - 1),$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}$.

В частности, если $B = 0$, то соответствующее почти разрешимое расширение совпадает с оператором A_1, и спектр оператора $A_1 = A^* \lceil \ker \Gamma_1$ на $\rho(A_\infty)$ определяется корнями уравнения $\det M(\lambda) = 0$. Так как

$$\det M(\lambda) = 2\lambda^{-3/2} \left(\tan \frac{l_2}{2}\sqrt{\lambda} + \tan \frac{l_3}{2}\sqrt{\lambda} \right),$$

то эта часть $\sigma(A_1)$ определяется решениями уравнения

$$\sin \frac{l_2 + l_3}{2}\sqrt{\lambda} = 0.$$

Очевидно, что Предложение 1 не дает информации о наличии спектра у оператора A_1 на множестве $\rho(A_\infty) = \mathbb{C} \backslash \sigma(A_\infty)$.

Если оператор $A_{\min}$ имеет точечный спектр, то эти значения также включаются в точечный спектр операторов $A_{\alpha,\beta}$. В нашем случае, как показывают вычисления, точечный спектр оператора $A_{\min}$ определяется равенствами:

$$\sigma_p(A_{\min}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_2}{2} = 0, \ \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_3}{2} = 0 \right\},$$

что позволяет расширить множество собственных значений оператора A_1 :

$$\sigma_p(A_1) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{2} = 0 \ (k = 2, 3), \ \sin \frac{\sqrt{\lambda}(l_2 + l_3)}{2} = 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Однако для этого частного случая собственного расширения спектр можно вычислить непосредственно. Так как $A_1 := A^* \lceil \ker \Gamma_1$, то собственные функции оператора A_1 имеют вид

$$f(x) = \oplus_{k=1}^4 C_1^k \exp i\sqrt{\lambda}x + C_2^k \exp(-i\sqrt{\lambda}x)$$

и удовлетворяют условиям:

(1) $f(V_1) = 0$, $f(V_2) = 0$, откуда ненулевые решения для C_1^2, C_2^2 возможны только при условии

$$\sin \sqrt{\lambda} l_1 = 0, \ \lambda \neq 0;$$

(2) $f(V_4) = 0$, $f(V_5) = 0$, откуда ненулевые значения для C_1^4, C_2^4 допустимы при условии

$$\sin \sqrt{\lambda} l_4 = 0, \ \lambda \neq 0;$$

(3) f непрерывна в V_3 и $\partial_n f(V_3) = 0$, т.е.

$$f_2(0) = f_2(l_2) = f_3(0) = f_3(l_3),$$
$$f_2'(0) - f_2'(l_2) + f_3'(0) - f_3'(l_3) = 0,$$

откуда ненулевые решения для $C_1^2,\ C_2^2,\ C_1^3,\ C_2^3$ возможны при одном из условий

$$\sin\frac{\sqrt{\lambda}l_2}{2}=0,\ \sin\frac{\sqrt{\lambda}l_3}{2}=0 \text{ или } \sin\frac{\sqrt{\lambda}(l_2+l_3)}{2}=0.$$

Следовательно,

$$\sigma_p(A_1)=\left\{\lambda\in\mathbb{R}_+\mid\ \sin\sqrt{\lambda}l_k=0, k=1,4;\ \sin\frac{\sqrt{\lambda}l_k}{2}=0, k=2,3;\right.$$
$$\left.\sin\frac{\sqrt{\lambda}(l_2+l_3)}{2}=0\right\} \quad (3.2)$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), видно, что при вычислении $\sigma_p(A_1)$ на множестве $\rho(A_\infty)$ часть спектра осталась неопределенной, а именно, корни уравнений $\sin\sqrt{\lambda}l_1=0,\ \sin\sqrt{\lambda}l_4=0$ не попали в спектр.

Заключение

Таким образом, настоящие исследования показывают, что спектральный анализ самосопряженного семейства гамильтонианов достаточно эффективно может быть проведен по схеме:

семейство гамильтонианов $\mapsto$ квантовый граф $\mapsto$
минимальный симметрический оператор $\mapsto$ граничная тройка и функция Вейля
$\mapsto$ точечный спектр самоспряженного расширения.

Полнота результатов при вычислении точечного спектра зависит от свойств минимального симметрического оператора $A_{\min}$. В нашем случае даже использование более тонких методов описания спектра собственных расширений с помощью аналитических свойств функции Вейля не дает исчерпывающей информации, так как $A_{\min}$ имеет приводящее инвариантное подпространство, на котором индуцируется самосопряженный оператор, то есть оператор $A_{\min}$ не является простым. Поэтому в дальнейшем предполагаются исследования возможных конструкций простых симметрический сужений данного семейства самосопряженных операторов, а также связь между порядком квантового графа и дефектными числами минимального симметрического оператора.

Список цитируемых источников

1. Герасименко Н. И., Павлов Б. С. *Задача рассеяния на некомпактных графах*// Теорет.мат.физ. **74** (1988), 345 — 359.
2. Герасименко Н. И. *Обратная задача рассеяния на некомпактных графах*// Теорет.мат.физ. **75** (1988), 187 — 200.
3. Alexander S. *Superconductivity of networks. A percolation approach to the effects of disorder*// Phys. Rev. **27** (1983), 1541 — 1557 .

4. Boman J., Kurasov P. *Symmetries of quantum graphs and the inverse scattering problem*// Advances in Applied Mathematics **35** (2005) 58 — 70.
5. Derkach V. A., Malamud M. M. *Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps*//J. Funct. Anal. **95** (1991), 1 — 95.
6. Exner P., Sheba P. *Free quantum motion on a branching graph*// Rep. Math. Phys. **28**(1989), 7 — 26.
7. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Mathematics and its Applications (Soviet Series)*//48, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.
8. Jeffery M., Green C., Tyagi S., Gilmore R. *Reproducible magnetic features of high-Tc superconductors in weak fields*//Phys. Rev. **39** (1989), 9054 — 9059.
9. Kostrykin V., Schrader R. *Kirchhoff's rule for quantum wires*// J. Phys. **32** (1999), 595 — 630.
10. Kuchment P. *Quantum graphs: an introduction and a brief survey*//arXiv:0802.3442v1 [math-ph] 23 Feb 2008.
11. Kurasov P. *Graph Laplacians and topology*// Ark. Mat. **46** (2008), 95 — 111.
12. Ruedenberg K., Scherr C. W. *Free-electron network model for conjugated systems, I. Theory*// J. Chem. Phys. **21**(1953), 1565 — 1581.

Получена 10.12.2011