Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 103–111

УДК 517.9

О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом наименьших квадратов[1]

С. М. Чуйко, Ан. С. Чуйко

Славянский государственный педагогический университет,
Славянск, 84112. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Используя метод наименьших квадратов, построено новую итерационную процедуру для нахождения решений автономной слабонелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае в виде развития в обобщенный полином Фурье в окрестности порождающего решения.

Ключевые слова: Нетерова краевая задача, метод наименьших квадратов, обобщенный полином Фурье.

1. Постановка задачи. Исследована задача о построении решений [2, 3] $z(t,\varepsilon) \in C^1[a,b(\varepsilon)],\ C[0,\varepsilon_0],\ b(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Решения нетеровой краевой ($m \neq n$) задачи (1) ищем в малой окрестности решения $z_0(t) \in C^1[a,b^*],\ b^* = b(0)$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha.$$

Здесь $Z(z,\varepsilon)$-нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причем второй функционал непрерывно дифференцируем по неизвестной z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи. В критическом ($P_{Q^*} \neq 0$) случае при условии $P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$ порождающая задача имеет семейство решений [2] $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f;\alpha](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r$. Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m\times n)$-матрица, rank $Q = n_1,\ n - n_1 := r$, P_{Q^*} — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная ($X(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы; $X_r(t) = X(t)P_{Q_r},\ P_{Q_r}$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

— $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из $d := m - n_1$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*},

$$G[f;\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t), \quad K[f](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f\ ds$$

— обобщенный оператор Грина задачи , Q^+— псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [2], I_n — единичная $(n \times n)$-матрица. В критическом случае задача (1) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач; в отличие от последних, правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a, b(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1). Совершая в задаче (1) замену переменной [3, 6]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*,$$

и обозначая $\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$, $f_0(s, c^*) = \beta^*[Az_0(t, c_r^*) + f] + Z(z_0(t, c_r^*), 0)$, аналогично [3], приходим к необходимому условию разрешимости задачи (1).

Лемма. *Если краевая задача* (1) *в критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$, *то вектор* $c^* = \mathrm{col}\ (c_r^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению [3, 6]*

$$F(c^*) = P_{Q_d^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot)\} = 0. \tag{2}$$

Фиксируя одно из решений $c^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения (2), приходим к задаче об отыскании решения задачи (1) $z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(\tau, c_r^*)$. Обозначим $(d \times (r+1))$-матрицу $B_0 = F_c'(c^*)$. Пусть $P_{B_0} :\ \mathbb{R}^{r+1} \to N(B_0)$ — $((r+1) \times (r+1))$-матрица-ортопроектор, $P_{B_0^*}$ — $((r+1) \times (r+1))$-мерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^{r+1} \to N(B_0^*)$. Известно [3, 6], что для каждого простого ($P_{B_0^*} = 0$) корня уравнения $F(c^*) = 0$ задача (1) имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(\tau, c_r^*)$. Для построения этого решения предложена итерационная схема [3, 6], соответствующая методу простых итераций. Этот метод отличают простота и численная устойчивость, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений.

3. Периодическая задача для уравнения Льенара. На примере периодической задачи для уравнения Льенара продемонстрируем технику построения модифицированной итерационной процедуры для нахождения приближенных решений с использованием метода наименьших квадратов [5], обеспечивающих большую точность при меньшем числе итераций. Исследуем задачу о нахождении решения $y(t, \varepsilon) \in C^2[0, T_1(\varepsilon)],\ C[0, \varepsilon_0]$ автономной периодической краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon \cdot Y(y, \varepsilon) \cdot \frac{dy}{dt}, \quad y(0, \varepsilon) - y(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad y'(0, \varepsilon) - y'(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{3}$$

Здесь $Y(y,\varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Зафиксируем начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметричным, например, $y_0(t)=\hat{c}\cdot\cos t,\ \hat{c}\in\mathbb{R}^1$. Замена независимой переменной в случае периодической задачи принимает вид

$$T_1(\varepsilon)=2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\quad t=\tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)).$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении периодических решений уравнения

$$y''(\tau,\varepsilon)+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\cdot y(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\cdot(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\cdot Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot y'(\tau,\varepsilon). \tag{4}$$

Отклонение $x(\tau,\varepsilon)$ определяет 2π-периодическая задача для уравнения

$$\frac{d^2x(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\cdot x(\tau,\varepsilon)=\varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\times$$
$$\times[y_0'(\tau,\hat{c}^*)+x'(\tau,\varepsilon)]-\{y_0''(\tau,\hat{c}^*)+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\}. \tag{5}$$

Обозначая $f_0(\tau,c^*)=Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot y_0'(\tau,\hat{c}^*)-2\beta^*y_0(\tau,\hat{c}^*)$, приходим к необходимому условию разрешимости периодической задачи (3), аналогу доказанной леммы.

Следствие. *Если периодическая задача* (3) *для уравнения Льенара имеет решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $y(t,0)=y_0(t,\hat{c}^*)$, *то вектор* $c^*=\mathrm{col}\ (\hat{c}^*,\ \beta^*)\in\mathbb{R}^2$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(c^*)=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos s\\ \sin s\end{pmatrix}f_0(s,c^*)\ ds=0. \tag{6}$$

Фиксируя один из простых корней $c^*\in\mathbb{R}^2$ уравнения (6), приходим к задаче об отыскании решения периодической задачи (3) в окрестности порождающего решения $y_0(t,\hat{c}^*)$. Предположим, что $Y_\varepsilon'(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\equiv 0$. Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Y(y,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,\hat{c}^*)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))x(\tau,\varepsilon)+\mathcal{R}(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где $\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*)):=Y_y'(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)$. Последовательность $\{\beta_j(\varepsilon)\}_{j=0}^{\infty}\to\beta(\varepsilon),\ \beta_0:=\beta^*$ определяет последовательность независимых переменных

$$\{t_j(\beta_j(\varepsilon))\}_{j=0}^{\infty}\longrightarrow t\in[0,2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))],\quad t_0\in[0,2\pi(1+\varepsilon\beta^*)].$$

Первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (4)

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon), \quad t_0 := \tau(1+\varepsilon\beta^*), \quad \tau \in [0,2\pi]$$

определяет 2π-периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2x_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + x_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)\{Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot[\frac{dy_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau} + \frac{dx_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau}]+ \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))\frac{dy_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau}x_1(\tau,\varepsilon)\} - [\frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2} + (1+\varepsilon\beta^*)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)]. \quad (7)$$

Пусть $\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \dots,\ \varphi_\mu(\tau),\ \dots$ — система линейно независимых дважды непрерывно дифференцируемых скалярных 2π-периодических функций. Приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (7) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon),\ c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu,\ \varphi(\tau) = [\varphi_1(\tau)\ \ \varphi_2(\tau)\ \ \dots\ \ \varphi_\mu(\tau)].$$

Обозначим

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta^*)\cdot[(1+\varepsilon\beta^*) - \varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))y_0'(\tau,\hat{c}^*)]\varphi(\tau) - \\ - \varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\varphi'(\tau) + \varphi''(\tau).$$

Аналогично [5] при условии невырожденности матрицы Грама

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\ d\tau$$

находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot y_0'(\tau,\hat{c}^*) - \\ - [y_0''(\tau,\hat{c}^*) + (1+\varepsilon\beta^*)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)]\}d\tau.$$

Пусть $\psi_1(\varepsilon),\ \ \psi_2(\varepsilon),\ \ \dots\ \ \psi_\lambda(\varepsilon),\ \dots$ — система линейно независимых непрерывных функций. Обозначим матрицу $\Psi(\varepsilon) = [\psi_1(\varepsilon)\ \ \psi_2(\varepsilon)\ \ \dots\ \ \psi_\lambda(\varepsilon)]$. Первое приближение $\beta_1(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_1(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, как

$$\beta_1(\varepsilon):\ (1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)) := (1+\varepsilon\beta^*)\cdot(1+\varepsilon\gamma_1(\varepsilon)), \quad \gamma_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\cdot q_1, \quad q_1\in\mathbb{R}^\lambda.$$

Поправку $\gamma_1(\varepsilon)$ ищем из условия минимизации невязки в решении уравнения

$$y_0''(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1''(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta^*)^2(1+2\varepsilon\gamma_1(\varepsilon))\cdot(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon)) = \\ = \varepsilon\cdot(1+\varepsilon\beta^*)(1+\varepsilon\gamma_1(\varepsilon))Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot(y_0'(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1'(\tau,\varepsilon)).$$

Обозначим $(1\times\lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\cdot(1+\varepsilon\beta^*)\cdot\{2(1+\varepsilon\beta^*)(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon)) - \\ - \varepsilon\cdot Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot(y_0'(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1'(\tau,\varepsilon))\}\cdot\Psi(\varepsilon).$$

При условии невырожденности $(\lambda \times \lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon) \cdot \mathfrak{F}_1(\tau,\varepsilon)\ d\tau\ d\varepsilon$$

находим вектор

$$q_1(\varepsilon) = [\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*) \cdot Y(y_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \cdot (y_1'(\tau,\varepsilon)) - \\ - (y_0''(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1''(\tau,\varepsilon)) - (1+\varepsilon\beta^*)^2 \cdot (y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon))\}\ d\tau\ d\varepsilon.$$

Второе и последующие приближения к решению 2π-периодической задачи для уравнения (4) ищем, как отклонение от предыдущего

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \dots\ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu}.$$

Пусть $\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon)) = Y_y'(y_k(\tau,\varepsilon),0)$; приближение $y_{k+1}(\tau,\varepsilon)$ определяет уравнение

$$\frac{d^2\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))\{Y(y_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \cdot [\frac{dy_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau} + \frac{d\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}] + \\ + \mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))\frac{dy_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\} - [\frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 \cdot y_k(\tau,\varepsilon)]. \quad (8)$$

Обозначим матрицы

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)) \cdot [(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)) - \varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))y_k'(\tau,\varepsilon)]\varphi(\tau) - \\ - \varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\varphi'(\tau) + \varphi''(\tau),$$

$$\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \cdot (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)) \cdot \{2(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon)) - \\ - \varepsilon \cdot Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \cdot (y_0'(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}'(\tau,\varepsilon))\} \cdot \Psi(\varepsilon).$$

При условии невырожденности $(\mu \times \mu)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon) \cdot \mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\ d\tau$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)) \cdot Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) \cdot y_k'(\tau,\varepsilon) - \\ - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 \cdot y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\}d\tau.$$

Второе и последующие приближения $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, как

$$(1+\varepsilon\beta_{k+1}(\varepsilon)) := (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)) \cdot (1+\varepsilon\gamma_{k+1}(\varepsilon)), \quad \gamma_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon) \cdot q_{k+1}(\varepsilon).$$

Поправку $\gamma_{k+1}(\varepsilon)$ ищем из условия минимизации невязки в решении уравнения

$$y''_{k+1}(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2(1+2\varepsilon\gamma_{k+1}(\varepsilon)) \cdot y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \\ = \varepsilon \cdot (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))(1+\varepsilon\gamma_{k+1}(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \cdot y'_{k+1}(\tau,\varepsilon).$$

При условии невырожденности $(\lambda\times\lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\cdot\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\; d\tau\; d\varepsilon$$

находим вектор

$$q_{k+1} = [\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))\cdot Y(y_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot(y'_k(\tau,\varepsilon)) - \\ -(y''_0(\tau,\hat{c}^*) + x''_k(\tau,\varepsilon)) - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\cdot(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_k(\tau,\varepsilon))\}\; d\tau\; d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) второе приближение $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$. Продолжая рассуждения, приходим к следующей итерационной схеме

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon),\quad \beta_1(\varepsilon) = \beta^* + \gamma_1(\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon\beta^*),\quad \gamma_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\cdot q_1(\varepsilon),$$

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon),\quad c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_1(\tau,\varepsilon)\times \\ \times\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot y'_0(\tau,\hat{c}^*) - [\frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2} + (1+\varepsilon\beta^*)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)]\}d\tau,$$

$$q_1(\varepsilon) = [\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}^*_1(\tau,\varepsilon)\times \\ \times\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)\cdot Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot(y'_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi'_1(\tau,\varepsilon)) - \\ -(y''_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi''_1(\tau,\varepsilon)) - (1+\varepsilon\beta^*)^2\cdot(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon))\}\; d\tau\; d\varepsilon,\ \ldots$$

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\quad x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \tag{9}$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),\quad c_{k+1}(\varepsilon) = -[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_k(\tau,\varepsilon)\times \\ \times\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))\cdot Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\cdot y'_k(\tau,\varepsilon) - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\}d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) + \gamma_{k+1}(\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)),\quad \gamma_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\cdot q_{k+1}(\varepsilon),$$

$$q_{k+1}(\varepsilon) = [\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\times \\ \times\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))\cdot Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot(y'_0(\tau,\hat{c}^*) + x'_{k+1}(\tau,\varepsilon)) - \\ -(y''_0(\tau,\hat{c}^*) + x''_{k+1}(\tau,\varepsilon)) - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\cdot(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon))\}\; d\tau\; d\varepsilon,\ \ldots\ k\in\mathbb{N}.$$

Теорема. *Для каждого простого* ($\det B_0 \neq 0,\ B_0 := F_c'(c^*)$) *корня* $c^* \in \mathbb{R}^2$ *уравнения для порождающих амплитуд* (6) *периодическая задача* (3) *для уравнения Льенара имеет единственное решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(t, \hat{c}^*)$. *При условии* $\det[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot, \varepsilon))] \neq 0,\ \det[\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot, \cdot))] \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$ *для нахождения решения периодической задачи* (3) *для уравнения Льенара применима итерационная схема* (9).

Пример. Используем итерационную схему (9) для построения приближения к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля [4, 9]

$$y'' + y = \varepsilon \cdot (1 - y^2) \cdot y',$$

частного случая уравнения Льенара.

Как известно [3, 4], периодическая задача для уравнения Ван-дер-Поля имеет единственное решение в малой окрестности порождающего решения $y_0(t, \hat{c}^*) = 2\cos t$, при этом известна величина $\beta^* = 0$, определяющая начальное значение периода $T_1(\varepsilon) \equiv 2\pi$ этого решения. Положим к примеру

$$\varphi(\tau) = [\sin\tau \quad \sin 3\tau \quad \sin 5\tau \quad \sin 7\tau \quad \cos\tau \quad \cos 5\tau \quad \cos 7\tau].$$

Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $y_0(t, \hat{c}^*) = 2\cos t$

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))] \approx 4\ 057\ 816\ 381\ 784\ 064\pi^7\varepsilon^4 + \\ + 2\ 143\ 386\ 517\ 635\ 072\pi^7\varepsilon^6 + 390\ 100\ 798\ 144\ 512\pi^7\varepsilon^8 + \ \dots\ \neq 0$$

невырождена. Введем также матрицу $\Psi(\varepsilon) = [\varepsilon\ \ \varepsilon^2\ \ \varepsilon^3\ \ \varepsilon^4\ \ \varepsilon^5]$. Итерационная схема (9) определяет функции

$$\xi_1(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{\sin\tau - \sin 3\tau}{4} + \varepsilon^2 \cdot \left(-\frac{3\cos\tau}{128} - \frac{5}{96}\cos 5\tau\right) + \\ + \varepsilon^3 \cdot \frac{-397\sin\tau + 297\sin 3\tau + 100\sin 5\tau + 70\sin 7\tau}{9\ 216} + \\ + \varepsilon^4 \cdot \frac{4\ 293\cos\tau + 9\ 196\cos 5\tau + 2\ 380\cos 7\tau}{884\ 736} + \\ + \varepsilon^5 \cdot \frac{197\ 173\sin\tau - 138\ 573\sin 3\tau - 58\ 600\sin 5\tau - 46\ 366\sin 7\tau}{21\ 233\ 664} + \\ + \varepsilon^6 \cdot \frac{-5\ 867\ 397\cos\tau - 4\ 460\ 092\cos 5\tau - 1\ 576\ 804\cos 7\tau}{2\ 038\ 431\ 744} + \\ + \varepsilon^7 \cdot \frac{-147\ 152\ 989\sin\tau + 116\ 416\ 989\sin 3\tau + 30\ 736\ 000\sin 5\tau + 25\ 022\ 662\sin 7\tau}{48\ 922\ 361\ 856}$$

и

$$\xi_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon^2 \cdot \frac{6\,408\,910 \cdot \cos\tau}{273\,446\,527} + \varepsilon^3 \cdot \Big(-\frac{132\,148\cos\tau}{214\,671\,890\,489} + \frac{27\,029\,033\sin\tau}{675\,066\,048} -$$
$$-\frac{11\,303\,617\sin 3\tau}{551\,185\,119} - \frac{5\sin 5\tau}{768} + \frac{7\sin 7\tau}{1\,536}\Big) + \varepsilon^4 \cdot \Big(-\frac{4\,921\,502\cos\tau}{358\,183\,803} - \frac{4\,997\,742\cos 5\tau}{779\,012\,549} -$$
$$-\frac{7\cos 7\tau}{8\,192} - \frac{64\,438\sin\tau}{85\,161\,984\,421} + \frac{48\,214\sin 3\tau}{69\,620\,174\,635}\Big) + \varepsilon^5 \cdot \Big(-\frac{871\,605\cos\tau}{88\,537\,950\,218} +$$
$$+\frac{109\,806\cos 5\tau}{448\,670\,523\,749} - \frac{20\,219\,919\sin\tau}{882\,472\,181} + \frac{16\,378\,650\sin 3\tau}{915\,705\,529} + \frac{2\,768\,357\sin 5\tau}{1\,033\,444\,703} +$$
$$+\frac{405\,642\sin 7\tau}{982\,568\,335}\Big) + \varepsilon^6 \cdot \Big(-\frac{21\,594\,728\cos\tau}{392\,726\,009} + \frac{6\,232\,511\cos 5\tau}{814\,560\,282} + \frac{2\,026\,915\cos 7\tau}{2\,677\,895\,057} -$$
$$-\frac{322\,661\sin\tau}{26\,749\,532\,113} + \frac{532\,585\sin 3\tau}{48\,519\,042\,509} - \frac{11\,240\sin 5\tau}{372\,018\,596\,053} - \frac{33\,919\sin 7\tau}{410\,626\,823\,395}\Big) +$$
$$+\varepsilon^7 \cdot \Big(\frac{299\,313\cos\tau}{115\,975\,666\,234} + \frac{220\,751\cos 5\tau}{57\,101\,647\,056} - \frac{6\,365\cos 7\tau}{403\,262\,449\,581} - \frac{30\,543\,613\sin\tau}{903\,084\,625} +$$
$$+\frac{37\,701\,926\sin 3\tau}{1\,842\,038\,921} - \frac{2\,670\,614\sin 5\tau}{2\,654\,419\,383} - \frac{3\,715\,250\sin 7\tau}{1\,803\,235\,669}\Big),$$

а также первое и второе приближение

$$\beta_1(\varepsilon) = \frac{13\,003\,166}{208\,050\,485} \cdot \varepsilon - \frac{122\,527}{99\,521\,339\,394} \cdot \varepsilon^2 -$$
$$-\frac{200\,790\,895}{9\,953\,428\,871} \cdot \varepsilon^3 - \frac{489\,085}{24\,436\,693\,638} \cdot \varepsilon^4 + \frac{1\,962\,509}{9\,799\,331\,498} \cdot \varepsilon^5,$$
$$\beta_2(\varepsilon) = \frac{27\,696\,527}{443\,164\,003} \cdot \varepsilon + \frac{800\,854}{9\,750\,133\,791} \cdot \varepsilon^2 -$$
$$-\frac{4\,102\,465}{1\,633\,084\,381} \cdot \varepsilon^3 + \frac{4\,375\,976}{1\,019\,710\,507} \cdot \varepsilon^4 - \frac{8\,168\,636}{393\,488\,023} \cdot \varepsilon^5 + \frac{818\,296}{3\,059\,806\,843} \cdot \varepsilon^6 -$$
$$-\frac{3\,484\,976}{2\,008\,321\,037} \cdot \varepsilon^7 - \frac{1\,564\,455}{17\,945\,394\,358} \cdot \varepsilon^8 + \frac{5\,297\,681}{11\,810\,873\,872} \cdot \varepsilon^9 + \frac{413\,913}{317\,420\,081\,107} \cdot \varepsilon^{10}$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Таким образом, найдены первое и второе приближение к решению периодической задачи для уравнения Ван-дер-Поля

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_2(\tau,\varepsilon), \quad x_2(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon).$$

Для оценки точности найденного второго приближения определим невязки

$$\Delta_2(\varepsilon) := ||y_2''(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon))^2 \cdot y_2(\tau,\varepsilon) -$$
$$-\varepsilon \cdot (1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon)) \cdot (1 - y_2^2(\tau,\varepsilon)) \cdot y_2'(\tau,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_a(\varepsilon) := ||y_a''(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon))^2 \cdot y_a(\tau,\varepsilon) -$$
$$-\varepsilon \cdot (1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon)) \cdot (1 - y_a^2(\tau,\varepsilon)) \cdot y_a'(\tau,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]}.$$

Заметим, что точность найденого нами второго приближения $y_2(\tau, \varepsilon)$, $\beta_2(\varepsilon)$

$$\Delta_2(0,1) \approx 0,0\,000\,252\,158, \quad \Delta_2(0,01) \approx 3,14\,846 \cdot 10^{-9}$$

выше точности приближений к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля $y_a(\tau, \varepsilon)$, $\beta_a(\varepsilon)$

$$\Delta_a(0,1) \approx 0,000\,202, \quad \Delta_a(0,01) \approx 2,01\,398 \cdot 10^{-8},$$

полученного в статьях [7, 8].

Список цитируемых источников

1. *Абрамов А. А., Курочкин С. В.* Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, — № 7. С. 414–423.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
3. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. 1992. — 28, N 10 С. 1668 — 1674.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М. Гостехиздат. 1956. 491 с.
5. *Чуйко С. М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**. — № 4. — С. 554 — 573.
6. *Чуйко С. М., Бойчук И. А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**. — № 3.
7. *Andersen C.M., Geer J.F.* Power expansion for the Frequency and period of limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM Journ. Applied Math. — 1982. — **42**. — P. 678 — 693.
8. *Geer J. F., Andersen C. M.* Resonant frequency calculations using a hybrid perturbation - Galerkin technique // NASA Contractor Report 187 632. — ICASE Report № 91-68. — 1991. — 30 p.
9. *Van der Pol B.* The nonlinear theory of electric oscillations // Proceedings of the Institute of Radio Engineers. — 1934. — № 22. — P. 1051 — 1086.

Получена 20.03.2011