Динамические системы, вып. 22 (2007), 83–95

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9:532

Задача о малых движениях идеальной баротропной жидкости, заполняющей вращающееся упругое тело

Д. А. Закора
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: dmitry_@crimea.edu*

Аннотация. В работе исследована эволюционная задача о малых движениях идеальной баротропной жидкости, заполняющей вращающееся изотропное упругое тело. В начале работы приводится постановка задачи. Затем осуществляется переход к дифференциальному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. На основе этого уравнения доказывается теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим упругое тело, равномерно вращающееся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Будем считать, что тело занимает область $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ и содержит в себе полость $\Omega_0 \subset \Omega_1$, целиком заполненную идеальной неоднородной жидкостью. Обозначим через $\Gamma_1 \cup S$ внешнюю границу области Ω_1; при этом будем считать, что упругое тело закреплено на границе S. Поверхность, разделяющую упругое тело и жидкость, обозначим через Γ_0, то есть $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$, $\partial\Omega_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup S$. Через $\vec{n}_0$ и $\vec{n}_1$ обозначим единичные векторы, нормальные к границам $\partial\Omega_0$, $\partial\Omega_1$ и направленные вне областей Ω_0 и Ω_1 соответственно.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с упругим телом, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω_0. В этом случае равномерная скорость вращения системы запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать также, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Обозначим поле смещений в упругом теле через $\vec{u}(t,x)$ $(x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega_1)$, а плотность упругого тела через $\rho_1(x)$. Будем считать дополнительно, что тело изотропно, в этом случае тензор напряжения этого тела имеет вид

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda\delta_{ij}\mathrm{div}\vec{u} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (i,j = 1,2,3), \tag{1.1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а λ и μ — коэффициенты Ляме.

Уравнение малых движений упругого тела в выбранной системе координат запишется в виде

$$\rho_1(x)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + L\vec{u} = \rho_1(x)\vec{f}, \quad \text{где } (L\vec{u})_i := -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}(\vec{u})}{\partial x_j}, \tag{1.2}$$

$\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное.

На границах S и Γ_1 для упругого тела выполнены условия закрепления и равенство нулю нормальных напряжений соответственно:

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S), \quad \sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \vec{0} \text{ (на } \Gamma_1). \tag{1.3}$$

В состоянии относительного равновесия давление $P_0(x)$ в жидкости распределено по закону

$$P_0(x) = -\rho_0 g x_3 + \frac{1}{2}\rho_0\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + p_0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0, \tag{1.4}$$

где p_0 — давление жидкости в начале координат, а ρ_0 — плотность жидкости.

Рассмотрим движения жидкости, близкие к твердотельному вращению. Представим полное давление и полную плотность жидкости в виде

$$P(t,x) = P_0(x) + p(t,x), \quad \widetilde{\rho}(t,x) = \rho_0 + \rho(t,x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0, \tag{1.5}$$

где $p(t,x)$ — это динамическое давление, а $\rho(t,x)$ — динамическая плотность жидкости. Обозначим через $\vec{w}(t,x)$ поле смещений в жидкости и будем считать, что $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $\vec{w}(t,x)$ — малые одного порядка. Линеаризация уравнений Эйлера для движения идеальной жидкости и уравнения неразрывности в подвижной системе координат относительно твердотельного вращения приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_0\vec{w}) - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0\vec{w}\times\vec{e}_3) = -\nabla p - \rho g\vec{e}_3 + \rho_0\vec{f}, \quad \rho + \operatorname{div}(\rho_0\vec{w}) = 0 \quad (\text{в } \Omega_0). \tag{1.6}$$

Линеаризация кинематических и динамических условий на границе раздела Γ_0 приводит к граничным условиям:

$$\vec{w}\cdot\vec{n}_0 = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1, \quad \sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = -p\vec{n}_1 \text{ (на } \Gamma_0). \tag{1.7}$$

Баротропная жидкость моделируется следующим дополнительным уравнением состояния, связывающим динамическое давление $p(t,x)$ и динамическую плотность $\rho(t,x)$:

$$p(t,x) = a_\infty^2(x)\rho(t,x), \tag{1.8}$$

где $a_\infty^2(x)$ — квадрат скорости звука в неоднородной жидкости.

Задача о малых движениях идеальной баротропной жидкости, заполняющей вращающееся упругое тело, заключается в отыскании полей $\vec{u}(t,x)$, $\vec{w}(t,x)$, $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$ из уравнений (1.2), (1.6), граничных условий (1.3), (1.7), соотношения (1.8), и при начальных условиях

$$\vec{u}(0,x)=\vec{u}^0(x),\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(0,x)=\vec{u}^1(x),\ \vec{w}(0,x)=\vec{w}^0(x),\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}(0,x)=\vec{w}^1(x). \tag{1.9}$$

Спектральные задачи о нормальных колебаниях идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей вращающееся или неподвижное упругое тело изучались в [1], [2], [3]. В этих работах предполагалось, что на систему не действует гравитационное поле, а также отсутствует закрепление упругого тела.

2. Вывод операторного уравнения

2.1. Проектирование уравнений движения

Для перехода к операторному уравнению в изучаемой задаче применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [4]. Для этого воспользуемся разложением Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_0)$ в ортогональную сумму (см. [4], с. 103):

$$\vec{L}_2(\Omega_0)=\vec{J}_0(\Omega_0)\oplus\vec{G}_0(\Omega_0)\oplus\vec{G}_h(\Omega_0)=:\vec{J}_0(\Omega_0)\oplus\vec{G}(\Omega_0), \tag{2.1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_0):=\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_0)|\quad \mathrm{div}\vec{v}=0\ (\text{в }\Omega_0),\quad v_n:=\vec{v}\cdot\vec{n}=0\ (\text{на }\Gamma_0)\},$$

$$\vec{G}_0(\Omega_0):=\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_0)|\quad \vec{v}=\nabla\Phi,\quad \Phi=0\ (\text{на }\Gamma_0)\},$$

$$\vec{G}_h(\Omega_0):=\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_0)|\quad \vec{v}=\nabla\Phi,\quad \mathrm{div}\nabla\Phi=0\ (\text{в }\Omega_0),\quad \int_{\Gamma_0}\Phi\,d\Gamma_0=0\}.$$

Здесь операции $\mathrm{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [4], с. 100–102. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\vec{L}_2(\Omega_0)$ на $\vec{J}_0(\Omega_0)$ и $\vec{G}(\Omega_0)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\vec{w}$ в виде:

$$\vec{w}=\vec{v}+\nabla\Phi,\quad \text{где}\quad \vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega_0),\quad \nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega_0). \tag{2.2}$$

Подставим представление (2.2) в первое уравнение из (1.6) и применим к его правой и левой частям ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (2.1). Получим два соотношения, заданных в области Ω_0:

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}-2\omega_0\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3)+P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big]=-gP_0(\rho\vec{e}_3)+\rho_0P_0\vec{f}, \tag{2.3}$$

$$\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi-2\omega_0\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3)+P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big]=-\nabla p-gP_G(\rho\vec{e}_3)+\rho_0P_G\vec{f}. \tag{2.4}$$

С помощью представления (2.2), второго уравнения из (1.6) и соотношения (1.8) в уравнениях (2.3), (2.4) можно исключить функции $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$, а также преобразовать граничные условия (1.7). В результате придем к следующей задаче:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = gP_0(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_0\vec{f}\ \ (\text{в } \Omega_0), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] =$$
$$= -\rho_0^{-1}\Big[-\nabla(\rho_0 a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big] + gP_G(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_G\vec{f}\ \ (\text{в } \Omega_0), \tag{2.6}$$

$$\rho_0^{-1}\rho_1(x)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + \rho_0^{-1}L\vec{u} = \rho_0^{-1}\rho_1(x)\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{2.7}$$

$$\sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \tag{2.8}$$

$$\sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \rho_0 a_\infty^2(x)(\mathrm{div}\nabla\Phi)\vec{n}_1, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_0). \tag{2.9}$$

Начальные условия для уравнений (2.5)–(2.7) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^0(x) =: \vec{v}^0(x), && \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^1(x) =: \vec{v}^1(x),\\
&\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^0(x) =: \nabla\Phi^0(x), && \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^1(x) =: \nabla\Phi^1(x),\\
&\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), && \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(0,x) = \vec{u}^1(x).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2. Вспомогательные операторы и их свойства

Для перехода к операторной формулировке задачи (2.5)–(2.10) введем ряд операторов и изучим их свойства. Введем гильбертово пространство $H := \vec{G}(\Omega_0)\oplus\vec{L}_2(\Omega_1)$, состоящее из пар $\psi := (\nabla\Phi;\vec{u})^t$ (здесь символ t обозначает операцию транспонирования), где $\nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega_0)$, $\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega_1)$. Скалярное произведение и норма в H определяются следующим образом:

$$(\psi_1,\psi_2)_H := \int_{\Omega_0}\nabla\Phi_1\cdot\overline{\nabla\Phi_2}\,d\Omega_0 + \int_{\Omega_1}\vec{u}_1\cdot\overline{\vec{u}_2}\,d\Omega_1, \quad \|\psi\|_H^2 = (\psi,\psi)_H.$$

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Omega_0)\oplus H$, состоящее из пар $\xi := (\vec{v};\psi)^t$, где $\vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega_0)$, $\psi\in H$. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$(\xi_1,\xi_2)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega_0}\vec{v}_1\cdot\overline{\vec{v}_2}\,d\Omega_0 + (\psi_1,\psi_2)_H, \quad \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = (\xi,\xi)_{\mathcal{H}}.$$

Введем операторы $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ и операторный блок $\mathcal{S}$, действующий в $\mathcal{H}$, следующим образом:

$$\mathcal{S}\xi := \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} iP_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3) \\ (iP_{0,S}(\vec{v}\times\vec{e}_3);0)^t & (iP_{0,S}(\nabla\Phi\times\vec{e}_3);0)^t \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathcal{H}$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$; более того, $\|\mathcal{S}\|=1$. Спектр оператора $S_{1,1}$ существенный и заполняет отрезок $[-1,1]$: $\sigma(S_{1,1})=\sigma_{ess}(S_{1,1})=[-1,1]$ (здесь через $\sigma_{ess}(S_{1,1})$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора $S_{1,1}$).*

Доказательство. Прежде всего, из [4], с.193–196 (см. также [5]) следует, что весь спектр оператора $S_{1,1}$ существенный и заполняет отрезок $[-1,1]$: $\sigma(S_{1,1}) = \sigma_{\rm ess}(S_{1,1})=[-1,1]$.

Докажем самосопряженность и ограниченность оператора $\mathcal{S}$. Пусть $\xi_1=(\vec{v}_1;\psi_1)^t$, $\xi_2=(\vec{v}_2;\psi_2)^t$ — произвольные элементы из гильбертова пространства $\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega_0)\oplus H$, тогда

$$(\mathcal{S}\xi_1,\xi_2)_{\mathcal{H}} = (S_{1,1}\vec{v}_1,\vec{v}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_0)} + (S_{1,2}\psi_1,\vec{v}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_0)} + (S_{2,1}\vec{v}_1,\psi_2)_H + (S_{2,2}\psi_1,\psi_2)_H =$$
$$= i\int_{\Omega_0}\Big((\vec{v}_1\times\vec{e}_3)\cdot\overline{\vec{v}_2} + (\nabla\Phi_1\times\vec{e}_3)\cdot\overline{\vec{v}_2} + (\vec{v}_1\times\vec{e}_3)\cdot\overline{\nabla\Phi_2} + (\nabla\Phi_1\times\vec{e}_3)\cdot\overline{\nabla\Phi_2}\Big)\,d\Omega_0 =$$
$$= i\int_{\Omega_0}\Big((\vec{v}_1+\nabla\Phi_1)\times\vec{e}_3\Big)\cdot\overline{(\vec{v}_2+\nabla\Phi_2)}\,d\Omega_0 =$$
$$= \int_{\Omega_0}(\vec{v}_1+\nabla\Phi_1)\cdot\overline{\Big(i\,(\vec{v}_2+\nabla\Phi_2)\times\vec{e}_3\Big)}\,d\Omega_0 = \ldots = (\xi_1,\mathcal{S}\xi_2)_{\mathcal{H}},$$

откуда следует, что $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$. Положим в последних вычислениях $\xi_1=\xi_2=\xi$ и воспользуемся простым неравенством $|(\vec{a}\times\vec{e}_3)\cdot\vec{a}|\le|\vec{a}|^2$; получим

$$|(\mathcal{S}\xi,\xi)_{\mathcal{H}}| = \Big|\int_{\Omega_0}\Big((\vec{v}+\nabla\Phi)\times\vec{e}_3\Big)\cdot\overline{(\vec{v}+\nabla\Phi)}\,d\Omega_0\Big| \le$$
$$\le \int_{\Omega_0}|\vec{v}+\nabla\Phi|^2\,d\Omega_0 = \int_{\Omega_0}\Big(|\vec{v}|^2+|\nabla\Phi|^2\Big)\,d\Omega_0 \le \|\xi\|^2_{\mathcal{H}}. \quad (2.12)$$

Здесь по пути было использовано свойство ортогональности $\vec{v}$ и $\nabla\Phi$ как элементов пространств $\vec{J}_0(\Omega_0)$ и $\vec{G}(\Omega_0)$. Из (2.12) получаем, что $\|\mathcal{S}\|\le 1$; поскольку $\|S_{1,1}\|=1$, то и для операторного блока $\mathcal{S}$ имеет место равенство $\|\mathcal{S}\|=1$. □

Будем считать далее, что функция $a^2_\infty(x)$ непрерывно дифференцируема по пространственным переменным, граница Γ_0 области Ω_0 — класса C^2, а Γ_1 и S — липшицевы.

Лемма 2. *Введем пространство H_A связанных пар $\psi=(\nabla\Phi;\vec{u})^t$:*

$$H_A := \{(\nabla\Phi;\vec{u})^t|\nabla\Phi\in\vec{W}^1_2(\Omega_0),\ \vec{u}\in\vec{W}^1_2(\Omega_1),\ \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1\ (\textit{на}\ \Gamma_0),\ \vec{u}=\vec{0}\ (\textit{на}\ S)\}$$

со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$((\nabla\Phi_1;\vec{u}_1)^t,(\nabla\Phi_2;\vec{u}_2)^t)_A := \rho_0\int_{\Omega_0} a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1 \mathrm{div}\nabla\Phi_2\, d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} E(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\, d\Omega_1,$$

$$\|(\nabla\Phi;\vec{u})^t\|_A^2 = \rho_0\int_{\Omega_0} a_\infty^2 |\mathrm{div}\nabla\Phi|^2\, d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} E(\vec{u},\vec{u})\, d\Omega_1, \quad \text{где}$$

$$E(\vec{u},\vec{v}) := \lambda \mathrm{div}\vec{u}\,\mathrm{div}\vec{v} + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Здесь λ и μ — коэффициенты Ляме (см. (1.1)*). Пространство H_A является гильбертовым; оно компактно вложено в пространство H: $H_A \subset\!\to\!\subset\!\to H$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(H_A; H)$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в H, обладает дискретным спектром. Для каждого элемента $\psi = (\nabla q;\vec{v})^t \in H$ существует и единственно обобщенное решение задачи*

$$\begin{aligned} &-\rho_0\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi) = \nabla q \quad (\textit{в } \Omega_0), \quad L\vec{u} = \vec{v} \quad (\textit{в } \Omega_1),\\ &\sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \vec{0} \quad (\textit{на } \Gamma_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\textit{на } S),\\ &\sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \rho_0 a_\infty^2(x)(\mathrm{div}\nabla\Phi)\vec{n}_1, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1 \quad (\textit{на } \Gamma_0), \end{aligned} \tag{2.13}$$

выражаемое формулой $(\nabla\Phi;\vec{u})^t = A^{-1}\psi$.

Доказательство. Докажем, что H_A гильбертово пространство. Введем в пространстве $\vec{W}_2^1(\Omega_1)$ эквивалентную норму по формуле

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1}\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega_1 + \left(\int_S \vec{u}\, dS\right)^2 \tag{2.14}$$

и обозначим через $\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)$ пространство $\vec{W}_2^1(\Omega_1)$ с новой нормой (2.14).

Введем гильбертово пространство $H_W := \vec{W}_2^1(\Omega_0)\oplus\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)$, состоящее из пар $\psi := (\nabla\Phi;\vec{u})^t$, где $\nabla\Phi\in\vec{W}_2^1(\Omega_0)$, $\vec{u}\in\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)$, и покажем, что на элементах из H_A нормы в H_A и в H_W эквивалентны. Это будет означать, что пространство H_A — гильбертово.

Можно проверить, что для каждого элемента $\psi = (\nabla\Phi;\vec{u})^t \in H_A$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_A^2 &= \rho_0\int_{\Omega_0} a_\infty^2|\mathrm{div}\nabla\Phi|^2\, d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} E(\vec{u},\vec{u})\, d\Omega_1 \le \\ &\le \rho_0 \max_{x\in\Omega_0} a_\infty^2(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega_0)} + \max\{2\mu, 4\lambda+\mu\}\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)} \le c_2^2\|\psi\|_W^2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где c_2^2 — максимальная из констант при нормах в правой части неравенства.

Выведем теперь противоположное неравенство, которое вместе с (2.15) обеспечит эквивалентность указанных норм. Для этого понадобятся некоторые вспомогательные факты.

Представим $\nabla\Phi = \nabla\Phi_0 + \nabla\Phi_h$, где $\nabla\Phi_0 \in \vec{G}_0(\Omega_0)$, $\nabla\Phi_h \in \vec{G}_h(\Omega_0)$ (см. разложение Г. Вейля (2.1)). Из [6], с. 216 известна оценка оператора Лапласа от функций $\Phi_0 \in W_2^2(\Omega_0)$ с условием $\Phi_0 = 0$ на границе $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$, которую можно представить в следующей форме:

$$\int_{\Omega_1} |\Delta\Phi_0|^2 \, d\Omega_1 \geq k_1 \|\Phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega_0)} \geq k_1 \|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega_0)} \tag{2.16}$$

с положительной константой k_1, которая не зависит от поля $\nabla\Phi_0$.

Для полей $\vec{u} \in \vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)$ с условием $\vec{u} = \vec{0}$ на границе S справедливо неравенство Корна (см. [7], с. 23, теорема 2.7):

$$\int_{\Omega_1} E(\vec{u}, \vec{u}) \, d\Omega_1 \geq k_2 \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^{3} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 d\Omega_1 = k_2 \|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)} \tag{2.17}$$

с положительной константой k_2, которая не зависит от поля $\vec{u}$.

Используя неравенства (2.16), (2.17), разложение для поля $\nabla\Phi$, можно провести следующую оценку нормы элемента $\psi = (\nabla\Phi; \vec{u})^t \in H_A$:

$$\|\psi\|_A^2 \geq k_1 \rho_0 \min_{x \in \Omega_0} a_\infty^2(x) \|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega_1)} + k_2 \|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)}. \tag{2.18}$$

Введем операторы γ_0 и γ_1:

$$\gamma_0 \nabla\Phi := \nabla\Phi \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \gamma_1 \vec{u} := \vec{u} \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_0)$$

взятия нормального следа полей $\nabla\Phi$ и $\vec{u}$ на границе Γ_0. Эти операторы ограничено действуют из $\vec{W}_2^1(\Omega_0) \cap \vec{G}(\Omega_0)$ и $\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma_0)$ (см. [4], с 102): $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\vec{W}_2^1(\Omega_0) \cap \vec{G}(\Omega_0), H^{1/2}(\Gamma_0))$, $\gamma_1 \in \mathcal{L}(\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1), H^{1/2}(\Gamma_0))$.

Определим оператор C по закону $C\partial\Phi/\partial n_0|_{\Gamma_0} = \Phi|_{\Gamma_0}$. Известно (см.[4], с 44, а также [8]), что для областей с гладкой границей оператор C ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma_0)$ в $H^{3/2}(\Gamma_0)$.

Наконец, введем оператор G, восстанавливающий $\nabla\Phi_h$ по следу потенциала Φ_h на границе Γ_0. Этот оператор взаимно сопряжен с оператором γ_0 (точнее, с сужением оператора γ_0 на $\vec{G}_h(\Omega_0)$ и относительно скалярного произведения в $L_{2,\Gamma_0} := L_2(\Gamma_0) \ominus \{1_{\Gamma_0}\}$) и действует ограниченно из $H^{3/2}_{\Gamma_0}$ в $\vec{W}_2^1(\Omega_0) \cap \vec{G}_h(\Omega_0)$. Доопределим оператор G нулем на константах, заданных на границе Γ_0, и расширим его таким образом с $H^{3/2}_{\Gamma_0}$ на $H^{3/2}(\Gamma_0)$, сохранив для него то же самое обозначение.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $\psi = (\nabla\Phi; \vec{u})^t \in H_A$. Из определения пространства H_A, разложения для поля $\nabla\Phi$ и приведенных выше фактов следует, что

$$
\begin{aligned}
&\nabla\Phi_h = GC\frac{\partial\Phi_h}{\partial n_0}\Big|_{\Gamma_0} = GC\Big(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial n_0} - \vec{u}\cdot\vec{n}_1\Big) = -GC\gamma_0\nabla\Phi_0 - GC\gamma_1\vec{u},\\
&\|\nabla\Phi_h\|^2_{\vec{W}^1_2(\Omega_0)} \le 2\|GC\gamma_0\|^2\|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}^1_2(\Omega_0)} + 2\|GC\gamma_1\|^2\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Введем обозначения: $\beta_0 := 2\|GC\gamma_0\|^2$, $\beta_1 := 2\|GC\gamma_1\|^2$. Из (2.18), (2.19) для каждого элемента $\psi = (\nabla\Phi;\vec{u})^t \in H_A$ следует оценка:

$$
\begin{aligned}
\|\psi\|^2_A \ge 2^{-1}k_1\rho_0 \min_{x\in\Omega_0} a^2_\infty(x)\|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}^1_2(\Omega_0)} + 2^{-1}k_2\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)} +\\
+ 2^{-1}\min\{\beta_0^{-1}k_1\rho_0\min_{x\in\Omega_0} a^2_\infty(x), \beta_1^{-1}k_2\}\|\nabla\Phi_h\|^2_{\vec{W}^1_2(\Omega_0)} =:\\
=: \beta_2\|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}^1_2(\Omega_0)} + 2^{-1}k_2\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)} + \beta_3\|\nabla\Phi_h\|^2_{\vec{W}^1_2(\Omega_0)} \ge\\
\ge 2^{-1}\min\{\beta_2,\beta_3\}\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{W}^1_2(\Omega_0)} + 2^{-1}k_2\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^1_{2,S}(\Omega_1)} \ge c_1^2\|\psi\|^2_W,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

где c_1^2 — минимальная из констант при нормах в последнем неравенстве.

Из (2.15), (2.20) получаем, что $c_1\|\psi\|_W \le \|\psi\|_A \le c_2\|\psi\|_W$ для любого элемента $\psi \in H_A$. Это означает, что H_A — гильбертово пространство.

Множество потенциальных полей с бесконечно дифференцируемыми финитными в области Ω_0 потенциалами плотно в $\vec{G}_0(\Omega_0)$, а множество бесконечно дифференцируемых финитных в области Ω_1 полей плотно в $\vec{L}_2(\Omega_1)$. Отсюда и из однозначной связи полей из $\vec{G}_h(\Omega_0)$ со значениями своих нормальных следов на границе Γ_0 следует, что H_A является плотным множеством в H. Из неравенства (2.20), с учетом того, что $\|\psi\|_H \le \|\psi\|_W$ для каждого $\psi \in H_W$, следует, что H_A и H образуют гильбертову пару $(H_A; H)$.

Найдем порождающий оператор A гильбертовой пары $(H_A; H)$; он определяется из тождества (см. [4], с. 33)

$$
(A\psi_1,\psi_2)_H = (\psi_1,\psi_2)_A, \quad \psi_1 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_A, \quad \psi_2 \in H_A. \tag{2.21}
$$

Для дважды дифференцируемого элемента $\psi = (\nabla\Phi;\vec{u})^t \in H_A$ (здесь имеется в виду, что дважды дифференцируемы поля $\nabla\Phi$ и $\vec{u}$), с использованием тождества Бэтти:

$$
\int_{\Omega_1} L\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\,d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} E(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\,d\Omega_1 - \int_{\partial\Omega_1}\sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1\cdot\vec{u}_2\,d(\partial\Omega_1),
$$

справедливого для $\vec{u}_1 \in \vec{W}^2_2(\Omega_1)$, $\vec{u}_2 \in \vec{W}^1_2(\Omega_1)$, и формулы Грина для оператора

Лапласа, тождество (2.21) можно преобразовать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(A\psi_1, \psi_2)_H &= \rho_0 \int_{\Omega_0} a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1 \mathrm{div}\nabla\Phi_2 \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} E(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \, d\Omega_1 = \\
&= -\rho_0 \int_{\Omega_0} \nabla(a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1) \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega_0 + \rho_0 \int_{\Gamma_0} a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_0} \, d\Gamma_0 + \\
&\quad + \int_{\Omega_1} L\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_1 + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1 \cdot \vec{u}_2 \, d(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) = \\
&= -\rho_0 \int_{\Omega_0} \nabla(a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1) \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} L\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_1 + \\
&\quad + \int_{\Gamma_0} \Big(\sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1 - \rho_0 a_\infty^2 (\mathrm{div}\nabla\Phi_1)\vec{n}_1\Big) \cdot \vec{u}_2 \, d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1 \cdot \vec{u}_2 \, d\Gamma_1. \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Отсюда следует форма оператора $A\psi = (-\rho_0 \nabla(a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1); L\vec{u}_1)^t$. Полагая в (2.22) поле $\vec{u}_2$ финитным в окрестности границы Γ_0, а затем Γ_1, придем к дополнительным условиям на элементы из области определения оператора A: $\sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1 = \vec{0}$ на Γ_1, $\sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1 = \rho_0 a_\infty^2 (\mathrm{div}\nabla\Phi_1)\vec{n}_1$ на Γ_0. Таким образом, окончательно получаем, что дважды дифференцируемое решение $\psi_1 = (\nabla\Phi_1; \vec{u}_1)^t$ уравнения $A\psi_1 = \psi := (\nabla q; \vec{v})^t$ является решением задачи

$$
\begin{aligned}
&-\rho_0 \nabla(a_\infty^2(x) \mathrm{div}\nabla\Phi_1) = \nabla q \quad (\text{в } \Omega_0), \quad L\vec{u}_1 = \vec{v} \quad (\text{в } \Omega_1), \\
&\sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\
&\sigma(\vec{u}_1)\vec{n}_1 = \rho_0 a_\infty^2(x)(\mathrm{div}\nabla\Phi_1)\vec{n}_1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_0} = -\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_0).
\end{aligned}
$$

Эта задача имеет единственное обобщенное решение $\psi_1 = A^{-1}\psi$ для любого элемента $\psi = (\nabla q; \vec{v})^t \in H$.

Из неравенства (2.20) и компактности вложения пространства H_W в $\vec{L}_2(\Omega_0) \oplus \vec{L}_2(\Omega_1)$ следует компактность вложения H_A в H: $H_A \subset\to\subset\to H$. Это влечет компактность оператора A^{-1}, а значит оператор A обладает дискретным спектром. $\square$

Определим операторы B_0 и B_G следующим образом:

$$
B_0\psi := P_0(\vec{e}_3 \mathrm{div}\nabla\Phi), \; B_G\psi := (P_G(\vec{e}_3 \mathrm{div}\nabla\Phi), 0)^t, \; \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(B_G) = H_A. \qquad (2.23)
$$

О свойствах операторов B_0 и B_G говорит следующая лемма.

Лемма 3. *Для операторов B_0 и B_G выполнены свойства*

$$
B_0 A^{-1/2} =: Q_0 \in \mathcal{L}(H, \vec{J}_0(\Omega_0)), \quad B_G A^{-1/2} =: Q_G \in \mathcal{L}(H). \qquad (2.24)
$$

Доказательство. Пусть $\psi = (\nabla\Phi, \vec{u})^t$ — произвольный элемент из $\mathcal{D}(B_0) = H_A$, тогда

$$\|B_0\psi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_0)} \leq \|\vec{e}_3 \mathrm{div} \nabla\Phi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_0)} \leq \left(\rho_0 \min_{x\in\Omega_0} a^2_\infty(x)\right)^{-1} \left(\rho_0 \int_{\Omega_0} a^2_\infty |\Delta\Phi|^2 \, d\Omega_0 + \right.$$
$$\left. + \int_{\Omega_1} E(\vec{u}, \vec{u}) \, d\Omega_1 \right) = \left(\rho_0 \min_{x\in\Omega_0} a^2_\infty(x)\right)^{-1} \|A^{1/2}\psi\|^2_H.$$

Отсюда, после замены $A^{1/2}\psi = \varphi$, следует, что $B_0 A^{-1/2} \in \mathcal{L}(H, \vec{J}_0(\Omega))$. Аналогично доказывается, что $B_G A^{-1/2} \in \mathcal{L}(H)$. □

2.3. Переход к операторному уравнению

С использованием введенных операторов задачу (2.5)–(2.10) запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega_0) \oplus H$:

$$\mathcal{T}\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega_0 i\mathcal{S}\frac{d\xi}{dt} + \mathcal{Q}\mathcal{A}\xi = \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad \xi'(0) = \xi^1. \tag{2.25}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \ \mathcal{F}(t) := \begin{pmatrix} \rho_0 P_0 \vec{f}(t) \\ (\rho_0 P_G \vec{f}(t); \rho_1(x)\vec{f}(t))^t \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{T} := \begin{pmatrix} \rho_0 I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \ T\psi := (\rho_0\nabla\Phi; \rho_1(x)\vec{u})^t, \ \mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 0 & -\rho_0 g Q_0 A^{-1/2} \\ 0 & I - \rho_0 g Q_G A^{-1/2} \end{pmatrix},$$
$$\xi(0) = \xi^0 := (\vec{v}^0; \psi^0)^t := (P_0\vec{w}^0; (P_G\vec{w}^0; \vec{u}^0)^t)^t,$$
$$\xi'(0) = \xi^1 := (\vec{v}^1; \psi^1)^t := (P_0\vec{w}^1; (P_G\vec{w}^1; \vec{u}^1)^t)^t,$$

где Q_0 и Q_G определены в (2.24).

Таким образом, если $\vec{u}$, $\vec{w}$, ρ, ∇p — классическое решение задачи (1.1)-(1.9) о малых движениях идеальной баротропной жидкости, заполняющей вращающееся упругое тело, тогда функция ξ является решением задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка (2.25).

Дадим следующее определение.

Определение 1. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.9) такие функции $\vec{u}$, $\vec{w}$, ρ, ∇p для которых функция ξ является сильным решением задачи Коши (2.25). В свою очередь сильным решением задачи Коши (2.25) (см. [9], с. 291) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi'(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$ для любого t из $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $\mathcal{A}\xi(t)$, $\mathcal{A}^{1/2}\xi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнены начальные условия и уравнение из (2.25) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

3. О разрешимости начально-краевой задачи

Осуществим в задаче (2.25) замену $\mathcal{A}^{1/2}\xi(t) = \eta'(t)$, $\eta(0) = 0$ и преобразуем ее к системе двух уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} \mathcal{T}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega_0 i\mathcal{S}\dfrac{d\xi}{dt} - \mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2}\dfrac{d\eta}{dt} + \mathcal{F}(t), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \mathcal{A}^{1/2}\dfrac{d\xi}{dt}, \qquad \xi'(0) = \xi^1, \quad \eta'(0) = \mathcal{A}^{1/2}\xi^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho_0 g Q_0 A^{-1/2} \\ 0 & I - \rho_0 g Q_G A^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I & -gQ_0 \\ 0 & -gQ_G \end{pmatrix} =: \mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{R}, \quad \text{где } \mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

С использованием проведенных преобразований запишем систему (3.1) в виде одного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\widehat{\mathcal{T}}\frac{dy}{dt} = \widehat{\mathcal{A}}y + \widehat{\mathcal{R}}y + \widehat{\mathcal{F}}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{3.2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\widehat{\mathcal{T}} := \begin{pmatrix} \mathcal{T} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} -2\omega_0 i\mathcal{S} & -\mathcal{A}^{1/2} \\ \mathcal{A}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{R}} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$y := (\xi'; \eta')^t, \quad y^0 := (\xi^1; \mathcal{A}^{1/2}\xi^0)^t, \quad \widehat{\mathcal{F}}(t) := (\mathcal{F}(t); 0)^t;$$

при этом $\widehat{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$, а оператор $\widehat{\mathcal{T}}$ ограниченный, самосопряженный и положительно определенный в $\mathcal{H}^{(2)}$, в чем несложно убедиться.

Определение 2. (см. [9], с. 38) Сильным решением задачи Коши (3.2) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\widehat{\mathcal{A}}y(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^{(2)})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^{(2)})$, $y(0) = y^0$ и выполнено уравнение из (3.2) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Относительно разрешимости задачи Коши (3.2) справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\widehat{\mathcal{F}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^{(2)})$, тогда для любого $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ существует и единственно сильное решение задачи Коши* (3.2).

Доказательство. Осуществим в уравнении (2.25) замену $\widehat{\mathcal{T}}^{1/2}y(t) = z(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}z + \widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\widehat{\mathcal{R}}\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}z + \widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\widehat{\mathcal{F}}(t), \quad z(0) = \widehat{\mathcal{T}}^{1/2}y^0. \tag{3.3}$$

Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ — генератор сильно непрерывной группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$, следовательно, оператор $\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}$ — также генератор сильно непрерывной группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$. Оператор $\widehat{\mathcal{R}}$ ограничен в $\mathcal{H}^{(2)}$, поэтому оператор $\widehat{\mathcal{B}} := \widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}(\widehat{\mathcal{A}}+\widehat{\mathcal{R}})\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}$ — генератор сильно непрерывной группы $\mathcal{U}(t) := \exp(t\widehat{\mathcal{B}})$ в $\mathcal{H}^{(2)}$ (см. [9], с. 185, теорема 7.5). Из условий теоремы и ограниченности оператора $\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}$ следует, что $\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\widehat{\mathcal{F}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$. Отсюда получаем (см. [9], с. 166, теорема 6.5), что для любого $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ задача Коши (3.3) имеет единственное сильное решение

$$z(t) = \mathcal{U}(t)\widehat{\mathcal{T}}^{1/2}y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\widehat{\mathcal{F}}(s)\,ds,$$

а значит задача Коши (3.2) имеет единственное сильное решение, выражаемое формулой:

$$y(t) = \widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\mathcal{U}(t)\widehat{\mathcal{T}}^{1/2}y^0 + \int_0^t \widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{T}}^{-1/2}\widehat{\mathcal{F}}(s)\,ds.$$

□

Основываясь на теореме 1, изучим вопрос о сильных решениях задачи (1.1)–(1.9) о малых движениях идеальной баротропной жидкости, заполняющей вращающееся упругое тело.

Теорема 2. *Пусть векторное поле $\vec{f}(t,x)$ непрерывно дифференцируемо по переменной $t \in \mathbb{R}_+$ со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_0 \cup \Omega_1)$, тогда для любых $\vec{w}^0(x)$, $\vec{w}^1(x)$, $\vec{u}^0(x)$, $\vec{u}^1(x)$ таких, что*

$$P_0\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega_0),\ P_0\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega_0),\ (P_G\vec{w}^0;\vec{u}^0)^t \in \mathcal{D}(A),\ (P_G\vec{w}^1;\vec{u}^1)^t \in \mathcal{D}(A^{1/2}),$$

существует и единственно сильное (в смысле определения 1) решение начально-краевой задачи (1.1)-(1.9).

Доказательство. Из условий на поле $\vec{f}(t,x)$ следует, что построенная по нему функция $\widehat{\mathcal{F}}(t)$ удовлетворяет условию $\widehat{\mathcal{F}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$ (см. обозначения после (2.25) и (3.2)). Далее, из условий на начальные данные следует, что $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$ (см. (2.25)). Отсюда получаем, что $\mathcal{A}^{1/2}\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$, $\xi^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$, а значит $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ (см. (3.2)).

Таким образом, при условиях настоящей теоремы выполнены все требования теоремы 1. По теореме 1 задача Коши (3.2) (или, что то же, (3.1)) имеет единственное сильное на $\mathbb{R}_+$ решение $y(t) = (\xi'(t);\eta'(t))^t \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}))\cap C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$. Отсюда, после обратной замены $\xi(t) = \mathcal{A}^{-1/2}\eta'(t)$ в системе (3.1), получаем, что $\xi(t)$ есть единственное сильное (в смысле определения 1) решение задачи Коши (2.25). Это означает существование и единственность сильного решения исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.9). □

Таким образом, в настоящей работе исследована задача о малых (линейных) движениях равномерно вращающегося упругого тела, заполненного идеальной баротропной жидкостью. Изучение соответствующей начально-краевой задачи сведено к исследованию дифференциально операторного уравнения гиперболического типа в некотором гильбертовом пространстве. На основе этого уравнения доказана теорема о существовании и единственности сильного (по времени) решения поставленной задачи. Тут можно отметить, что учет гравитационных сил вносит несимметрию в систему, а также приводит к некомпактному возмущению операторного пучка, который возникает при исследовании задачи о нормальных колебаниях изучаемой гидросистемы. Исследование вопросов локализации спектра и асимптотики собственных значений, вопросов полноты системы собственных и присоединенных элементов в соответствующей спектральной задаче будет проведено в следующей работе.

Список цитируемых источников

1. *Гараджаев А.* О нормальных колебаниях идеальной сжимаемой жидкости во вращающихся упругих сосудах // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 2. — С. 273–278.
2. *Гараджаев А.* К задаче о колебаниях идеальной сжимаемой жидкости в упругом сосуде // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286, № 5 — С. 1047–1049.
3. *Гараджаев А.* Спектральная теория задачи о малых колебаниях идеальной жидкости во вращающемся упругом сосуде // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1 — С. 38–47.
4. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
5. *Ralston J. V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids // J. Math. Analysis and Appl. — 1973. — V. 44. — P. 366–383.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
7. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: МГУ, 1990. — 311 с.
8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — Москва: Наука, 1967, — 464 с.

Получена 3.04.2007