Динамические системы, вып. 25 (2008), 83–93

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.977

Решение одной задачи синтеза управления для робастных систем на основе метода функции управляемости

Т. В. Ревина

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
Харьков 61007. *E-mail: tatjana_kupr@univer.kharkov.ua*

Аннотация. В настоящей статье рассматривается задача синтеза для линейной системы с неопределенными параметрами, т. е. задача робастного синтеза. Решение проводится на основе метода функции управляемости В.И. Коробова. Подробно разобраны робастные колебательные системы второго и четвертого порядков. Построено решение задачи синтеза, т. е. найден отрезок изменения параметра и найдено управление, не зависящее от параметра, переводящее произвольную точку некоторой окрестности начала координат в начало координат при любом значении параметра из этого отрезка. Приведена оценка на время попадания, также не зависящая от параметра. Решение проиллюстрировано для конкретной начальной точки.

Ключевые слова: метод функции управляемости, робастный синтез, колебательная система.

1. Введение

Пусть математическая модель управляемого объекта имеет вид системы дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор; $u \in \mathbb{R}^1$ — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$; A, b — вещественные матрицы параметров объекта размерности $(n\times n)$, $(n\times 1)$ соответственно. Относительно системы (1.1) мы предполагаем, что она является полностью управляемой.

Предположим, что элементы матрицы A не известны точно. Тогда система (1.1) заменяется на семейство $\dot{x} = A(p)x + bu$, где матрица $A(p)$ зависит от параметров $p \in Q \subset \mathbb{R}^m$. Используемое управление должно решать поставленную задачу при наличии неопределенности. Такие системы называют *робастными* [10].

В настоящее время опубликовано большое количество научных работ, посвященных теме робастности (например, [9, 10, 15]). Впервые робастный синтез возник в [17]. Несмотря на наличие значительного числа предшествующих результатов, основополагающим утверждением теории робастности является теорема

Харитонова, впервые сформулированная в работе [11]. В настоящее время выделилось три направления в развитии теории робастности. Исторически первый из них базируется на понятии многомерной границы устойчивости [16]. Второй подход основан на концепции структурированного сингулярного числа [14]. И, наконец, третий подход связан с применением линейных матричных неравенств [13]. Развитие этого метода предложено в [4, 10, 12]. Предложено также решение задачи робастности в классе дискретных управляющих воздействий (например, [2]). В [3] для построения робастного управления применяются методы антагонистических дифференциальных игр с геометрическими ограничениями управлений обоих игроков.

2. Предварительные сведения

В данной работе рассмотрена задача позиционного синтеза ограниченного управления для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu, \quad -d_1 \leq p \leq d_2, \quad (d_1, d_2 > 0), \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор; $u \in \mathbb{R}^1$ — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$; A, b — вещественные матрицы параметров объекта размерности $(n{\times}n)$, $(n{\times}1)$ соответственно, причем d_1 и d_2 выбраны так, что система (2.1) полностью управляема. Под позиционным синтезом ограниченного управления будем понимать нахождение такого управления $u(x)$, удовлетворяющего ограничению $|u(x)| \leq 1$ и не зависящего от p, что траектория $x(t)$ системы $\dot{x} = (A + pD)x + bu(x)$, выходящая из произвольной точки x_0, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в некоторый конечный момент времени $T(x_0, p) \leq c < \infty$ при любом допустимом p. Несколько похожий подход предложен в [1]. В отличие от [10], где параметр p постоянен, мы предполагаем, что параметр p может меняться в заданных пределах непрерывным образом. Одна из трудностей этой задачи состоит в том, что происходит нарушение теоремы единственности решения дифференциального уравнения. Т. к. в силу предположения управление гладкое вне сферы $S(\rho)$ и удовлетворяет условию Липшица с константой $L(\rho)$, то $L(\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$.

Исследование проводится на основе метода функции управляемости В.И. Коробова [6, 5]. Приведем результаты работы Коробова, Скляра [8], необходимые в дальнейшем.

Рассмотрим линейную систему (1.1). Для нее функция управляемости $\Theta = \Theta(x)$ определяется как положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta = (N^{-1}(\Theta)x, x), \quad x \neq 0, \tag{2.2}$$

$\Theta(0) = 0$, где матрица $N(\Theta) = N(\Theta(x))$ задается выражением

$$N(\Theta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\Theta}} e^{-At} bb^* e^{-A^*t} dt, \tag{2.3}$$

а управление $u = u(x)$ равно

$$u(x) = -\frac{1}{2}\, b^* N^{-1}(\Theta(x))x. \tag{2.4}$$

Постоянная a_0 выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leq \inf_{0<\Theta<\infty} \left(\frac{2}{\Theta(N^{-1}(\Theta)b, b)} \right). \tag{2.5}$$

Полная производная функции $\Theta(x)$ в силу системы (1.1) с управлением (2.4)

$$\dot{x} = Ax - \frac{1}{2}\, bb^* N^{-1}(\Theta(x))x \tag{2.6}$$

удовлетворяет условию

$$\left.\frac{d\Theta}{dt}\right|_{(2.6)} = -\frac{\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x)}{\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + (N_1(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, N^{-1}(\Theta)x)} \leq \mu < 0, \tag{2.7}$$

где

$$N_1(\Theta) = \int\limits_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{\Theta}} e^{-At} bb^* e^{-A^*t} dt.$$

Выполнение условий (2.7) и (2.5) обеспечивают конечность времени попадания траекторий в начало координат и ограниченность управления [5].

При решении задачи синтеза для робастных систем уравнение (2.6) примет вид

$$\dot{x} = (A + pD)x - \frac{1}{2}\, bb^* N^{-1}(\Theta(x))x, \tag{2.8}$$

а (2.7) преобразуется в

$$\left.\frac{d\Theta}{dt}\right|_{(2.8)} = \frac{-\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + p\,\Theta^2((N^{-1}(\Theta)D + D^*N^{-1}(\Theta))x, x)}{\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + (N_1(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, N^{-1}(\Theta)x)}.$$

Обозначим $y = N^{-1}(\Theta)x$,

$$N_2(\Theta) = \int\limits_0^{+\infty} (\Theta + t)e^{-\frac{t}{\Theta}} e^{-At} bb^* e^{-A^*t} dt,$$

тогда последнее равенство представляет собой

$$\left.\frac{d\Theta}{dt}\right|_{(2.8)} = -\frac{\Theta(N(\Theta)y, y)}{(N_2(\Theta)y, y)} + p\,\Theta^2 \frac{((DN(\Theta) + N(\Theta)D^*)y, y)}{(N_2(\Theta)y, y)}. \tag{2.9}$$

При решении задачи синтеза для робастных систем будем искать управление $u = u(x)$ так, чтобы для замкнутых систем

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu(x), \quad -d_1 \le p \le d_2, \quad (d_1, d_2 > 0), \tag{2.10}$$

была общая функция управляемости $\Theta(x)$, причем выполнялось неравенство

$$\left.\frac{d\Theta}{dt}\right|_{(2.10)} \le \eta < 0$$

при всех возможных значениях параметра p.

Данная работа является дальнейшим развитием исследований работы [7], но матрица $N(\Theta)$ выбирается иным способом, т. к. прежним способом вычисления громоздкие.

3. Синтез ограниченного управления

Пример 1. Рассмотрим материальную систему, схема которой представлена на рисунке 1. Жесткость пружины обозначена k_1, а массы грузов m_1 и m_2. Прямая, по которой движутся грузы m_1 и m_2, абсолютно гладкая. Управляющее воздействие прилагается к концу второго груза. Обозначим через y_1 и y_2 отклонения от положения равновесия первого и второго грузов соответственно. Уравнения Лагранжа для данной системы имеют вид

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 - k_1y_2 = 0, \\ m_2\ddot{y}_2 - k_1y_1 + k_1y_2 = u. \end{cases}$$

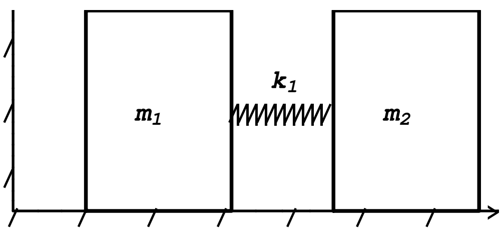

Рис. 1.

Сделав замену переменных $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = \dot{y}_1$, $x_4 = \dot{y}_2$ и положив $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 1 + p$, где p – некоторый параметр, переходим к колебательной системе 4 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - p\,x_1 + x_2 + p\,x_2, \\ \dot{x}_4 = x_1 + p\,x_1 - x_2 - p\,x_2 + u, \quad -d_1 \le p \le d_2, \quad (d_1, d_2 > 0) \end{cases} \tag{3.1}$$

или в матричном виде $\dot{x} = (A_0 + pD)x + b_0 u$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как жесткость пружины $k_1 = 1 + p$ должна быть положительной, то $p > -1$. Проверим управляемость полученной системы при всех p. Имеем $rank\ (b_0, (A_0 + pD)b_0, (A_0 + pD)^2 b_0, (A_0 + pD)^3 b_0) = 4$ при $p \neq -1$. Т. е. при $p > -1$ выполнен критерий Каллмана и система полностью управляема.

Теорема. Пусть управление $u(x)$ определяется равенством (2.4), где $\Theta(x)$ положительное решение уравнения (2.2) при $a_0 = 1/2$. Пусть $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ и числа d_1 и d_2 выбраны так, что $d_1 \leq 0.095/((c - 0.75)^2 + 0.65)$, $d_2 \leq 0.095/((c- -0.85)^2 + 0.85)$. Тогда при любом значении p, удовлетворяющем неравенству $-d_1 \leq p \leq d_2$, управление $u(x)$ решает задачу синтеза в области Q для системы (3.1), т. е. траектория, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q$, приходит в точку $x = 0$ за конечное время $T(x_0)$, причем

$$x(t) \in Q, \quad |u(x)| \leq 1;$$

$$T(x_0) \leq \max \left\{ \frac{\Theta(x_0)}{0.096 - ((c - 0.75)^2 + 0.65)d_1}, \frac{\Theta(x_0)}{0.096 - ((c - 0.85)^2 + 0.85)d_2} \right\}.$$

Доказательство. Решение основано на методе функции управляемости [5]. Пусть функция управляемости $\Theta = \Theta(x)$ определяется уравнением (2.2), где матрица $N(\Theta) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4\Theta^7(5+4\Theta^2)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & \frac{4\Theta^5}{1+8\Theta^2} & -\frac{2\Theta^6(5+4\Theta^2)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & -\frac{\Theta^4(1+8\Theta^4)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} \\ \frac{4\Theta^5}{1+8\Theta^2} & \frac{2\Theta^3(1+8\Theta^2+10\Theta^4+8\Theta^6)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & -\frac{\Theta^4(3+16\Theta^2+8\Theta^4)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & -\frac{\Theta^2(1+8\Theta^2+10\Theta^4+8\Theta^6)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} \\ -\frac{2\Theta^6(5+4\Theta^2)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & -\frac{\Theta^4(3+16\Theta^2+8\Theta^4)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & \frac{6\Theta^5}{(1+2\Theta^2)(1+8\Theta^2)} & \frac{\Theta^3}{1+8\Theta^2} \\ -\frac{\Theta^4(1+8\Theta^4)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & -\frac{\Theta^2(1+8\Theta^2+10\Theta^4+8\Theta^6)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)} & \frac{\Theta^3}{1+8\Theta^2} & \frac{\Theta(1+8\Theta^2+6\Theta^4)}{(1+2\Theta^2)(1+8\Theta^2)} \end{pmatrix}$$

Оценим величину постоянной a_0. Для того, чтобы управление (2.4) удовлетворяло заданным ограничениям $|u| \leq 1$ в робастной системе (3.1), достаточно, чтобы выполнялось неравенство (2.5) при всех допустимых p, Θ. Таким образом, должно выполняться усиленное неравенство (2.5)

$$0 < a_0 \leq \inf_{0<\Theta;\, 0 \leq p} \left(\frac{2}{\Theta(N^{-1}(\Theta, p)b_0, b_0)} \right). \tag{3.2}$$

В нашем случае симметричная матрица $N(\Theta, p) = (\tilde{n}_{i,j})_{i,j=1}^4$, элементы которой равны

$$\tilde{n}_{11} = \frac{4(1+p)^2\Theta^7(5 + 4(1+p)\Theta^2)}{(1 + 2(1+p)\Theta^2)^2(1 + 8(1+p)\Theta^2)}, \quad \tilde{n}_{12} = \frac{4(1+p)\Theta^5}{(1 + 8(1+p)\Theta^2)},$$

$$\tilde{n}_{13} = -\frac{2(1+p)^2\Theta^6(5+4(1+p)\Theta^2)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)}, \quad \tilde{n}_{14} = -\frac{(1+p)\Theta^4(1+8(1+p)^2\Theta^4)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)},$$

$$\tilde{n}_{22} = \frac{2\Theta^3(1+8(1+p)\Theta^2+10(1+p)^2\Theta^4+8(1+p)^3\Theta^6)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)},$$

$$\tilde{n}_{23} = -\frac{(1+p)\Theta^4(3+16(1+p)\Theta^2+8(1+p)^2\Theta^4)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)},$$

$$\tilde{n}_{24} = -\frac{\Theta^2(1+8(1+p)\Theta^2+10(1+p)^2\Theta^4+8(1+p)^3\Theta^6)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)},$$

$$\tilde{n}_{33} = \frac{6(1+p)^2\Theta^5}{(1+2(1+p)\Theta^2)(1+8(1+p)\Theta^2)}, \quad \tilde{n}_{34} = \frac{(1+p)\Theta^3}{1+8(1+p)\Theta^2},$$

$$\tilde{n}_{44} = \frac{\Theta(1+8(1+p)\Theta^2+6(1+p)^2\Theta^4)}{(1+2(1+p)\Theta^2)(1+8(1+p)\Theta^2)}.$$

Тогда $\Theta(N^{-1}(\Theta,p)b_0,b_0) = \Theta \times \dfrac{4}{\Theta} = 4$. Поэтому $a_0 = 1/2$ и уравнение (2.2) для системы (3.1) представляет собой

$$\begin{aligned}\Theta^8 = x_1^2(1-2\Theta^2+6\Theta^4+4\Theta^6) + 2x_1x_2\Theta^2(-3+8\Theta^2+4\Theta^4)+\\ +2x_1x_3\Theta(-3+4\Theta^2+2\Theta^4)+2x_1x_4\Theta^3(-1+4\Theta^2)+2x_2^2\Theta^4(7+2\Theta^2)+\\ +2x_2x_3\Theta^3(11+4\Theta^2)+12x_2x_4\Theta^5+2x_3^2\Theta^2(5+4\Theta^2+2\Theta^4)+8x_3x_4\Theta^4+4x_4^2\Theta^6.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Управление имеет вид

$$u(x) = -\frac{x_1(1-4\Theta^2)}{2\Theta^4} - \frac{3x_2}{\Theta^2} - \frac{2x_3}{\Theta^3} - \frac{2x_4}{\Theta}, \tag{3.4}$$

где $\Theta = \Theta(x)$ решение (3.3). Заметим, что хотя $\Theta(x) \to 0$ при $x \to 0$ и $\Theta(x)$ в формуле (3.4) стоит в знаменателе, управление, задаваемое формулой (3.4), удовлетворяет ограничению $|u| \le 1$.

Вычислим производную в силу системы от функции Θ. Она задается равенством (2.9). Потребуем, чтобы производная от функции Θ была отрицательной. Для этого из (2.9) имеем:

$$\left.\frac{d\Theta}{dt}\right|_{(2.8)} = -\lambda_{min}(\Theta N_2^{-1}(\Theta)N(\Theta)) + p\,\lambda_{max}(\Theta^2 N_2^{-1}(\Theta)(DN(\Theta)+N(\Theta)D^*)), \tag{3.5}$$

где $\lambda_{min}(\Theta N_2^{-1}(\Theta)N(\Theta))$, $\lambda_{max}(\Theta^2 N_2^{-1}(\Theta)(DN(\Theta)+N(\Theta)D^*))$ — наименьшее и наибольшее собственные значения соответствующих матриц.

$N_2(\Theta) = (n_{i,j})_{i,j=1}^4$ — симметричная матрица, элементы которой равны

$$n_{11} = \frac{32\Theta^8(5+40\Theta^2+58\Theta^4+32\Theta^6)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2}, \quad n_{12} = \frac{8\Theta^6(3+16\Theta^2)}{(1+8\Theta^2)^2},$$

$$
\begin{aligned}
n_{13} &= -\frac{2\Theta^7(35+266\Theta^2+344\Theta^4+192\Theta^6)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2},\\
n_{14} &= -\frac{\Theta^5(5+26\Theta^2+56\Theta^4+528\Theta^6+384\Theta^8)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2},\\
n_{22} &= \frac{8\Theta^4(1+16\Theta^2+84\Theta^4+160\Theta^6+232\Theta^8+128\Theta^{10})}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2},\\
n_{23} &= -\frac{\Theta^5(15+190\Theta^2+760\Theta^4+784\Theta^6+384\Theta^8)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2},\\
n_{24} &= -\frac{\Theta^3(3+46\Theta^2+230\Theta^4+404\Theta^6+688\Theta^8+384\Theta^{10})}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2},\\
n_{33} &= \frac{12\Theta^6(3+20\Theta^2+16\Theta^4)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)^2}, \quad n_{34} = \frac{4\Theta^4(1+4\Theta^2)}{(1+8\Theta^2)^2},\\
n_{44} &= \frac{2\Theta^2(1+16\Theta^2+82\Theta^4+120\Theta^6+96\Theta^8)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Тогда $\min\limits_{\Theta>0}\lambda_{min}(\Theta N_2^{-1}(\Theta)N(\Theta)) = 0.096$, собственные значения матрицы

$$\lambda(\Theta^2 N_2^{-1}(\Theta)(DN(\Theta)+N(\Theta)D^*)) = \{0;0;\beta_1;\beta_2\}.$$

Можно показать, что $\beta_1 \geq -(\Theta-0.75)^2-0.65$, $\beta_2 \leq (\Theta-0.85)^2+0.85$. Так как $-d_1 \leq p \leq d_2$, где $d_1 \leq 0.095/((c-0.75)^2+0.65)$, $d_2 \leq 0.095/((c-0.85)^2+0.85)$, то $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{\dot{x}=(A_0+pD)x+b_0u(x)} \leq -0.096+0.095<0$. Это является достаточным условием попадания в начало координат за конечное время [5]. □

Для нахождения конкретной траектории поступаем следующим образом. Берем произвольную начальную точку пространства состояний $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$. Решаем уравнение (3.3) при $x=x^0$ и находим корень $\Theta(x^0)=\Theta_0=c$. Выбираем числа d_1 и d_2 согласно оценке в теореме. При всех значениях параметра $p\in[-d_1,d_2]$ траектория является решением следующей задачи Коши

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 - p\,x_1 + x_2 + p\,x_2,\\
\dot{x}_4 = x_1 + p\,x_1 - x_2 - p\,x_2 - \dfrac{x_1(1-4\Theta^2)}{2\Theta^4} - \dfrac{3x_2}{\Theta^2} - \dfrac{2x_3}{\Theta^3} - \dfrac{2x_4}{\Theta},\\
\dot{\Theta} = \dfrac{-\Theta(N^{-1}(\Theta)x,x) + p\,\Theta^2((N^{-1}(\Theta)D + D^*N^{-1}(\Theta))x,x)}{\Theta(N^{-1}(\Theta)x,x) + (N_1(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, N^{-1}(\Theta)x)},\\
x_1(0)=x_1^0,\ x_2(0)=x_2^0,\ x_3(0)=x_3^0,\ x_4(0)=x_4^0,\ \Theta(0)=\Theta_0.
\end{cases}
$$

Пусть начальные условия системы (3.1) имеют вид $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=-0.3$, $x_3(0)=-0.8$, $x_4(0)=0.7$. Тогда $\Theta(x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0))=2.77$, $d_1=0.02$, $d_2=$ $=0.02$ и для $\forall p: p\in[-0.02,0.02]$ справедливо неравенство $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{\dot{x}=(A_0+pD)x+b_0u(x)}<0$.

На рисунках 2, 3 заданы проекции траектории при $p=-0.02$ и $p=0.02$. На рисунке 4 представлено управление при $p=-0.02$ и $p=0.02$. Оно удовлетворяет ограничению $|u| \leq 1$. На рисунке 5 представлена $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{\dot{x}=(A_0+pD)x+b_0u(x)}$ при $p = -0.02$ и $p = 0.02$. Она является отрицательной. Более жирная линия соответствует $p = -0.02$.

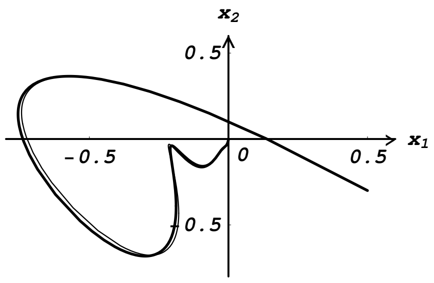

Рис. 2. Проекция траектории на плоскость x_1, x_2 при $p = -0.02$ и $p = 0.02$.

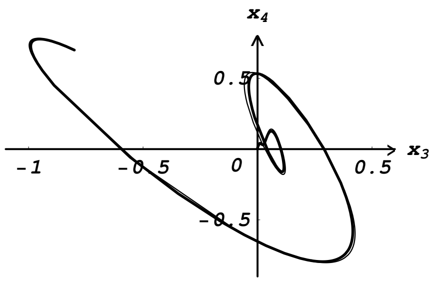

Рис. 3. Проекция траектории на плоскость x_3, x_4 при $p = -0.02$ и $p = 0.02$.

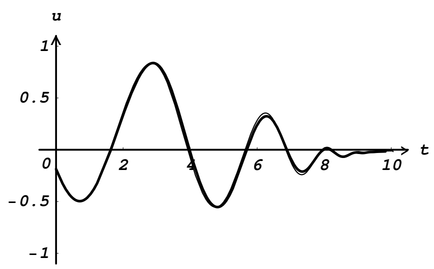

Рис. 4. Управление на траектории при $p = -0.02$ и $p = 0.02$.

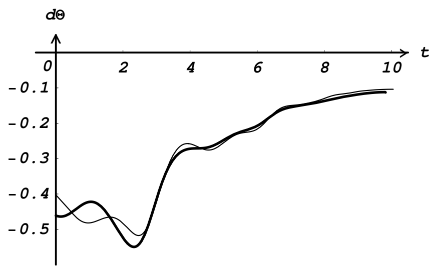

Рис. 5. Производная в силу системы от функции Θ при $p = -0.02$ и $p = 0.02$.

Замечание 1. Выпишем характеристический полином матрицы A_0+pD. Он имеет вид $\det(A_0+pD-\lambda I) = \lambda^4+2(1+p)\lambda^2$, где I — единичная матрица в пространстве $\mathbb{R}^4$. Для этой матрицы возможны 2 полинома Харитонова [11]: $S_1(\lambda) = \lambda^4 + 2\times$ $\times(1 + d_2)\lambda^2$, $S_2(\lambda) = \lambda^4 + 2(1 - d_1)\lambda^2$ (напомним, что $-d_1 \leq p \leq d_2$). Корни обоих полиномов имеют действительную часть равную нулю. Т. е. в данном примере мы не можем воспользоваться теоремой Харитонова.

Пример 2. Рассмотрим колебательную систему 2 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + px_1 + u, \quad -d_1 \leq p \leq d_2, \quad (d_1, d_2 > 0). \end{cases} \tag{3.6}$$

или в матричном виде $\dot{x} = (A_0 + pD)x + b_0u$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Эта система рассматривалась в [7], но в качестве $N(\Theta)$ бралась матрица

$$N(\Theta) = \int\limits_0^{\Theta} \left(1 - \frac{t}{\Theta}\right) e^{-At} bb^* e^{-A^*t} dt.$$

В данном примере такой выбор представляет некоторые трудности вычислительного характера, поэтому возьмем $N(\Theta)$ вида (2.3). Диапазон для параметра p и время попадания в начало координат согласуются с полученными ранее.

Пусть функция управляемости $\Theta = \Theta(x)$ определяется уравнением (2.2), где матрица $N(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{2\Theta^3}{1+4\Theta^2} & -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2} \\ -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2} & \frac{\Theta(1+2\Theta^2)}{1+4\Theta^2} \end{pmatrix}$. Для оценки постоянной a_0 воспользуемся неравенством (3.2). В нашем случае $N(\Theta, p) = \begin{pmatrix} \frac{2\Theta^3}{1+4\Theta^2(1-p)} & -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2(1-p)} \\ -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2(1-p)} & \frac{\Theta(1+2\Theta^2(1-p))}{1+4\Theta^2(1-p)} \end{pmatrix}$. Тогда $\Theta(N^{-1}(\Theta, p)b_0, b_0) = \Theta \times \dfrac{2}{\Theta} = 2$. Поэтому $a_0 = 1$ и уравнение (2.2) для системы (3.6) представляет собой

$$2\Theta^4 = (1 + 2\Theta^2)x_1^2 + 2\Theta x_1 x_2 + 2\Theta^2 x_2^2. \tag{3.7}$$

Управление имеет вид

$$u(x) = -\frac{x_1}{2\Theta^2} - \frac{x_2}{\Theta}, \tag{3.8}$$

где $\Theta = \Theta(x)$ — решение (3.7).

Вычислим производную в силу системы от функции Θ. В формуле (3.5) $N_2(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{8\Theta^4(1+2\Theta^2)}{(1+4\Theta^2)^2} & -\frac{\Theta^3(3+4\Theta^2)}{(1+4\Theta^2)^2} \\ -\frac{\Theta^3(3+4\Theta^2)}{(1+4\Theta^2)^2} & \frac{2\Theta^2(1+4\Theta^2+8\Theta^4)}{(1+4\Theta^2)^2} \end{pmatrix}$. Тогда $\min\limits_{\Theta>0} \lambda_{min}(\Theta N_2^{-1}(\Theta)N(\Theta)) = 0.226$, собственные значения матрицы

$$\lambda(\Theta^2 N_2^{-1}(\Theta)(DN(\Theta) + N(\Theta)D^*)) = \left\{ \frac{-2\Theta^2 \pm 4\sqrt{2\Theta^4(1+2\Theta^2)}}{7 + 16\Theta^2} \right\}.$$

Откуда $-\dfrac{2\Theta^2 + 4\sqrt{2\Theta^4(1+2\Theta^2)}}{7+16\Theta^2} \geq -0.53\ \Theta$, $\dfrac{-2\Theta^2 + 4\sqrt{2\Theta^4(1+2\Theta^2)}}{7+16\Theta^2} \leq 0.5\ \Theta$. Так как $d_1 \leq 0.225/(0.53\ c)$, $d_2 \leq 0.225/(0.5\ c)$, то из (3.5) следует, что $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{\dot{x}=(A_0+pD)x+b_0u(x)} \leq -0.226 + 0.225 < 0$. Это является достаточным условием попадания в начало координат за конечное время [5]. Как видим, выбор $N(\Theta)$ вида (2.3) упрощает вычисления по сравнению с полученными в [7].

Сформулируем полученный в этом примере результат: пусть управление $u(x)$ определяется равенством (2.4), где $\Theta(x)$ положительное решение уравнения (2.2) при $a_0 = 1$. Пусть $Q = \{x :\ \Theta(x) \leq c\}$ и числа d_1 и d_2 выбраны так, что $d_1 \leq$ $\leq 0.225/(0.53\, c)$, $d_2 \leq 0.225/(0.5\, c)$. Тогда при любом значении p, удовлетворяющем неравенству $-d_1 \le p \le d_2$, управление $u(x)$ решает задачу синтеза в области Q для системы (3.6), т. е. траектория системы (3.6) при $u = u(x)$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q$, оканчивается в точке $x = 0$ за конечное время $T(x_0)$, причем $x(t) \in Q, \quad |u(x)| \le 1$;

$$T(x_0) \le \max\left\{\frac{\Theta(x_0)}{0.226 - 0.53\,c\,d_1},\ \frac{\Theta(x_0)}{0.226 - 0.5\,c\,d_2}\right\}.$$

Выберем как и в [7] начальные условия системы вида $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0.5$. Тогда $\Theta(x_1(0), x_2(0)) = 1.37$, $d_1 = 0.30$, $d_2 = 0.32$ и для $\forall p : p \in [-0.30, 0.32]$ справедливо неравенство $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{\dot{x}=(A_0+pD)x+b_0u(x)} < 0$. При $p = -0.30$ время попадания в начало координат $T \approx 3.32$, при $p = 0$ время $T \approx 3.05$, при $p = 0.32$ время $T \approx 2.93$. В [7] получены такие результаты: $d_1 = 0.31$, $d_2 = 0.40$. При $p = -0.31$ время попадания в начало координат $T \approx 3.25$, при $p = 0$ время $T \approx 3.14$, при $p = 0.40$ время $T \approx 3.25$.

Замечание 3. Выпишем характеристический полином матрицы $A_0 + pD$. Он имеет вид $\det(A_0 + pD - \lambda I) = \lambda^2 + 1 - p$, где I — единичная матрица в пространстве $\mathbb{R}^2$. Для этой матрицы возможны 2 полинома Харитонова [11]: $S_1(\lambda) = \lambda^2 + 1 - d_2$, $S_2(\lambda) = \lambda^2 + 1 + d_1$ (напомним, что $-d_1 \le p \le d_2$). Корни обоих полиномов имеют действительную часть равную нулю. Т. е. в данном примере мы также не можем воспользоваться теоремой Харитонова.

Список цитируемых источников

1. *Ананьевский И. М.* Непрерывное управление по обратной связи возмущенными механическими системами. // ПММ. — 2003. — Т. 67, вып. 2. — С. 163-178.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Поясок Е. И.* Оптимальное робастное управление динамическими системами по неточным измерениям их выходных сигналов. // Доклады академии наук. — 2008. — Т. 421, № 2. — С. 172-176.
3. *Ганебный С. А., Кумков С. С., Пацко В. С.* Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи. // ПММ. — 2006. — Т. 70, вып. 5. — С. 753-770.
4. *Захаров А. В., Шокин Ю. И.* Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей. // ДАН СССР. — 1988. — Т. 299, № 2. — С. 292-295.
5. *Коробов В. И.* Метод функции управляемости. — М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2007. — 576 с.
6. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Матем. сб. — 1979. — Т. 109(151), № 4(8). — С. 582-606.
7. *Коробов В. И., Гавриляко В. М.* Робастные системы. Синтез ограниченного управления // Вісн. Харк. націон. унів., Сер. мат., прикл. мат., мех. — 2005. — № 711. — С. 23-27.
8. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференц. уравн. — 1990. — Т. 26, № 11. — С. 1914-1924.

9. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М., Гл. ред. физ-мат лит., 1977. — 392 с.
10. *Поляк Б. П., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
11. *Харитонов В. Л.* Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравн. — 1978. — Т. 14, № 11. — С. 2086-2088.
12. *Хорошун А. С.* Параметрическая квадратическая стабилизация нелинейных систем с неопределенностью. // Доповіді нац. академії наук Украіни. — 2008. — № 2. — С. 36-41.
13. *Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in systems and control theory. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. — 1994. —ix, —193 p.
14. *Doyle J. C.* Analysis of feedback systems with structured uncertainties. // IEEE Proc. Pt. D: Control Theory and applications. —1982, v.129, no. 6—pp. 242-250.
15. *F*uture directions in control theory. A mathematical perspective.// Report of the Panel on Future Directions in Control Theory./ Ed. W. H. Fleming. SIAM Reports on Issues in the Mathematical Sciences. — Philadelphia: SIAM. —1988. —98 p.
16. *Safonov M. G., Athans M.* A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis. // IEEE Trans. on Automatic Control. —1981, v.26, no. 2. —pp. 415-422.
17. *Soyster A. L.* Convex programming with set-inclusive constrains. Applications to inexact linear programming. // Operations research. —1973, v.21, —pp. 1154-1157.

Получена 08.10.2008