Динамические системы, вып. 23 (2007), 73–86

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

О коммутируемости локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана

М.А. Муратов

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: kromsh@mail.ru*

Аннотация. В настоящей работе приводится доказательство теоремы, что два неограниченных самосопряженных локально измеримых оператора, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана M, коммутируют в $*$-алгебре $LS(M)$ тогда и только тогда, когда коммутируют соответствующие этим операторам спектральные разложения. Это доказательство использует критерий интегрируемости кососимметрического представления алгебры Ли.

1. Введение

Пусть H — гильбертово пространство, T и S — два самосопряженных линейных оператора, действующих в H. Если операторы T и S ограничены, то коммутируемость $TS = ST$ этих операторов означает, что $TS\xi = ST\xi$ для каждого вектора $\xi \in H$.

Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов показывает (см.например, [14]), что $TS = ST$ тогда и только только тогда, когда попарно коммутируют спектральные проекторы $E_T(\Delta)$ и $E_S(\Delta')$ для любых $\Delta,\ \Delta' \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ ($\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}^1$), либо тогда и только тогда, когда коммутируют унитарные группы $\mathcal{U}_t = e^{itT}$ и $\mathcal{V}_s = e^{isS}$.

Если T и S два, вообще говоря, неограниченных самосопряженных оператора, то, даже если

$$\mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$$

содержит плотное в H инвариантное относительно операторов T и S линейное подмножество $\mathfrak{D}$, равенство

$$TS\xi = ST\xi$$

для любого $\xi \in \mathfrak{D}$ не эквивалентно тому, что коммутируют их спектральные проекторы (см., например, [14]). Существуют различные подходы к определению коммутируемости неограниченных самосопряженных операторов. Один из них опирается на коммутируемость соответствующих этим операторам спектральных разложений.

Говорят, что два самосопряженных оператора T и S *сильно коммутируют*, если коммутируют их спектральные разложения.

Если операторы T и S сильно коммутируют, то коммутируют и все ограниченные борелевские функции от этих операторов, в частности, коммутируют их резольвенты $R_T(\lambda)$ и $R_S(\mu)$, если $Im\lambda \neq 0$ и $Im\mu \neq 0$, и унитарные группы $\mathcal{U}_t = e^{itT}$ и $\mathcal{V}_s = e^{isS}$ для всех $s, t \in \mathbb{R}$ (см., например, [14]).

В работе [16] было доказано, что два самосопряженных оператора коммутируют в $*$-алгебре $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов тогда и только тогда, когда они сильно коммутируют. Это доказательство опирается на понятие преобразования Кэли неограниченного самосопряженного оператора. В работе [13] был предложен другой метод доказательства этого утверждения, использующий критерий интегрируемости кососимметрических представлений алгебры Ли. В настоящей работе приводится обобщение этого результата на случай $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов.

Отметим, что как $*$-алгебра $S(\mathcal{M})$, так и $*$-алгебра $LS(\mathcal{M})$, принадлежат к важному классу $*$-алгебр $\mathcal{A}$ замкнутых операторов, действующих в гильбертовом пространстве H и присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, у которых $*$-подалгебра ограниченных операторов удовлетворяет равенству:

$$\mathcal{A}_b = \{T \in \mathcal{A} : \ T \in B(H)\} = \mathcal{M}.$$

Такие $*$-алгебры Диксоном (см. [1]), были названы EW^*-алгебрами. В работе Закирова Б.С., Чилина В.И. [9] было показано, что любая EW^*-алгебра $\mathcal{A}$, у которой

$$\mathcal{A}_b = M,$$

является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, что объясняет уникальность $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в классе EW^*-алгебр.

2. Предварительный сведения. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.

В этом разделе рассматриваются $*$-алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ измеримых и локально измеримых измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. (См. [3],[10]). Мы пользуемся стандартной терминологией теории операторов и операторных алгебр (см. [5], [6], [15]) и алгебр измеримых операторов (см. [3], [7], [11], [12]).

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, $P(\mathcal{M})$ — структура всех ортопроекторов в $\mathcal{M}$.

2.1. Операторы, присоединенные к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

Определение 1. Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в H называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $\mathfrak{D} \ \eta \ \mathcal{M}$), если

$$U(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}$$

для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$.

Определение 2. Линейный оператор T с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $T\ \eta\ \mathcal{M}$), если

$$UT \subseteq TU$$

для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$, т.е.

(i) $\mathfrak{D}(T)\ \eta\mathcal{M}$,

(ii) $UT\xi = TU\xi$ для любого $\xi \in \mathfrak{D}(T)$.

Легко видеть, что ограниченный линейный оператор $T \in B(H)$ присоединен к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $T \in \mathcal{M}$.

Предложение 1. *(i) Если $\mathfrak{D}$ замкнутое подпространство в H и $P = P_{\mathfrak{D}}$ ортогональный проектор на $\mathfrak{D}$, то $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда $P \in P(\mathcal{M})$.*

(ii) Если $T\ \eta\ \mathcal{M}$ предзамкнутый оператор, то

ii1) $\overline{T}\ \eta\ \mathcal{M}$,

ii2) $T^*\ \eta\ \mathcal{M}$.

(iii) Если T — замкнутый оператор и $T = W|T|$ его полярное разложение, то $T\ \eta\ \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда

$$W \in \mathcal{M} \quad \text{и} \quad |T|\eta\ \mathcal{M}.$$

(iv) Если T самосопряженный оператор, $T\ \eta\mathcal{M}$ и $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — спектральное семейство проекторов для T, то

$$E_\lambda \in P(\mathcal{M}) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.2. $*$-Алгебра $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов.

Определение 3. Линейное подпространство $\mathfrak{D} \subseteq H$ называется *сильно плотным* в H относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если

(i) $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$;

(ii) Существует последовательность ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\mathcal{M})$ такая, что

ii1) $P_n \uparrow I$,

ii2) $P_n(H) \subseteq \mathfrak{D}$,

ii3) $P_n^{\perp}$ является конечным проектором для каждого $n = 1, 2, \ldots$

В этом случае говорят, что подпространство $\mathfrak{D}$ *определено* последовательностью $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание 1. 1) Любое сильно плотное подпространство $\mathfrak{D}$ в H является плотным.

2) Если $\mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{D}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{D}_k$ — конечное число сильно плотных подпространств, то подпространство

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{D}_i$$

тоже сильно плотно в H.

Определение 4. Линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если

(i) $T\ \eta\ \mathcal{M}$;

(ii) Область определения $\mathfrak{D}(T)$ оператора T сильно плотна в H;

(iii) Оператор T замкнут.

Предложение 2. *Если T — замкнутый оператор с плотной областью определения и $T = W|T|$ — полярное разложение оператора T, то оператор T измерим относительно $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда*

$$W \in \mathcal{M} \quad \text{и} \quad |T| \quad \text{измерим относительно} \quad \mathcal{M}.$$

Пусть T и S — операторы, измеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда замыкания $\overline{T+S}$ и $\overline{TS}$ операторов $T+S$ и TS являются измеримыми относительно $\mathcal{M}$ операторами. Эти замыкания называются *сильной суммой и сильным произведением* операторов T и S соответственно, и обозначаются

$$\overline{T+S} = T \dotplus S, \quad \overline{TS} = T \cdot S.$$

Обозначим через $S(\mathcal{M})$ множество всех операторов, измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Ясно, что

$$\mathcal{M} \subseteq S(\mathcal{M}).$$

Теорема 1. *Множество $S(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, с единичным элементом I, относительно операций сильной суммы и сильного произведения и операции перехода к сопряженному оператору.*

2.3. $*$-Алгебра $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

Определение 5. Линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *локально измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если

i) $T\ \eta \mathcal{M}$;

ii) Существует такая последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(\mathcal{M})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$;

iii) Оператор T замкнут.

Обозначим множество всех линейных операторов, локально измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, через $LS(\mathcal{M})$. Ясно, что

$$S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M})$$

и

$$S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$$

если $\mathcal{M}$ — фактор.

Имеет место следующее предложение:

Предложение 3. *Если T — замкнутый оператор с плотной областью определения и $T = W|T|$ — полярное разложение оператора T, то оператор T локально измерим относительно $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $W \in \mathcal{M}$ и $|T|$ — локально измерим относительно $\mathcal{M}$.*

В следующем предложении даются необходимые и достаточные условия локальной измеримости линейного оператора.

Предложение 4. *([16]) Пусть T — замкнутый оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

i) Оператор T локально измерим относительно $\mathcal{M}$;

ii) Существует возрастающая сеть $\{Z_\alpha\}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, для которых $\sup\limits_{\alpha} Z_\alpha = I$ и $TZ_\alpha \in S(\mathcal{M})$ для всех α;

iii) Существует возрастающая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, для которых $\sup\limits_{n\geq 1} Z_n = I$ и $Z_n E_n^{\perp}$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \dots$, где $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$;

iv) Существуют такие последовательность проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Q_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $Q_n(H) \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и $Z_n Q_n^{\perp}$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \dots$.

Из предложения 4 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$.*

Определение 6. Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в гильбертовом пространстве H называется локально измеримым относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

i) $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$;

ii) Существуют такие последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\mathcal{M})$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(Z(\mathcal{M}))$, что $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $P_n(H) \subseteq \mathfrak{D}$, $Z_n P_n^{\perp}$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \dots$ (в этом случае говорят, что линейное подпространство $\mathfrak{D}$ определено последовательностями $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Из предложения 4 следует, что замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, является локально измеримым относительно $\mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда его область определения $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathcal{M}$.

Замечание 2. 1) Любое локально измеримое подпространство $\mathfrak{D}$ в H является плотным.

2) Если $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, ..., $\mathfrak{D}_k$ — конечное число локально измеримых подпространств, то подпространство

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{D}_i$$

тоже локально измеримо относительно $\mathcal{M}$.

Предложение 5. *Пусть T — предзамкнутый линейный оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

i) Оператор $\overline{T}$ локально измерим относительно $\mathcal{M}$;

ii) Существуют такие последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, $n \geq 1$, что $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $P_n(H) \subseteq \mathfrak{D}(T)$, $Z_n P_n^{\perp}$ — конечные проекторы и $TZ_nP_m \in B(H)$ для всех $n, m = 1, 2, \ldots$.

В следующем утверждении даются необходимые и достаточные условия локальной измеримости линейного оператора.

Предложение 6. *Пусть T — замкнутый оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) Оператор T локально измерим относительно $\mathcal{M}$;

(ii) Существует возрастающая сеть $\{Z_\alpha\}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, для которых $\sup\limits_{\alpha} Z_\alpha = I$ и $TZ_\alpha \in S(\mathcal{M})$ для всех α;

(iii) Существует возрастающая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, для которых $\sup\limits_{n \geqslant 1} Z_n = I$ и $Z_n E_n^{\perp}$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$;

(iv) Существуют такие последовательность проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что

iv1) $Q_n \uparrow I$,

iv2) $Z_n \uparrow I$,

iv3) $Q_n(H) \subseteq \mathfrak{D}(T)$,

iv4) $Z_n Q_n^{\perp}$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *(i) Если T — линейный оператор, локально измеримый относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, и $\mathfrak{D}$ — локально измеримое относительно $\mathcal{M}$ линейное подпространство, то подпространство $T^{-1}(\mathfrak{D}) = \{\xi \in D(T) : T\xi \in \mathfrak{D}\}$ также локально измеримо относительно $\mathcal{M}$.*

(ii) Если T — симметрический оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathcal{M}$, то его замыкание $\overline{T}$ является самосопряженным оператором, локально измеримым относительно $\mathcal{M}$.

(iii) Если T — линейный оператор, локально измеримый относительно $\mathcal{M}$, то оператор T^* является локально измеримым относительно $\mathcal{M}$.

(iv) Если локально измеримые операторы T и S совпадают на локально измеримом подпространстве $\mathfrak{D}$, то $T = S$.

Следствие 2. *Если $T \in LS(\mathcal{M})$ и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ определена последовательностями проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, то оператор T совпадает с замыканием сужения T на $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.*

Предложение 7. *Если T и S — операторы, локально измеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то операторы $\overline{T+S}$ и $\overline{TS}$ также локально измеримы относительно $\mathcal{M}$.*

Так же, как и для измеримых операторов, будем называть сильной суммой и сильным произведением локально измеримых операторов $T,\ S \in LS(\mathcal{M})$ замыкания операторов $T+S$ и TS и обозначать их через $T \dot{+} S$ и $T \cdot S$ соответственно. Согласно утверждениям 2 (iii) и 7, имеем, что $T \dot{+} S,\ T \cdot S,\ T^* \in LS(\mathcal{M})$. Отметим, что так же как и для измеримых операторов, если $T \in LS(\mathcal{M}),\ S \in \mathcal{M}$, то $T \dot{+} S = T + S,\ T \cdot S = TS$.

Замечание 3. Если $T \in LS(\mathcal{M}),\ P \in P(\mathcal{M}),\ TP \in B(H)$, то $P(H) \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и $TP \in \mathcal{M}$.

Теорема 3. *Множество $LS(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с единицей I относительно сильного сложения, сильного умножения и перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что $0 \cdot T = 0$). При этом, алгебра $S(\mathcal{M})$ есть $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.*

Предложение 8. *Если $T \in LS(\mathcal{M})$, то существует такое локально измеримое линейное подпространство $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}(T)$, что*

$$T(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Пусть оператор $T \in LS(\mathcal{M})$. Тогда его область определения $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathcal{M}$. Обозначим через

$$\mathfrak{D} = T^{-1}(\mathfrak{D}(T)) = \{\xi \in \mathfrak{D}(T) :\ T\xi \in \mathfrak{D}(T)\}.$$

Тогда $\mathfrak{D}$ — локально измеримое подмножество в H (см. теорему 2 (i), а также [12]). Осталось заметить, что $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и

$$T(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}.$$

□

Предложение 9. *Если оператор* $T \in LS(\mathcal{M})$, *то существуют такие последовательность проекторов* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$ *и последовательность центральных проекторов* $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, *что* $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $P_n(H) \subseteq \mathfrak{D}(T)$, $Z_n P_n^{\perp}$ *— конечные проекторы и оператор* T *совпадает с замыканием сужения* T *на подпространство* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.

Доказательство. Пусть $T \in LS(\mathcal{M})$. Тогда по предложению 6 (iii) существует возрастающая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $Z(\mathcal{M})$, для которых $\sup\limits_{n \geqslant 1} Z_n = I$ и $Z_n E_{|T|}^{\perp}(n)$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \dots$, где $\{E_{|T|}(\lambda)\}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$;

Рассмотрим последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$P_n = E_{|T|}(n), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$P_n \uparrow I, \quad P_n(H) \subset \mathfrak{D}(|T|) = \mathfrak{D}(T)$$

и $Z_n P_n^{\perp}$ — конечные проекторы, $n = 1, 2, \dots$.

Следовательно, оператор T определен последовательностями проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, и поэтому совпадает с замыканием сужения T на подпространство $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$ (см. [12]).

□

Предложение 10. *Если оператор* $T \in LS(\mathcal{M})$ *самосопряженный и* $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *его спектральное семейство проекторов, то существует такая последовательность центральных проекторов* $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, *что* $Z_n \uparrow I$ *и проектор* $Z_n E_T^{\perp}([-n, n])$ *конечен для любого* $n = 1, 2, \dots$, *где*

$$E_T([-n, n]) = E_T((-\infty, n]) - E_T([-\infty, -n))$$

проектор, отвечающий отрезку $[-n, n]$.

Доказательство. Так как оператор $T \in S(\mathcal{M})$ самосопряженный, то положительные самосопряженные операторы

$$T_+ = \frac{1}{2}(|T| + T) \ \text{ и } \ T_- = \frac{1}{2}(|T| - T)$$

принадлежат $LS(\mathcal{M})$.

Пусть $\{P_{T_+}(\mu)\}_{\mu \geq 0}$ и $\{Q_{T_-}(\nu)\}_{\nu \geq 0}$ спектральные семейства проекторов операторов T_+ и T_- соответственно. Тогда (см.[7]) существуют такие последовательности центральных проекторов $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Z''_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, что $Z'_n \uparrow I$,

$Z''_n \uparrow I$ и проекторы $Z'_n P^{\perp}_{T_+}(n)$ и $Z''_n Q^{\perp}_{T_-}(n)$ конечны. Пусть $Z_n = Z'_n Z''_n$. Тогда $Z_n \uparrow I$,

$$E_T([-n,n]) = P_{T_+}(n) \wedge Q_{T_-}(n),$$

и поэтому проектор

$$Z_n E^{\perp}_T([-n,n]) = Z'_n P^{\perp}_{T_+}(n) \vee Z''_n Q^{\perp}_{T_-}(n)$$

конечен.

□

Предложение 11. *Если оператор $T \in S(\mathcal{M})$ самосопряжен, то существуют такие последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset PZ((M))$, что*

(i) $P_n \uparrow I$ и $Z_n \uparrow I$ при $n \to \infty$;

(ii) $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ для любого $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) $TP_n\xi = P_nT\xi$ для любого вектора $\xi \in P_n(H)$ и любого $n = 1, 2, \ldots$;

(iv) Проекторы Z_nP_n – конечны для любого $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. В силу предложения 10, если оператор $T \in S(M)$ самосопряженный и $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ его спектральное семейство проекторов, то существует такая последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и проектор $Z_n E^{\perp}_T([-n,n])$ конечен для любого $n = 1, 2, \ldots$.

Обозначим

$$P_n = E_T([-n,n]), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$ удовлетворяет перечисленным условиям.

□

Замечание 4. Линейные подпространства $P_n(H)$, построенные в доказательстве предложения 11, являются инвариантными не только относительно оператора T, но и относительно каждого оператора T^k, $k \in \mathbb{N}$. Действительно, для любого вектора $\xi \in P_n(H)$ и любого $n = 1, 2, \ldots$

$$T\xi = TP_n\xi = P_nT\xi \in P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T).$$

Следовательно,

$$T^2\xi = T(T\xi) = T(P_nT\xi) = P_n(T^2\xi) \in P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T),$$

и так далее, для любого натурального k. Итак,

$$T^k : P_n(H) \to P_n(H).$$

Замечание 5. Каждый из операторов T^k, $k = 1, 2, \ldots$ определен последовательностями $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, и совпадает с замыканием сужения оператора T^k на линейное подпространство $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.

Замечание 6. Для самосопряженного оператора $T \in S(\mathcal{M})$

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H).$$

является локально измеримым линейным инвариантным подпространством в H.

2.4. Критерий сильной коммутируемости неограниченных самосопряженных операторов

Для исследования вопроса о сильной коммутируемости локально измеримых операторов, нам будут необходимы некоторые результаты теории Нельсона интегрируемости представлений алгебр Ли (см. [8], глава 11). Следующая теорема представляет собой простой критерий интегрируемости кососимметрического представления алгебры Ли.

Теорема 4. *Пусть L — алгебра Ли кососимметрических операторов в гильбертовом пространстве H, которые имеют общую инвариантную плотную область определения $\mathfrak{D}$. Пусть X_1, X_2, $\ldots, X_k$ – операторный базис в L и*

$$\Delta = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2.$$

Если оператор Δ существенно самосопряжен, то в H существует единственное унитарное представление π односвязной группы Ли G, имеющей L своей алгеброй Ли, такое, что для всех $X \in L$

$$\overline{\pi(X)} = \overline{X}.$$

Следующее предложение дает основной результат теоремы 4 с более слабыми предположениями на область определения представления.

Предложение 12. *Пусть L — вещественная алгебра Ли, X_1, X_2, $\ldots, X_k$ — базис в L, H — гильбертово пространство и для каждого $X \in L$ $\rho(X)$ — кососимметрический оператор на H. Пусть, далее, $\mathfrak{D}$ — плотное линейное подпространство в H такое, что*

$$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}(\rho(X)\rho(Y)) \quad \text{для любых } X, Y \in L.$$

Если

1) $\rho(aX + bY)\xi = a\rho(X)\xi + b\rho(Y)\xi$ *для любых* $X, Y \in L$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathfrak{D}$;

2) $\rho([X, Y])\xi = (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))\xi$ *для любых* $X, Y \in L$, $\xi \in \mathfrak{D}$;

3) Ограничение оператора $\rho(X_1)^2 + \rho(X_2)^2 + \ldots \rho(X_k)^2$ *на* $\mathfrak{D}$ *существенно самосопряжено,*

то на H существует единственное унитарное представление π односвязной группы Ли G, имеющей L своей алгеброй Ли, такое, что для всех $X \in L$

$$\overline{\pi(X)} = \overline{\rho(X)}.$$

Теорема 4 и предложение 12 позволяют получить удобный критерий сильной коммутируемости неограниченных операторов.

Теорема 5. *Пусть T и S – симметрические операторы в гильбертовом пространстве H, и пусть $\mathfrak{D}$ – плотное линейное подпространство в H, такое, что*

$$\mathfrak{D} \subset D(T) \cap D(S) \cap D(T^2) \cap D(TS) \cap D(ST) \cap D(S^2),$$

и такое, что

$$TS\xi = ST\xi \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathfrak{D}.$$

Если ограничение оператора $T^2 + S^2$ на $\mathfrak{D}$ существенно самосопряженно, то

1) Операторы T и S существенно самосопряженные;

2) Операторы $\overline{T}$ и $\overline{S}$ сильно коммутируют.

3. Сильная коммутируемость операторов из $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$

Рассмотрим два измеримых оператора $T, S \in LS(\mathcal{M})$.

Предложение 13. *Множество*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST)$$

является локально измеримым относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Доказательство. Так как

$$\mathfrak{D}(TS) = \{\xi \in \mathfrak{D}(S) : \quad S\xi \in \mathfrak{D}(T)\} = \mathfrak{D}(S) \cap S^{-1}(\mathfrak{D}(T)),$$

$$\mathfrak{D}(ST) = \{\xi \in \mathfrak{D}(T) : \quad T\xi \in \mathfrak{D}(S)\} = \mathfrak{D}(T) \cap T^{-1}(\mathfrak{D}(S)),$$

операторы T и S локально измеримы, поэтому они замкнуты и их области определения $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{D}(S)$ локально измеримы. Следовательно, локально измеримы множества

$$T^{-1}(\mathfrak{D}(S)) \quad \text{и} \quad S^{-1}(\mathfrak{D}(T)),$$

а потому, сильно плотны

$$\mathfrak{D}(S) \cap S^{-1}(\mathfrak{D}(T)) = \mathfrak{D}(TS) \quad \text{и} \quad \mathfrak{D}(T) \cap T^{-1}(\mathfrak{D}(S)) = \mathfrak{D}(ST).$$

Значит, локально измеримо

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST).$$

□

Замечание 7. Если $T, S \in LS(\mathcal{M})$ и операторы TS и ST совпадают на любом локально измеримом подпространстве $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$, то в алгебре $LS(\mathcal{M})$

$$T \cdot S = S \cdot T.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Для того, чтобы два самосопряженных линейных оператора T и S из $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ коммутировали как элементы алгебры, необходимо и достаточно, чтобы они сильно коммутировали.*

Доказательство. Пусть T и S — два коммутирующих в $*$-алгебре $LS(\mathcal{M})$ самосопряженных линейных оператора.

В силу предложения 13 и замечания 1, множество

$$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{D}(T^2) \cap \mathfrak{D}(TS) \cap \mathfrak{D}(ST) \cap \mathfrak{D}(S^2)$$

локально измеримо относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, и потому, плотно в H.

Пусть $\mathfrak{D}$ определено последовательностями проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, то есть,

$$P_n \uparrow I, Z_n \uparrow I, \quad P_n(H) \subset \mathfrak{D}$$

и проекторы $Z_n P_n^{\perp}$ конечны.

Тогда оператор $T^2 + S^2$, как оператор из $LS(\mathcal{M})$, совпадает с замыканием сужения $T^2{+}S^2$ на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$, (см.[12]), а следовательно, совпадает с замыканием сужения $T^2 + S^2$ на $\mathfrak{D}$.

Кроме того, по нашему предположению,

$$TS\xi = ST\xi$$

для любого $\xi \in \mathfrak{D}$.

Следовательно, в силу критерия сильной коммутируемости, операторы T и S сильно коммутируют.

Обратно, пусть самосопряженные локально измеримые операторы T и S сильно коммутируют, и $\{E_T(\Delta)\}$ и $\{E_S(\Delta')\}$ спектральные семейства проекторов этих операторов. Рассмотрим последовательности центральных проекторов $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ и $\{Z''_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ такие, что $Z'_n \uparrow I$, $Z''_n \uparrow I$ и проекторы $Z'_n E_T^{\perp}([-n,n])$ и $Z''_n E_S^{\perp}([-n,n])$ конечны для любого $n = 1, 2, \ldots$.

Обозначим

$$P_n = E_T([-n,n]) E_S([-n,n]), \quad n = 1, 2, \ldots$$

и $Z_n = Z'_n Z''_n$. Тогда

$$P_n \uparrow I, Z_n \uparrow I, \quad P_n(H) \subset \mathfrak{D}(TS) \bigcap \mathfrak{D}(ST)$$

и проекторы $Z_n P_n^{\perp}$ конечны. Следовательно, множество

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_T([-n,n])E_S([-n,n])(H)$$

локально измеримо относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и инвариантно относительно каждого из операторов T и S.

Кроме того, для любого $\xi \in \mathfrak{D}$ существует такой номер n_0, что

$$\xi \in E_T([-n_0,n_0])E_S([-n_0,n_0])(H).$$

Поэтому

$$TS\xi = TSE_T([-n_0,n_0])E_S([-n_0,n_0])\xi =$$
$$= (E_T([-n_0,n_0])TE_T([-n_0,n_0]))(E_S([-n_0,n_0])SE_S([-n_0,n_0]))\xi =$$
$$= (E_S([-n_0,n_0])SE_S([-n_0,n_0]))(E_T([-n_0,n_0])TE_T([-n_0,n_0]))\xi =$$
$$= STE_T([-n_0,n_0])E_S([-n_0,n_0])\xi = ST\xi.$$

Следовательно, операторы TS и ST совпадают на локально измеримом подмножестве $\mathfrak{D}$. Поэтому,

$$T \cdot S = S \cdot T.$$

□

Список цитируемых источников

1. *Dixon P. G.* Unbounded operator algebras // Proc. London Math. Soc. — 1973. — vol. 23, —**№ 3.** — P. 53–59.
2. *Nelson E.* Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal. — 1974. —**№ 15**. — P. 103–116.
3. *Segal Irving E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. — 1953. — **57**. — P. 401–457.
4. *Stinespring W. E.* Integration theorems for gages and duality for unimodular groups // Tranc. Amer. Math. Soc. — 1959. — **№ 90**. — P. 15–56.
5. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras.- England Abacus Press. — 1975. — 478 p.
6. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I. — New York: Springer, 1979. — 415 p.
7. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1974. — **№ 74**. — P. 257–268.
8. *Барут А., Рончка Р.* Теория представления групп и ее приложения. Том1. — Москва: Мир, 1980. — 455 с.
9. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Описание GB^* - алгебр, ограниченная часть которых есть W^* алгебра // Узбекский математический журнал. — 1991. — **№ 2**. — С. 24–29.

10. *Муратов М.А., Чилин И.И.* $*$ - Алгебры неограниченных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XIII. Записки научных семинаров ПОМИ. — Санкт-Петербург: 2005. — С. 183–197.
11. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Сходимости в $*$-алгебрах локально измеримых операторов. // Таврический вестник информатики и математики. — 2004, — **№ 2**, — С. 81–100.
12. *Муратов М. А.* К вопросу о коммутируемости локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. // Ученые записки Таврического Национального Университета, 2006, — Т.19(58), —**№ 2**, — С. 52–62.
13. *Муратов М. А., Самойленко Ю. С.* О коммутируемости измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. // Ученые записки Таврического Национального Университета, 2007, — Т.20(59), —**№ 1**, — С. 70–79.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Том1. Функциональный анализ. — Москва: Мир, 1977. — 357 с.
15. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1984. — 232 с.
16. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Д., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры. — Ташкент: ФАН, 1983. — 303 с.

Получена 03.11.2007