Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 89–102

УДК 519.8

Временные аномалии в задачах составления расписаний

В. А. Турчина, Н. К. Федоренко

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: ginasun@rambler.ru*

Аннотация. В статье приведен обзор некоторых работ, касающихся возникновения временных аномалий в задачах составления расписаний. Проводится анализ полученных результатов. Предлагаются дальнейшие пути исследования данного вопроса. В работе предложены необходимые условия возникновения различных типов временных аномалий при построении обобщенных параллельных упорядочений для определенных классов графов.

Ключевые слова: параллельное упорядочение вершин орграфов, теория расписаний, аномалия.

1. Введение

В последнее время особенно актуальными становятся прикладные задачи, которые сводятся к построению расписания для некоторого множества частично упорядоченных работ. Это, например, задачи распараллеливания вычислений, задачи распределения заданий между работниками и т. п. Эти задачи являются интересными как с практической точки зрения, так и с теоретической, как оптимизационные задачи на графах. Примечательно, что работа, положившая начало исследованию подобных задач, носила название «Задачи упорядочения и проблемы линии сборки» [1], что указывает на их практическую направленность.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу построения параллельного упорядочения в общем случае. Введем дополнительные определения.

Определение 1. Обобщенным линейным упорядочением S элементов множества $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, которым поставлены в соответствие веса $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots \ldots, \tau_n\}$, называется такое расположение этих элементов по $\sum_{i=1}^{n} \tau_i$ местам, которые расположены в линейном порядке, при котором каждый элемент v_i стоит только на τ_i последовательных местах ($v_i \in S[k], k = \overline{p, p+\tau_i-1}$, где $1 \le p \le \sum_{j=1}^{n} \tau_j - \tau_i + 1$, а $S[i]$ множество вершин, которые стоят в упорядочении S на i-ом месте).

Некоторые места в упорядочении могут быть пустыми, но при этом в расположении элементов одного вида не может быть пропусков.

Определение 2. Обобщенным параллельным упорядочением вершин орграфа $G = \{V, U\}$, которым поставлены в соответствие веса $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots \ldots, \tau_n\}$, называется такое обобщенное линейное упорядочение S элементов множества V, при котором из того, что из вершины v_i идет дуга в вершину v_j, то есть $(v_i, v_j) \in U$, следует, что вершина v_i находится в упорядочении S левее чем вершина v_j. То есть если $(v_i, v_j) \in U$, $v_i \in S[k], k = \overline{p, p + \tau_i - 1}$, и $v_j \in S[m], m = \overline{q, q + \tau_j - 1}$, то $p + \tau_i - 1 < q$.

Определение 3. Шириной упорядочения S называется величина $h(S) = \max_{1 \le i \le n} |S[i]|$.

Определение 4. Длиной упорядочения S называется величина $l(S)$ равная количеству непустых мест в упорядочении.

Постановка задачи $S(G, h, l)$ в общем случае

Для заданного орграфа $G = \{V, U\}$, вершинам которого поставлены в соответствие веса $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ и заданной ширины упорядочения $h(S)$ построить обобщенное параллельное упорядочение минимальной длины.

Как показали Гэрри и Джонсон [2] даже в случае, когда $\tau_i = 1, i = \overline{i, n}$ данная задача является NP-трудной, так как она сводится к задаче о 3-выполнимости.

3. Анализ исследований и публикаций

В 1969 году Р. Л. Грэхем в [3] описывает решение данной задачи при условии наличия списка приоритетов. Список приоритетов определяет желаемый порядок добавления вершин в строящееся обобщенное параллельное упорядочение и, вследствие этого, исчезает необходимость перебора при построении оптимального решения. В этом случае задача решается по следующему алгоритму: на очередное свободное место в строящемся обобщенном параллельном упорядочении размещается вершина v_i , которая не имеет входящих дуг в орграфе и в списке приоритетов расположена как можно раньше, после этого данная вершина удаляется из списка приоритетов, а после заполнения τ_i мест в строящемся упорядочении, она удаляется и из орграфа.

Однако в таком случае возникает интересный феномен, который Р. Л. Грэхем назвал «временные аномалии». Под временной аномалией подразумевается увеличение длины оптимального параллельного упорядочения вследствие изменений, которые теоретически должны были бы уменьшить эту длину или, как минимум, оставить ее неизменной. Р. Л. Грэхем выделяет четыре типа временных аномалий, а именно: 1) аномалии изменения списка приоритетов; 2) аномалии ослабления отношения предшествования (аномалии удаления ребер); 3) аномалии уменьшения времен выполнения заданий (аномалии уменьшения весов вершин); 4) аномалии увеличения числа процессоров (аномалии увеличения ширины упорядочения).

В статье приведены примеры всех этих временных аномалий, а так же оценка увеличения длины обобщенного параллельного упорядочения в случае увеличения его ширины, которая позволяет оценить наихудшее изменение в случае возникновения временной аномалии.

Примеры временных аномалий [3].

Дано:

- орграф $G = \{V, U\}$ (рис. 1);
- вершинам орграфа приписаны веса ($\tau_1 = 3, \tau_2 = 2, \tau_3 = 2, \tau_4 = 2, \tau_5 = 4, \tau_6 = 4, \tau_7 = 4, \tau_8 = 4, \tau_9 = 9$);
- список приоритетов $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $h(S) = 3$.

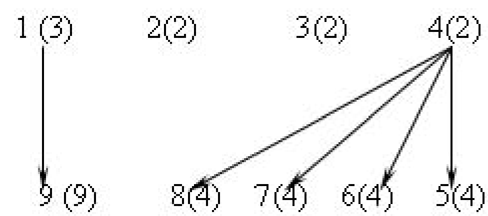

Рис. 1.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 12$ и следующий вид:

1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9
2	2	4	4	5	5	5	5	7	7	7	7
3	3			6	6	6	6	8	8	8	8

1. Аномалия изменения списка приоритетов.

Рассмотрим новый список приоритетов $L' = \{1, 2, 4, 5, 6, 3, 9, 7, 8\}$, оставив все остальные параметры задачи неизменными. Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 14$ и следующий вид:

1	1	1	3	3	9	9	9	9	9	9	9	9	9
2	2	5	5	5	5	7	7	7	7				
4	4	6	6	6	6	8	8	8	8				

2. Аномалия удаления ребер.

Удалим из орграфа G два ребра $(4, 5)$ и $(4, 6)$, оставив все остальные параметры задачи неизменными.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 16$ и следующий вид:

1	1	1	6	6	6	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9
2	2	4	4	7	7	7	7								
3	3	5	5	5	5	8	8	8	8						

3. Аномалия уменьшения весов вершин.

Уменьшим веса всех вершин на 1, то есть, имеем: $(\tau_1 = 2, \tau_2 = 1, \tau_3 = 1, \tau_4 = 1, \tau_5 = 3, \tau_6 = 3, \tau_7 = 3, \tau_8 = 3, \tau_9 = 8)$. Оставим все остальные параметры задачи неизменными.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 13$ и следующий вид:

1	1	5	5	5	8	8	8					
2	4	6	6	6	9	9	9	9	9	9	9	9
3		7	7	7								

4. Аномалия увеличения ширины упорядочения. Положим $h(S) = 4$, оставив все остальные параметры задачи неизменными.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 15$ и следующий вид:

1	1	1	8	8	8	8								
2	2	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3	3	6	6	6	6									
4	4	7	7	7	7									

В связи с активным использованием вычислительной техники при решении задач большой размерностиособенно актуальным становится распараллеливание алгоритмов. У этих задач есть своя специфика. Так, например, в них отсутствует явно заданный список приоритетов, вместо него используется так называемый WCET-анализ, позволяющий на основании оценки длины оптимального параллельного упорядочения в наихудшем случае (при максимальных весах всех вершин) определить порядок добавления этих вершин в строящееся параллельное упорядочение.

Однако в 1999 году Люндквист и Штейнстром в своей работе [4] показали, что исходный посыл WCET-анализа о том, что наибольшая длина параллельного упорядочения наблюдается в случае наибольших весов всех вершин, является ошибочным. И увеличение веса вершины может привести к уменьшению длины расписания. Таким образом, они акцентировали внимание на 3-м типе аномалий, рассмотренных Грэхемом. В своей работе Люндквист и Штейнстром дают следующее определение временной аномалии:

Определение 5. Пусть вес вершины был увеличен на t (уменьшен на d), а C — вызванное этим изменение длины оптимального обобщенного параллельного упорядочения. Тогда: временная аномалия — это ситуация когда, в первом случае $C > t$ или $C < 0$ ($C < -d$ или $C > 0$).

Особенно интересно, что, в отличие от Грэхема, Люндквист и Штейнстром считают аномальной не только ситуацию увеличения длины параллельного упорядочения, но и неоправданно большое ее уменьшение. В работе приведены примеры обеих этих аномалий, в случае когда, например, изменение длины той или иной операции обусловлено удачным или неудачным обращением к кэш-памяти.

Они предлагают также необходимое условие, при выполнении которого аномалии не возникают. Это условие заключается в следующем: если процессор содержит только ресурсы со строго определенным порядком, то есть такие, которые могут использоваться заданиями только в определенной последовательности, то аномалии не могут возникнуть.

Иными словами, на языке теории графов, данное условие означает, что аномалии не могут возникнуть, если в задаче определенным образом заданы ограничения на расположение вершин по некоторым местам в строящемся обобщенном параллельном упорядочении. То есть, в отличие от классической постановки задачи, для нас важен не только порядок расположения вершин в упорядочении по горизонтали, но так же их расположение по вертикали.

Но уже в 2005 году И. Вензель, Р. Кирнер и другие в своей статье [5] показали, что данное условие является слишком слабым. И, даже в случае его выполнения, в строящемся параллельном упорядочении могут наблюдаться аномалии. В своей работе они рассматривают процессоры с суперскалярной архитектурой, то есть архитектурой, состоящей из нескольких конвейеров, на которых несколько команд могут выполняться одновременно, и, таким образом, полностью соответствующей классической постановке задач параллельного упорядочения. Они предлагают использовать в качестве необходимого условия возникновения временных аномалий возможность принятия так называемого «решения по распределению ресурсов». То есть, наличие такой вершины, изменение веса которой может привести к другому распределению следующих за ней вершин в строящемся обобщенном параллельном упорядочении. Однако основное внимание в работе уделяется именно изучению возможности самого процессора динамически распределять инструкции. Отсюда исследователи делают вывод, что если порядок выполнения инструкций задается заранее, то аномалии не могут наблюдаться.

Одновременно с поиском необходимых и достаточных условий возникновения аномалий в общем случае, вопрос о существовании которых до сих пор остается открытым, ведется активная работа по поиску способов избежать влияния аномалий на выполнение заданий на процессорах. Так, в 2001 году Б. Андерсон и

Ж. Джонсон в своей работе [6] рассматривают случаи возникновения аномалий при построении параллельных упорядочений для периодических заданий. То есть, каждая вершина v_i в строящемся обобщенном параллельном упорядочении встречается несколько раз в группах по τ_i мест. Между группами может быть интервал, называемый периодом. Заметим, что каждая вершина может иметь свой период, однако отношение предшествования между ними должно сохраняться на каждой итерации. Это делает такую задачу особенно сложной. В своей работе Б. Андерсон и Ж. Джонсон предлагают четыре способа избежать влияния временных аномалий:

- использовать систему, которая не допускает появления аномалий;
- использовать алгоритм, позволяющий автоматически определить, что возникает аномалия и исправить ее;
- использовать только такие орграфы, на которых не возникает аномалий;
- использовать алгоритм, который вообще не допускает появления аномалий.

В 2003 году Б. Андерсон в своей диссертации [7] в главе «Anomalies» предлагает приближенный алгоритм построения обобщенного параллельного упорядочения, который не допускает появления аномалий. Точность этого алгоритма не хуже других известных алгоритмов построения параллельных упорядочений для задачи с периодическими заданиями.

В 2006 году Дж. Айзингер, И. Полиан и Б. Бекер в [8] так же рассматривают проблему прогнозирования и предотвращения возникновения временных аномалий. Они разделяют задачу на две подзадачи:

- определение потенциальной возможности появления временной аномалии в связи с архитектурой определенного микропроцессора;
- определение потенциальной возможности появления временной аномалии для конкретного фрагмента кода, операции которого распараллеливаются, в связи с данной архитектурой микропроцессора.

Таким образом, в своей работе они исходят из предположения о том, что аномалии, как таковые, являются неотъемлемой частью архитектуры некоторых микропроцессоров. Они предлагают способ автоматического определения возможности возникновения временной аномалии для данной части кода в связи с реализацией ее на некотором микропроцессоре.

Обобщением целой серии работ, опубликованных в 1999-2006 годах, стала работа Я. Рейнике, Б. Вотчер и других [9], опубликованная в 2006 году. В своей работе они дают формальное определение временной аномалии и проводят классификацию временных аномалий, разделяя их на такие классы:

- аномалии составления расписания (классические аномалии построения параллельного упорядочения);

- аномалии спекуляций (аномалии, в которых не просто меняется общее время выполнения, а и весь набор заданий может меняться в зависимости от изменения длины некоторого «ключевого» задания);

- аномалии кэш-памяти (аномалии непосредственно связанные с особенностями архитектуры кэш-памяти в том или ином случае).

Как мы видим, в большинстве работ, существующих на данный момент, больше всего внимания уделяется аномалиям изменения времен выполнения задания (изменения весов вершин). Причем наибольший упор делается на исследование технической стороны вопроса, то есть на исследование непосредственно архитектуры процессора, вызывающей временные аномалии. Однако, следует отметить, что в большинстве задач построения параллельного упорядочения, имеющих практическое применение, могут присутствовать все 4 типа аномалий, выделенных Грэхемом. Так, например, Дж. Колота, Дж. Смиковски и С. Стефан в своей статье [10] 2007 года изучают возникновение временных аномалий в случае распараллеливания вычислений для электромагнитной системы. Они рассматривают примеры возникновения всех типов временных аномалий в реальной системе. Ими разработана система для определения возможных временных аномалий для конкретной модели, а, следовательно, возможность определения нецелесообразности изменения текущих параметров системы.

Одним из наименее исследованных вопросов на данный момент остается поиск необходимых и достаточных условий возникновения временных аномалий. Причем наибольший интерес представляет исследование этой проблемы именно с точки зрения теории. То есть, интерес представляет именно возможность прогнозирования возникновение аномалий в зависимости от постановки задачи (вида орграфа, весов вершин, списка приоритетов). Это позволило бы использовать данные условия во многих областях, как, например, при решении задач организации производственных процессов (распределение заданий между работниками), так и при распараллеливании вычислений на нескольких процессорах, а так же при распараллеливании алгоритмов на одном процессоре.

4. Необходимые условия возникновения аномалий

Нами предложены условия, которые позволяют выделять классы графов, на которых наиболее вероятно возникновение аномалий каждого вида. Пусть задан орграф $G = \{V, U\}(|V| = n)$, вершинам которого приписаны веса $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, исходный список приоритетов L, исходная ширина параллельного упорядочения h, для которых построено исходное параллельное упорядочение S.

Введем следующие обозначения:

- $L[v_i]$ — номер места вершины v_i в списке приоритетов L.

- $t_b[v_i]$ — номер первого места, которое занимает вершина v_i в исходном обобщенном параллельном упорядочении S.
- $t_e[v_i]$ — номер последнего места, которое занимает вершина v_i в исходном обобщенном параллельном упорядочении S ($t_e[v_i] = t_b[v_i] + \tau_i - 1$).

Утверждение 1 (аномалия изменения списка приоритетов). *При замене списка приоритетов L на список приоритетов L', длина обобщенного параллельного упорядочения может увеличиться, если в данном орграфе G существует множество вершин $R = \{v_r : n - h < L[v_r] \leq n\}$ такое, что $\exists v_i, v_j \in R$, для которых выполняются следующие условия:*

- $t_e[v_i] = t_e[v_j] = l(S)$;
- $\tau_i < \tau_j$;
- $L[v_i] > L[v_j], L'[v_i] < L'[v_j]$.

То есть, данная аномалия может возникнуть, если поменять местами в списке приоритетов две вершины, которые в исходном обобщенном параллельном упорядочении занимают последние места, так, чтобы вершина, имеющая меньший вес, стала более приоритетной.

Пример 1. Даны:

- орграф $G = \{V, U\}$ (рис. 2);
- вершинам орграфа приписаны веса ($\tau_1 = 6, \tau_2 = 5, \tau_3 = 4, \tau_4 = 6, \tau_5 = 3, \tau_6 = 3, \tau_7 = 7, \tau_8 = 4, \tau_9 = 3$);
- список приоритетов $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $h(S) = 3$.

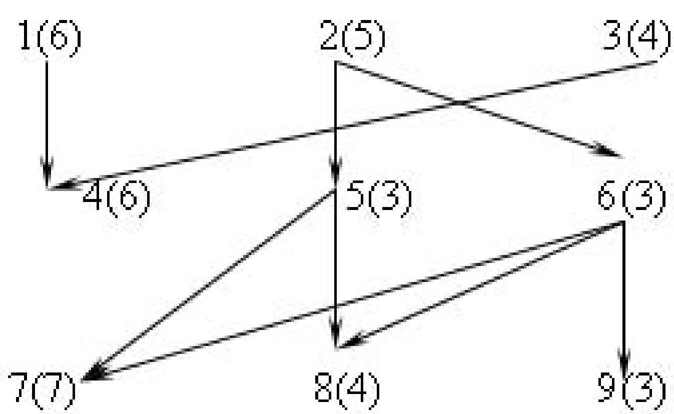

Рис. 2.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 15$ и следующий вид:

1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4	9	9	9
2	2	2	2	2	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7
3	3	3	3		6	6	6	8	8	8	8			

Рассмотрим $L' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 8, 7\}$. Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 18$ и следующий вид:

1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4						
2	2	2	2	2	5	5	5	9	9	9	7	7	7	7	7	7	7
3	3	3	3		6	6	6	8	8	8	8						

Утверждение 2 (аномалия удаления дуг)**.** *При удалении всех дуг к вершине v_k, длина обобщенного параллельного упорядочения может увеличиться, если в данном орграфе G существует вершина v_i такая, что выполняются следующие условия:*

- $L[v_k] < L[v_i]$;
- $t_b[v_i] < t_b[v_k]$;
- $|S[t_b[v_i]]| = h$ *и* $\forall v_m(m \neq i) : t_b[v_i] = t_b[v_m] \to L[v_m] < L[v_i]$;
- $\exists v_r : (v_i, v_r) \in U, r \neq k$;
- $\neg \exists v_s : (v_k, v_r) \in U$.

То есть, данная аномалия может возникнуть, если удаляются дуги к вершине, не имеющей исходящих дуг, которая является более приоритетной, чем вершина, имеющая исходящие дуги, и, таким образом, смещает эту вершину.

Заметим, что данная аномалия может наблюдаться и в случае удаления не всех дуг к вершине v_k, при условии, что все ее вершины-предшественницы, дуги из которых не будут удалены, удовлетворяют условию: $t_e[v_j] < t_b[v_i]$.

Пример 2. Даны:

- орграф $G = \{V, U\}$ (рис. 3);
- вершинам орграфа приписаны веса ($\tau_1 = 6, \tau_2 = 2, \tau_3 = 2, \tau_4 = 2, \tau_5 = 5, \tau_6 = 4, \tau_7 = 2, \tau_8 = 3, \tau_9 = 5, \tau_{10} = 2$);
- список приоритетов $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

- $h(S) = 3$.

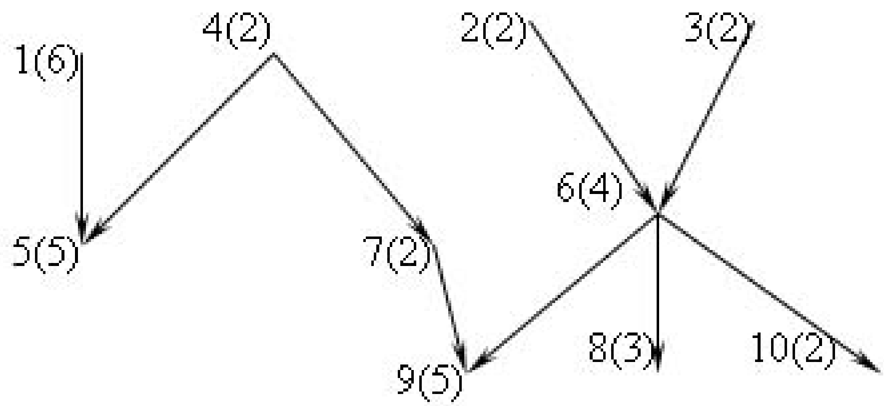

Рис. 3.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 11$ и следующий вид:

1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	5
2	2	4	4	7	7	8	8	8	10	10
3	3	6	6	6	6	9	9	9	9	9

Удалим из графа ребра $(1, 5)$ и $(4, 5)$, чтобы освободить более приоритетную вершину 5. Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение будет иметь длину $l(S) = 13$ и следующий вид:

1	1	1	1	1	1	7	7	9	9	9	9	9
2	2	4	4	6	6	6	6	8	8	8		
3	3	5	5	5	5	5		10	10			

Утверждение 3 (аномалия уменьшения весов вершин). *При уменьшении весов всех вершин на 1, длина обобщенного параллельного упорядочения может увеличиться, если в данном орграфе G существуют вершины v_i и v_k такие, что:*

- $t_e[v_k] = t_e[v_i] + 1$;
- $t_b[v_k] \neq 1$ *и* $t_b[v_k] > t_b[v_i]$;
- $\exists v_j : 1) \forall s : L[v_j] > L[v_s]; \quad 2) t_b[v_j] = t_e[v_i] + 1$;
- $\exists v_t : (v_k, v_t) \in U$ *и* $\forall s \neq k : (v_s, v_t) \notin U$;

- $\neg\exists v_s : t_e[v_s] = t_e[v_i]$.

То есть, аномалия может возникнуть, если за счет уменьшения весов вершин, вершина с меньшим приоритетом, выполнявшаяся раньше остальных, вытесняется более приоритетными вершинами.

Пример 3. Даны:

- орграф $G = \{V, U\}$ (рис. 4);
- вершинам орграфа приписаны веса ($\tau_1 = 5, \tau_2 = 3, \tau_3 = 3, \tau_4 = 3, \tau_5 = 3, \tau_6 = 3, \tau_7 = 3, \tau_8 = 3, \tau_9 = 4, \tau_{10} = 4, \tau_{11} = 2, \tau_{12} = 3, \tau_{13} = 9$);
- список приоритетов $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$;
- $h(S) = 3$.

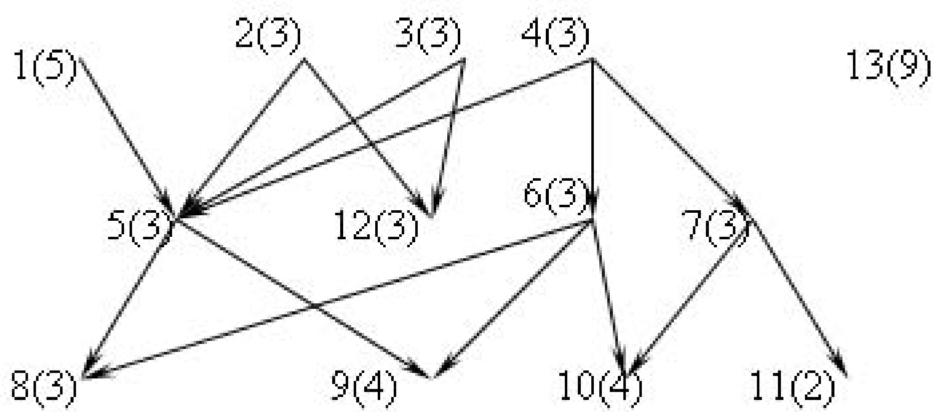

Рис. 4.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 16$ и следующий вид:

1	1	1	1	1	13	13	13	13	13	13	13	13	13	11	11
2	2	2	4	4	4	5	5	5	7	7	7	9	9	9	9
3	3	3	12	12	12	6	6	6	8	8	8	10	10	10	10

Уменьшим веса всех вершин на 1. Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение будет иметь длину $l(S) = 17$ и следующий вид:

1	1	1	1	5	5	8	8	11	13	13	13	13	13	13	13	13
2	2	4	4	6	6	9	9	9								
3	3	12	12	7	7	10	10	10								

Утверждение 4 (аномалия увеличения ширины параллельного упорядочения). *При увеличении ширины обобщенного параллельного упорядочения на 1 ($h' = h + 1$), длина обобщенного параллельного упорядочения может увеличиться, если в данном орграфе G существует вершина v_i, для которой выполняются следующие условия:*

- $\neg\exists v_j : (v_j, v_i) \in U$;
- $t_b[v_i] \neq 1$;
- $\forall v_k(\neg\exists v_j : (v_j, v_k) \in U)$ *и* $t_b[v_k] \neq 1) : L[v_i] < L[v_k]$;
- *существует не менее $h+1$ вершин, имеющих предшественниками задание v_i и задания из множества $\widetilde{V} = \{v_k : t_b[v_k] = 1$ и $\tau_i \geq \tau_k\}$.*

То есть, аномалия может возникнуть, если вершина, которая имеет высокий приоритет и, следовательно, займет первые места при увеличении ширины упорядочения, имеет не менее $h+1$ последователей, которые могут вытеснить менее приоритетные вершины и таким образом увеличить ширину упорядочения.

Пример 4. Даны:

- орграф $G = \{V, U\}$ (рис. 5);
- вершинам орграфа приписаны веса ($\tau_1 = 3, \tau_2 = 2, \tau_3 = 2, \tau_4 = 2, \tau_5 = 3, \tau_6 = 4, \tau_7 = 4, \tau_8 = 3, \tau_9 = 4, \tau_{10} = 8, \tau_{11} = 4, \tau_{12} = 4, \tau_{13} = 2$);
- список приоритетов $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$;
- $h(S) = 3$.

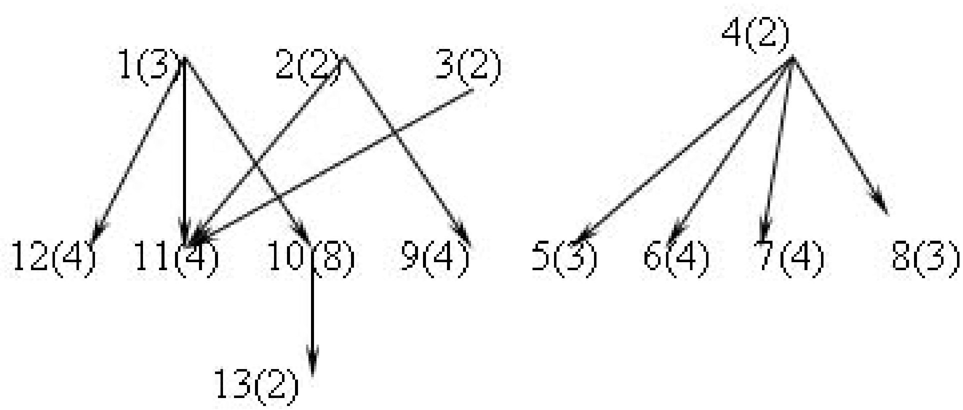

Рис. 5.

Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение имеет длину $l(S) = 15$ и следующий вид:

1	1	1	10	10	10	10	10	10	10	10	12	12	12	12
2	2	4	4	5	5	5	7	7	7	7	11	11	11	11
3	3	9	9	9	9	6	6	6	6	8	8	8	13	13

Увеличим ширину строящегося упорядочения на 1. Оптимальное обобщенное параллельное упорядочение будет иметь длину $l(S) = 16$ и следующий вид:

1	1	1	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10	13	13
2	2	5	5	5	9	9	9	9							
3	3	6	6	6	6	11	11	11	11						
4	4	7	7	7	7	12	12	12	12						

Заметим, что особый интерес для исследования представляет выделение классов графов, на которых наблюдается более одного типа аномалий, и поиск условий возникновения всех четырех типов аномалий. Примером такого условия может быть следующее сформулированное нами условие.

Утверждение 5 (все 4 вида аномалий). *Длина параллельного упорядочения для данного орграфа может увеличиться при изменении списка приоритетов, при удалении дуг, при уменьшении времен выполнения заданий и при увеличении ширины паралельного упорядочения, если в данном орграфе G существует вершина v_i, для которой выполняются следующие условия:*

- $\forall v_k : L[v_i] > L[v_k]$;
- *существует не менее h вершин, таких что:* $t_b[v_j] < t_b[v_i]$;
- $t_e[v_i] = l(S)$.

То есть аномалии могут возникнуть, если в графе существует наиболее низкоприоритетное задание, которое выполняется раньше h более приоритетных заданий и имеет длину большую, чем они. Примером такого графа может служить граф, предложенный Р. Л. Грэхемом.

Следует отметить, что сформулированные выше условия являются необходимыми для соответствующих класса орграфов.

5. Выводы

Проблема возникновения временных аномалий при решении задач параллельного упорядочения на данный момент все еще остается достаточно малоизученной. Однако поиск способов выявления и прогнозирования таких аномалий сейчас является особенно актуальным. В статье сформулированы необходимые условия возникновения различных временных аномалий (аномалия измения списка приоритетов, аномалия ослабления отношений предшестования, аномалия уменьшения весов вершин, аномалия увеличения ширины упорядочения). Интерес для дальнейших исследований представляет поиск таких необходимых условий, а так же выделение классов графов, для которых эти условия будут так же и достаточными.

Список цитируемых источников

1. *Hu T.* Parallel sequencing and assembly line problems. //Operation research. — 1961. — T.9, №6 — C. 61-68.
2. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 411 с.
3. *Graham R. L.* Bounds on multiprocessing timing anomalies. //SIAM Journal on Applied Mathematics. —1969. — T. 17, №2. — C. 416-429.
4. *Lundqvist T., Stenström P.*Timing anomalies in dynamically scheduled microprocessors. // In RTSS '99: Proceedings of the 20th IEEE Real-Time Systems Symposium. — 1999. — C.12-21.
5. *Wenzel I., Kirner R., Puschner P., Rieder B.* Principles of timing anomalies in superscalar processors. // In Proc. 5th International Conference on Quality Software. — 2005. — C. 295-303.
6. *Andersson B., Jonsson J.* Preemptive Multiprocessor Scheduling Anomalies. // In Proc. of the International Parallel and Distributed Processing Symposium. —2002. — C. 12–19.
7. *Andersson B.* Static-priority scheduling on multiprocessors. PhD thesis. —2003. — http://www.ce.chalmers.se/~ba/phd_thesis/thesisA4.pdf .
8. *Eisinger J., Polian I., Becker B.* Automatic Identification of Timing Anomalies for Cycle-Accurate Worst-Case Execution Time Analysis. // Design and Diagnostics of Electronic Circuits and systems. —2006. — C. 13–18.
9. *J. Reineke1, B. Wachter, S. Thesing and others.* A Definition and Classification of Timing Anomalies. —2006. — http://moss.csc.ncsu.edu/~mueller/wcet06/accepted/5_paper.pdf.
10. *Kołota J., Smykowski J., S. Stкpiec S.* Graham's anomalies in case of parallel computation electromagnetic phenomena. // International Journal of Communications. —2007. — T. 1, №2. — C. 17–21.

Получена 14.11.2009