Динамические системы, вып. 27 (2009), 81–92

УДК 517.5

Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена

О.Г. Ровенская

Славянский государственный педагогический университет,
Славянск 84116. *E-mail: sgpi@slav.dn.ua*

Аннотация. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторным методом суммирования Валле Пуссена, взятых по классам аналитических периодических функций действительной переменной. Полученные формулы во многих важных случаях обеспечивают решение задачи Колмогорова-Никольского для этих методов приближения и классов аналитических функций. Указаны условия при которых повторные суммы Валле Пуссена обеспечивают порядок приближения лучший, чем обычные.

Ключевые слова: метод Валле Пуссена, ряд Фурье, асимптотическая формула.

1. Введение

Следуя А.И. Степанцу, обозначим $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$ — классы непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

где

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \qquad q \in (0;1),\ \beta \in R$$

— ядро Пуассона, а функция $\varphi(\cdot)$ такова, что

$$\operatorname{esssup} |\varphi(\cdot)| \le 1 \ \text{ или } \ |\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in R,$$

с произвольным фиксированным модулем непрерывности $\omega(t)$.

Известно (см., например, [6, с. 31]), что классы $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f, являющихся сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье. Тогда суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ (см. [6, с. 47], [11]) задаются соотношением

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Пусть p_1, p_2 — произвольные натуральные числа такие, что $p_1 + p_2 < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V_{n,p_1,p_2}(f,x) = V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f,x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x), \tag{1}$$

которые будем называть повторными суммами Валле Пуссена [2].

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю. В 1946 году С.М. Никольский [1] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$,

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(\cdot) - S_n(f;\cdot)||_C$$

имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n}, \;\; q = e^{-\alpha},$$

где

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. В 1980 году С.Б. Стечкин [10] уточнил остаточный член в этой формуле, показав, что он равен $O(1)\frac{q^{n+1}}{(1-q)n}$.

Аналогичная задача для классов $C^q_\beta H_\omega$ была решена в 2001 году А.И. Степанцом. В работе [7] было показано, что при $n \to \infty$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2} K(q) \theta_n(\omega) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \; dt + \frac{O(1) q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n),$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

В работе [3] (см. также [9, с. 218]) для верхних граней отклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), 1<p<n,$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \qquad (2)$$

А.С. Сердюком [4] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (2):

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}dt, \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p=1, \\ 3, & p=2,3,\ldots. \end{cases}$$

2. Основной результат

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $n\to\infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V^{(2)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} |f(x) - V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)|.$$

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $q\in(0;1)$, $\beta\in R$ и $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности, $p_1+p_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \Sigma_{\overline{p}} < n$. Тогда при $n-p_1-p_2\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V^{(2)}_{n,\overline{p}}\right) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) e_{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}(\omega) +$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}\omega\left((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1}\right)}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^5} + \frac{q^{n-p_1+1}\omega\left((n-p_1)^{-1}\right)}{p_1p_2(1-q)^3} + \frac{q^{n-p_2+1}\omega\left((n-p_2)^{-1}\right)}{p_1p_2(1-q)^3}\right), \qquad (3)$$

где

$$e_{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}(\omega) = \theta_n(\omega)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2\tau(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1})\sin\tau d\tau,$$

$\theta_n(\omega) \in [1/2;1]$, причем $\theta_n(\omega)=1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, p_1, p_2, q, β,

$$\Pi\left(n;k\right)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\left(1-n\sin^2 u\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл третьего рода.

Доказательство. В силу соотношения (1) имеем

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f,x)\overset{\mathrm{df}}{=}f(x)-V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f,x)=\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\rho_m(f,x),$$

где

$$\rho_m(f,x)=f(x)-S_m(f,x).$$

Введем обозначение

$$b^{q,\beta}_m(t)=\frac{1-3q\cos t+3q^2\cos 2t-q^3\cos 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})+$$

$$+\frac{-3q\sin t+3q^2\sin 2t-q^3\sin 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Применяя рассуждения работы [3] (также [2]), получаем

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega;V^{(2)}_{n,\overline{p}})=\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}}{\pi p_1p_2}\sup_{f\in H_\omega}|J_{n,p_1,p_2}(f)|+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p_1+1}}{\pi p_1p_2}\sup_{f\in H_\omega}|J_{n,p_1,0}(f)|+\frac{q^{n-p_2+1}}{\pi p_1p_2}\sup_{f\in H_\omega}|J_{n,0,p_2}(f)|+\frac{q^{n+1}}{\pi p_1p_2}\sup_{f\in H_\omega}|J_{n,0,0}(f)|\right),$$

где

$$J_{n,p_1,p_2}(f)=J_{n,\overline{p}}(f)\overset{\mathrm{df}}{=}\int\limits_0^{2\pi}f(t)Z^3_q(t)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}+1)t+\frac{\beta\pi}{2}+3\xi(t)]dt.$$

$$Z_q(t)=(1-2q\cos t+q^2)^{-1/2},\ \ \xi(t)=\mathrm{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}.$$

Положим

$$\tau=\tilde{y}(t)=t+(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1}(3\xi(t)+2t+\beta\pi/2).$$

Тогда

$$J_{n,p_1,p_2}(f)=\int\limits_0^{2\pi}f(t)Z^3_q(t)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tilde{y}(t)]dt.$$

Обозначим

$$Z_{q,n,\overline{p}}(t)=\left(\frac{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}-\frac{2(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)+1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}q\cos t+\frac{n-\Sigma_{\overline{p}}-2}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}q^2\right)^{-1/2}.$$

Функция $\tilde{y}(t)$ имеет обратную функцию $t=y(\tau)=\tilde{y}^{-1}(\tau)$, $\tau\in R$. Поэтому существует функция

$$y'(\tau)=Z^2_{q,n,\overline{p}}(y(\tau))Z_q^{-2}(y(\tau)).$$

Так как для любых $t\in R$ и $q\in(0;1)$ выполняется $\tilde{y}'(t)>1$, то для любых $\tau\in R$ и $q\in(0;1)$ выполняется

$$0<y'(\tau)<1. \tag{4}$$

Выполним замену переменной в интеграле $J_{n,\overline{p}}(f)$, положив $t=y(\tau)$. Учитывая (4), имеем

$$J_{n,\overline{p}}(f)=\int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)}f(y(\tau))Z_q^3(y(\tau))\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau(t)]d\tau+R^{(1)}_{n,\overline{p}}(f), \tag{5}$$

где

$$R^{(1)}_{n,\overline{p}}(f)=\int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)}f(y(\tau))r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau(t)]d\tau,$$

$$r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)=Z_q(y(\tau))Z^2_{q,n,\overline{p}}(y(\tau))-Z_q^3(y(\tau)).$$

Так как для любых $t\in R$ и $q\in(0;1)$ $Z_q^2(t)>Z^2_{q,n,\overline{p}}(t)$, то для $\tau\in(\tilde{y}(0);\tilde{y}(2\pi))$ выполняется $r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)<0$. Покажем, что $\forall\ f\in H_\omega$ при $n\to\infty$

$$|R^{(1)}_{n,\overline{p}}(f)|=O(1)\omega\left((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1}\right)(1-q)^{-5}(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1}, \tag{6}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по всем параметрам.

Изучим нули функции $\varphi(t)=r^{(1)}_{n,\overline{p}}(t)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)t]$. Функция $r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)$ по абсолютной величине на промежутке $[\tilde{y}(0);\tilde{y}(\pi)]$ строго убывает, а на промежутке $[\tilde{y}(\pi);\tilde{y}(2\pi)]$ строго возрастает. Не нарушая общности, можно считать, что $0\leq\beta<4$. Пусть $x_k=\frac{k\pi}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}$ и $\tau_k=x_k+\frac{\pi}{2(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)}$.

Числа $\alpha_k=\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau]d\tau$ по абсолютной величине убывают и sign $(\alpha_k)=(-1)^k$. Поэтому для $r^{(+)}_{n,\overline{p}}(\tau)=\int_{\tau}^{\tau_{n-\Sigma_{\overline{p}}}}r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau]d\tau$ выполнено: sign $(r^{(+)}_{n,\overline{p}}(\tau_m))=$ sign $(\sum\limits_{k=m}^{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}\alpha_k)=(-1)^m$. Это значит, что на концах каждого отрезка $[\tau_k;\tau_{k+1}]$ функция $r^{(+)}_{n,\overline{p}}(\tau)$ принимает значения, различные по знаку. Поэтому она на каждом промежутке $[\tau_k;\tau_{k+1}]$, $k\in\{2,3,\ldots,n-\Sigma_{\overline{p}}-1\}$

имеет единственный простой нуль $\overline{\tau}_k$. Таким образом, для $k \in \{2, 3, \dots, n - \Sigma_{\overline{p}} - 1\}$ выполняется

$$\int\limits_{\overline{\tau}_k}^{\overline{\tau}_{k+1}} r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau) \cos[(n - \Sigma_{\overline{p}} - 1)\tau] d\tau = 0. \tag{7}$$

Аналогично показываем, что функция

$$r^{(-)}_{n,\overline{p}}(\tau) = \int\limits_{\tau_{n-\Sigma_{\overline{p}}+3}}^{\tau} r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau) \cos(n - \Sigma_{\overline{p}} - 1)\tau d\tau$$

такова, что на каждом промежутке $[\tau_k; \tau_{k+1}]$, $k \in \{n - \Sigma_{\overline{p}} + 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\overline{p}}) - 1\}$, имеет единственный простой нуль $\overline{\tau}_k$. Это значит, что для $k \in \{n - \Sigma_{\overline{p}} + 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\overline{p}}) - 1\}$ также имеет место (7), то есть выполнены требования леммы 5.1.3. работы [8, с. 206]. Применяя эту лемму, получаем, что $\forall\ f \in H_\omega$ имеет место оценка (6).

Следующий шаг состоит в дальнейшем упрощении интеграла в соотношении (5). С этой целью определим функцию $l_{n,\overline{p}}(\tau)$, положив

$$l_{n,\overline{p}}(\tau) = \begin{cases} Z_q(y(\tau_k)), & \tau \in [x_k; x_{k+1}], k = 2, 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\overline{p}}), \\ 0, & \tau \in [\tilde{y}(0), x_2] \cup (x_{2(n-\Sigma_{\overline{p}})}, \tilde{y}(2\pi)). \end{cases} \tag{8}$$

Тогда в силу соотношения (5)

$$J_{n,\overline{p}}(f) = \int\limits_{x_2}^{x_{2(n-\Sigma_{\overline{p}}+1)}} f(y(\tau)) l^3_{n,\overline{p}}(\tau) \cos((n - \Sigma_{\overline{p}} - 1)\tau(t)) d\tau + R^{(1)}_{n,\overline{p}}(f) + R^{(2)}_{n,\overline{p}}(f), \tag{9}$$

где

$$R^{(2)}_{n,\overline{p}}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) r^{(2)}_{n,\overline{p}}(\tau) \cos((n - \Sigma_{\overline{p}} - 1)\tau) d\tau, \ \ r^{(2)}_{n,\overline{p}}(\tau) = Z^3_q(y(\tau)) - l^3_{n,\overline{p}}(\tau). \tag{10}$$

Так как

$$\text{sign } \left(\frac{d}{d\tau} Z^3_q(y(\tau)) \right) = -\text{sign } (\sin y(\tau)),$$

то функция $Z^3_q(y(\tau))$ строго убывает на промежутке $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$ и строго возрастает на промежутке $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$. Изучая вторую производную этой функции, заключаем, что она имеет ровно по одной точке перегиба на каждом из промежутков $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$ и $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$.

Это значит, что для функции $g(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} Z^3_q(y(\tau))$ выполнены требования леммы 5.18.2. работы [8, с. 323]. Обозначим через τ^* точку перегиба функции $Z^3_q(y(\tau))$, находящуюся на промежутке $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$. Функция $Z^3_q(y(\tau))$ на промежутке $(\tilde{y}(0); \tau^*)$ выпукла вверх и строго убывает, а на промежутке $(\tau^*; \tilde{y}(\pi))$ выпукла вниз и строго убывает. Пусть числа k_1 и k_2 такие, что точка x_{k_1} есть ближайшая слева, а x_{k_2} – ближайшая справа от точки τ^* и пусть

$$\alpha_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau d\tau.$$

Учитывая свойства функции $Z_q^3(y(\tau))$, приходим к выводу о том, что для $k = \overline{2, n-\Sigma_{\overline{p}}}$ выполняется условие $\operatorname{sign}\alpha_k = (-1)^k$. Применяя теперь лемму 5.18.2. работы [8, с. 323], можно показать, что с ростом $k = \overline{2; k_1 - 1}$ числа $|\alpha_k|$ не убывают, а с ростом $k = \overline{k_2; n-\Sigma_{\overline{p}}}$ числа $|\alpha_k|$ не возрастают.

Пусть

$$\Phi_1(x) = \int\limits_{x_2}^{x} r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau d\tau, \ \ \Phi_2(x) = \int\limits_{x}^{x_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}} r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau d\tau.$$

Так как $\operatorname{sign}\Phi_1(x_m) = (-1)^{m-1}, m \in \{3,\ldots,k_1\}$, то на концах каждого отрезка $[x_m; x_{m+1}]$ функция $\Phi_1(x)$ принимает значения различные по знаку. Поэтому функция $\Phi_1(x)$ на каждом промежутке $[x_k; x_{k+1}]$, $k \in \{2,3,\ldots,k_1-1\}$, имеет единственный простой нуль $\overline{x}_k$. Аналогично для функции $\Phi_2(x)$ получаем, что она на каждом промежутке

$$[x_k; x_{k+1}], \quad k \in \{k_2; k_2+1; \ldots; n-p_1-p_2-1\}$$

также имеет единственный простой нуль $\overline{x}_k$. Для промежутка $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$ проведем аналогичные рассуждения. Принимая во внимание эти построения, и полагая

$$G(\tau) = f(y(\tau)) r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau,$$

согласно (10) имеем

$$R_{n,\overline{p}}^{(2)}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau)d\tau + \int\limits_{\tilde{y}(\pi)}^{\tilde{y}(2\pi)} G(\tau)d\tau \overset{\text{df}}{=} J_{n,\overline{p}}^{(1)}(f) + J_{n,\overline{p}}^{(2)}(f). \tag{11}$$

Изучим слагаемое $J_{n,\overline{p}}^{(1)}(f)$. Имеем

$$J_{n,\overline{p}}^{(1)}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{x_2} G(\tau)d\tau + \int\limits_{x_2}^{\overline{x}_{k_1-1}} G(\tau)d\tau + \int\limits_{\overline{x}_{k_1-1}}^{\overline{x}_{k_2}} G(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\overline{x}_{k_2}}^{x_{n-p_1-p_2+1}} G(\tau)d\tau + \int\limits_{x_{n-p_1-p_2+1}}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau)d\tau \overset{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^{5} i_j(f).$$

Учитывая (10), $\forall\ f \in H_{\omega_0}$ находим

$$|i_1(f)| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)}.$$

Применяя лемму 5.1.3 работы [8, с. 206], получаем

$$|i_2(f)| \le \omega\left(\frac{4\pi}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}\right)\int\limits_{x_2}^{\overline{x}_{k_1-1}} |Z_q^3(y(\tau)) - l_{n,\overline{p}}^3(\tau)|d\tau.$$

Так как $|y'(\tau)| \le 1$ и $\left|\frac{d}{d\tau}Z_q^3(y(\tau))\right| \le \frac{3q}{(1-q)^5}$, то $|r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)| \le \frac{3q\pi}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}$. Следовательно,

$$|i_2(f)| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}\right)\frac{q}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}.$$

Аналогично получаем, что такая же оценка справедлива для величин $|i_3(f)|$, $|i_4(f)|$, $|i_5(f)|$. Учитывая это, находим

$$|J_{n,\overline{p}}^{(1)}| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}\right)\frac{1}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}.$$

Выполняя аналогичные рассуждения, получаем, что такая же оценка справедлива для величины $|J_{n,\overline{p}}^{(2)}|$. Поэтому в силу соотношения (11) приходим к выводу о том, что

$$|R_{n,\overline{p}}^{(2)}| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}\right)\frac{1}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}. \tag{12}$$

Таким образом, согласно (6), (9), (12),

$$J_{n,\overline{p}}(f) = \int\limits_{x_2}^{x_{2(n-\Sigma_{\overline{p}})}} f(y(\tau))l_{n,\overline{p}}^3(\tau)\cos((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau)d\tau + O(1)\frac{\omega\left((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1}\right)}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}.$$

Учитывая (8), имеем

$$i_{n,\overline{p}}^q(f) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{x_2}^{x_{2(n-\Sigma_{\overline{p}}+1)}} f(y(\tau))l_{n,\overline{p}}^3(\tau)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tau]d\tau =$$

$$= \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1} Z_q^3(\tau_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\cos[(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tilde{y}(t)]\tilde{y}'(t)dt, \quad t_k = y(x_k).$$

Поэтому

$$\sup_{f\in H_{\omega_0}} |i_{n,\overline{p}}^q(f)| \le \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1} Z_q^3(\tau_k)S_k(\omega), \tag{13}$$

где

$$S_k(\omega) = \sup_{f \in H_{\omega_0}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \cos[(n - \Sigma_{\overline{p}} - 1)\tilde{y}(t)]\tilde{y}'(t)dt \right|. \tag{14}$$

Пусть $\rho_k(t)$ — функция, определенная на промежутке $[t_k; c_k]$ равенством

$$\int\limits_{t_k}^{t} \psi(t)dt = \int\limits_{t_k}^{\rho_k(t)} \psi(t)dt, t_k \le t \le c_k \le \rho_k(t) \le t_{k+1}.$$

Тогда, в силу леммы Корнейчука-Стечкина (см., например, лемма 5.1.4. работы [8, с. 208]), для любого модуля непрерывности $\omega(t)$

$$S_k(\omega) \le \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t)dt. \tag{15}$$

Если при этом $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то в (15) имеет место знак равенства и верхнюю грань реализует функция из класса H_ω вида $s_k \pm f_k(t)$, где s_k — произвольные постоянные, а

$$f_k(t) = \begin{cases} -\int\limits_{t}^{c_k} \omega'(\rho_k(v) - v)dv, & t \in [t_k; c_k], \\ \int\limits_{c_k}^{t} \omega'(v - \rho_k^{-1}(v))dv, & t \in [c_k; t_{k+1}], \end{cases}$$

где $\rho_k^{-1}(v)$ — функция, обратная к $\rho_k(v)$. Объединяя соотношения (13), (14), (15), для любого модуля непрерывности $\omega = \omega(t)$ получаем

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i^q_{n,\overline{p}}(f)| \le \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1} Z_q^3(\tau_k) \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t)dt. \tag{16}$$

Пусть теперь $\omega = \omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности. Руководствуясь снова леммой Корнейчука-Стечкина, построим функцию $f^* \in H_\omega$, для которой будет выполняться равенство

$$i^q_{n,\overline{p}}(f^*) = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1} Z_q^3(\tau_k) \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t)dt + O(1)\frac{\omega\left((n - \Sigma_{\overline{p}} - 1)^{-1}\right)}{(n - \Sigma_{\overline{p}} - 1)(1 - q)^5}. \tag{17}$$

Функцию $f^*(t)$ будем строить на основе функций $f_k(t)$. Заметим, что для величин $d_k = t_{k+1} - t_k$, $t_k = y(x_k)$, справедливо равенство

$$d_k - d_{k+1} = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left[y'(\tau) - y'(\tau + \frac{\pi}{n - \Sigma_{\overline{p}} - 1}) \right] d\tau. \tag{18}$$

Так как

$$y''(\tau)=\left(2-\frac{2(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)+1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}y'(\tau)\right)Z^2_{q,n,\overline{p}}(y(\tau))q\sin(y(\tau))y'(\tau),$$

то на промежутке $(\tilde{y}(0);\tilde{y}(\pi))$ функция $y'(\tau)$ возрастает, а на $(\tilde{y}(\pi);\tilde{y}(2\pi))$ — убывает. Поэтому из (18) заключаем, что числа d_k сначала возрастают, а затем убывают. Пусть $\overline{k}$ — значение номера, при котором характер указанной монотонности изменяется. При этом $n-\Sigma_{\overline{p}}-1<\overline{k}<n-\Sigma_{\overline{p}}+5$. Отметив это, положим

$$f_0(t)=\begin{cases}(-1)^k f_k(t)+\gamma_k, & t\in[t_k;t_{k+1}), k=\underline{2,3,\ldots,\overline{k}},\\ (-1)^k f_k(t)+\delta_k, & t\in(t_k;t_{k+1}], k=\overline{\overline{k}+1,2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1},\end{cases}$$

где $\gamma_2=\delta_{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1}=0$, а остальные γ_k и δ_k подобраны так, чтобы функция $f_0(t)$ была непрерывной на промежутках $(t_2;t_{\overline{k}+1})$ и $(t_{\overline{k}+1};t_{2(n-\Sigma_{\overline{p}}+1)})$. Вычислим величину $i^q_{n,\overline{p}}(f_0)$. В силу леммы Корнейчука-Стечкина для $k=2,3,\ldots,2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1$

$$\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}f_0(t)\cos((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)dt\right|=\int\limits_{t_k}^{c_k}|\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt.$$

Поэтому

$$i^q_{n,\overline{p}}(f_0)=\sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1}Z^3_q(\tau_k)\int\limits_{t_k}^{c_k}|\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt. \tag{19}$$

Через $f^*(t)$ обозначим 2π-периодическую функцию, которая на периоде $[0;2\pi]$ определяется равенством

$$f^*(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,c_2]\cup[c_{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1},2\pi],\\ f_0(t), & t\in[c_2,t_{\overline{k}}]\cup[t_{\overline{k}+2},c_{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1}],\\ m(t), & t\in[t_{\overline{k}},t_{\overline{k}+2}], f_0(t_{\overline{k}+1}-0)>0,\\ M(t), & t\in[t_{\overline{k}},t_{\overline{k}+2}], f_0(t_{\overline{k}+1}-0)<0,\end{cases}$$

где

$$m(t)=\min\{f_0(t),f_0(t_{\overline{k}+1}-0),f_0(t_{\overline{k}+1}+0)\},$$
$$M(t)=\max\{f_0(t),f_0(t_{\overline{k}+1}-0),f_0(t_{\overline{k}+1}+0)\}.$$

Заметим, что на каждом из промежутков $[0;c_2]$, $[c_2;t_3]$, $[c_{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1};2\pi]$, $[t_k;t_{k+1}]$, $k=3,\ldots,2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1$, функция $f^*(t)$ монотонна, причем на соседних промежутках характер ее монотонности противоположный. Кроме того,

$$f_k(t_{k+1})-f_k(t_k)=f_k(\rho(t_k))-f_k(t_k)=\omega(\rho_k(t_k)-t_k)=\omega(d_k).$$

Так как функции $f^*(t)$ и $f_0(t)$ отличаются только на промежутках

$$[0,c_2]\cup[c_{2(n-p_1-p_2)+1},2\pi],$$

то

$$|i^q_{n,\overline{p}}(f_0) - i^q_{n,\overline{p}}(f^*)| = O(1)\frac{\omega((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1})}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}.$$

Это значит, что в силу (19)

$$i^q_{n,\overline{p}}(f^*) = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1} Z^3_{n,\overline{p}}(\tau_k)\int_{t_k}^{c_k}|\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt + O(1)\frac{\omega\left((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1}\right)}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5},$$

то есть для функции $f^*(t)$, выполняется соотношение (17). Применяя рассуждения работы [7], несложно показать, что $f^* \in H_{\omega_0}$.

Следовательно, в силу (16) и (17), справедливо равенство

$$\sup_{f\in H_{\omega_0}} |i^q_{n,\overline{p}}(f)| = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1} Z^3_{n,\overline{p}}(\tau_k)\int_{t_k}^{c_k}|\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt + O(1)\frac{\omega\left((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1}\right)}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}$$

для любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$. Применяя рассуждения работы [7], находим

$$\int_{t_k}^{c_k}|\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega(2\tau(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1})\sin\tau}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}d\tau + O(1)\frac{\omega((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1})}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^2(1-q)^2},$$

$$\sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\overline{p}})+1} Z^3_q(\tau_k) = 2\int_0^{\pi}\frac{1}{(1-2q\cos t+q^2)^{3/2}}dt + O(1)\frac{\omega\left((n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1}\right)}{(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5}.$$

Следовательно, для выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2\tau(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)^{-1})\sin\tau d\tau +$$
$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\overline{p}}-1}\right)}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}}-1)(1-q)^5} + \frac{q^{n-p_1+1}\omega\left(\frac{1}{n-p_1-1}\right)}{(1-q)^3} + \frac{q^{n-p_2+1}\omega\left(\frac{1}{n-p_2-1}\right)}{(1-q)^3}\right). \tag{20}$$

Отправляясь от формулы (20) и применяя лемму о выпуклой мажоранте произвольного модуля непрерывности, можно показать, что существует величина $\theta_n(\omega)$, такая, что справедлива формула (3). $\square$

3. Выводы

Решение задачи Колмогорова-Никольского формула (3) обеспечивает, если кроме $n-p_1-p_2\to\infty$, выполняются условия $p_1\to\infty$, $p_2\to\infty$.

Из определения обычных сумм Валле Пуссена видно, что параметр p определяет номера гармоник ряда Фурье (а именно, $n-p+1, n-p+2, \ldots, n-1$), которые домножаются на соответствующие коэффициенты $(\frac{p-1}{p}, \frac{p-2}{p}, \ldots, \frac{1}{p})$, в отличие от первых гармоник, которые не изменяются. Если сравнивать обычные суммы Валле Пуссена и повторные, у которых изменяется одинаковое количество гармоник, то есть, когда $p = p_1 + p_2$, то несложно заметить, что повторные суммы Валле Пуссена на классе $C^q_\beta H_\omega$ могут обеспечивать более высокий (с точностью до постоянного множителя) порядок приближения (при $n \to \infty$), чем обычные суммы Валле Пуссена. Например, если $p_1 = p_2 = p/2$, то порядок приближения повторными суммами Валле Пуссена составляет $\frac{q^{n-p+1}}{p^2}\omega(1/(n-p))$, что в p раз лучше, чем порядок приближения соответствующими обычными суммами Валле Пуссена.

Выражаю искреннюю благодарность кандидату физ.-мат. наук, декану физико-математического факультета Славянского государственного педагогического университета О.А. Новикову за обсуждение статьи.

Список цитируемых источников

1. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
2. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Интегральные представления уклонений средних сумм Фурье на классах $C^\alpha_{\beta,\infty}$ // Вісник Слов'янського держ. пед. ун-ту. Математика. — 2008. — Т. 1(3). — С. 33—41.
3. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653—1668.
4. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97—107.
5. *Степанец А.И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, № 2. — С. 101—136.
6. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
7. *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
8. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 1 — 426 с.
9. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена. — Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 68. — 368 с.
10. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126—151.
11. *Ch. la Vallée Poussin* Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable reelle par des expession d'ordre donne // Comptes rendus Acad. Sci. Paris. — 1918. — T. 166. — P. 799—802.

Получена 05.12.2009