Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 85–94

УДК 517.9

Умова існування розв'язку слабкозбуреної крайової задачі в банаховому просторі

Є. В. Панасенко

Запорізький національний університет,
Запоріжжя, 69600. *E-mail: innovatory@rambler.ru*

Анотація. Розглядаються крайові задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром ε у рівнянні та у крайовій умові. Шукається умова, коли виникає хоча б один розв'язок слабкозбуреної крайової задачі в банаховому просторі. Задача була розв'язана завдяки певним властивостям оператора B_0, який будується з використанням збурюючих доданків у диференціальній системі та у крайовій умові.

Ключові слова: слабкозбурена крайова задача, породжуюча задача, біфуркація розв'язків, узагальнено-оборотний оператор.

1. Вступ

У статті досліджено проблему існування розв'язку слабкозбурених лінійних неоднорідних крайових задач в банаховому просторі в припущенні, що оператор $B_0 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним [3, 4, 12]. Апаратом дослідження є апарат теорії узагальнено-обернених операторів [2, 12] та метод Вішика-Люстерника [5]. Розв'язки шукаються у вигляді рядів Лорана за степенями малого параметру ε, які містять від'ємну степень ε.

Вирішенню цієї проблеми у випадку $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n,\ \mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$ присвячено роботи [1, 2]. Крім того, умовам біфуркації множини обмежених на всій осі $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ розв'язків слабко збуреного диференціального рівняння в банаховому просторі, присвячено роботу [11]. Для зліченновимірних систем у так званому некритичному випадку, коли $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathrm{M}$ збурені задачі розглядались у роботі [9]. У статті [4] встановлено умови біфуркації розв'язків крайової задачі та отримано оцінку потужності множини розв'язків лінійних неоднорідних крайових задач в банаховому просторі. В даній роботі встановлюється умова, коли виникає хоча б один розв'язок слабкозбуреної крайової задачі в банаховому просторі та будується збіжний ітераційний алгоритм побудови розв'язку задачі, який представляє окремий практичний інтерес.

2. Постановка задачі

Розглянемо в банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ диференціальне рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \varepsilon A_1(t)x(t) + f(t) \tag{2.1}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a; b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_1$:

$$f(t) \in C\left([a;b], \mathbf{B_1}\right) := \left\{ f(\cdot) : [a;b] \to \mathbf{B_1}, |||\mathbf{f}||| = \sup_{t\in[a;b]} \|\mathbf{f}(\mathbf{t})\| \right\},$$

$C([a;b],\mathbf{B_1})$ — банахів простір неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій; оператор-функції $A(t)$ і $A_1(t)$, що діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ в себе, сильно неперервні [7, с.141] з нормами: $|||A||| = \sup_{t\in[a;b]}\|A(t)\| < \infty,\ |||A_1||| = \sup_{t\in[a;b]}\|A_1(t)\| < \infty,\ \varepsilon << 1$ — малий параметр.

Разом з операторним рівнянням (2.1) розглянемо крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon \ell_1 x(\cdot) \tag{2.2}$$

де оператори ℓ і ℓ_1 є лінійними неперервними на $[a;b]$ векторними функціоналами, що діють з простору $C([a;b],\mathbf{B_1})$ в банахів простір $\mathbf{B}_2$: $\ell : C([a;b],\mathbf{B_1}) \to \mathbf{B_2}$; $\ell_1 : C([a;b],\mathbf{B_1}) \to \mathbf{B_2}$; α елемент простору $\mathbf{B}_2$: $\alpha \in \mathbf{B}_2$. Тоді під розв'язоком рівняння (2.1), будемо розуміти розв'язок $x(t) = x(t,\varepsilon)$ інтегрального рівняння

$$x(t,\varepsilon) = x_0 + \int_a^t \big(A(s)x(s) + \varepsilon A_1(s)x(s) + f(s)\big)ds,$$

який є неперервно диференційованим в кожній точці $t \in [a;b]$ і задовольняє рівняння (2.1) всюди на $[a;b]$. Отже розв'язок $x(t,\varepsilon)$ рівняння (2.1) будемо шукати в просторі $C^1([a;b],\mathbf{B_1})$ неперервно-диференційовних на $[a;b]$ функцій зі значеннями в банаховому просторі $\mathbf{B}_1$.

Задача

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{2.3}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{2.4}$$

яку отримаємо із (2.1),(2.2) при $\varepsilon = 0$, називається породжуючою для крайової задачі (2.1),(2.2).

Теорема 1. [3] *Якщо оператор $Q = \ell U(\cdot)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B_1}$ в банаховий простір $\mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним, то неоднорідна задача* (2.3),(2.4) *розв'язна для тих і лише тих неоднорідностей $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\ \right] = 0, \tag{2.5}$$

і при цьому загальний розв'язок крайової задачі має вигляд

$$x(t) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t)Q^{-}\alpha + (Gf)(t),$$

де $U(t)$ - еволюційний оператор одорідного диференціального рівняння (2.3) [7, с.147], *$Q = \ell U(\cdot)$ - оператор, отриманий підстановкою в крайову умову* (2.4) *еволюційного оператора; Q^{-} — узагальнено-обернений оператор до оператора Q* [12], *$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^{-}Q$ й $\mathcal{P}_{N(Q^\star)} = I - QQ^{-}$ є операторами проектування, які проектують банахів простір $\mathbf{B_1}$ на ядро $N(Q)$ і коядро $N(Q^\star)$ оператора Q відповідно; $(Gf)(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі* (2.3),(2.4), *який діє на вектор-функцію $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ наступним чином:*

$$(Gf)(t) := \int_a^b K(t,\tau)f(\tau)d\tau - U(t)Q^{-}\cdot\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau.$$

3. Теорема про існування розв'язку слабкозбуреної крайової задачі

Припустимо, що у породжуючій крайовій задачі (2.3), (2.4), отриманої із (2.1), (2.2) при $\varepsilon = 0$, не існує розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b], \mathbf{B}_1)$ в диференціальній системі і довільних $\alpha \in \mathbf{B}_2$ у крайовій умові (2.4). Згідно теореми 1 це означає, що критерій розв'язності (2.5) крайової задачі (2.3),(2.4) не виконується.

Виникає питання, чи можна за допомогою лінійних збурень зробити задачу (2.1),(2.2) розв'язною, і якщо можна, то якими повинні бути доданки $A_1(t)$ в диференціальній системі (2.1) і функціонал $\ell_1 x(\cdot)$ у крайовій умові (2.2), щоб крайова задача (2.1),(2.2) була скрізь розв'язною. Відповідь на це питання дає оператор B_0

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau \right] : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2, \tag{3.1}$$

побудований з урахуванням збурюючих доданків $A_1(t)$ і ℓ_1. Використовуючи метод Вішика-Люстерника [5], знайдемо ефективні коефіцієнті умови виникнення розв'язку крайової задачі (2.1),(2.2). Розв'язок будемо шукати у вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметру ε і який містить один доданок з від'ємним степенем ε:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_i(t). \tag{3.2}$$

Підставимо ряд (3.2) в крайову задачу (2.1),(2.2) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} приходимо до однорідної крайової задачі

$$\dot{x}_{-1}(t) = A(t)x_{-1}(t), \tag{3.3}$$

$$\ell x_{-1}(\cdot) = 0. \tag{3.4}$$

Згідно теореми 1 задача (3.3),(3.4) має розв'язок

$$x_{-1}(t, c_{-1}) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1}, \tag{3.5}$$

для довільного елемента $c_{-1} \in \mathbf{B_1}$, який буде визначено нижче.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, маємо крайову задачу для визначення коефіцієнта $x_0(t)$:

$$\dot{x}_0(t) = A(t)x_0(t) + A_1(t)x_{-1}(t, c_{-1}) + f(t), \tag{3.6}$$

$$\ell x_0(\cdot) = \alpha + \ell_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1}). \tag{3.7}$$

Критерій розв'язності (2.5) лінійної неоднорідної крайової задачі (3.6), (3.7) згідно теореми 1 має вигляд:

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha + \ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1} - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau)\left(A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1} + f(\tau)\right)d\tau \right] = 0,$$

звідки отримуємо рівняння відносно елемента c_{-1} банахового простору $\mathbf{B_1}$:

$$B_0 c_{-1} = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau \right], \tag{3.8}$$

де оператор B_0 має вигляд (3.1).

Припустимо, що оператор $B_0 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним [2, с.39]. Будемо позначати через $B_0^- : \mathbf{B_2} \to \mathbf{B_1}$ [12] узагальнено-обернений оператор до оператора B_0. Тоді, як показано в [8], він є нормально розв'язним і існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{B_1} \to N(B_0)$ та $\mathcal{P}_Y : \mathbf{B_2} \to Y$, які індукують розбиття $\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{B_2}$ в прямі топологічні суми замкнутих підпросторів $\mathbf{B_1} = N(B_0) \oplus X$, $\mathbf{B_2} = Y \oplus R(B_0)$. Внаслідок нормальної розв'язності оператора B_0 рівняння (3.8) є розв'язним [10] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right] = 0.$$

Остання умова виконується, якщо буде виконана умова:

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0, \tag{3.9}$$

а операторне рівняння (3.8) при цьому буде мати хоча б один розв'язок у вигляді

$$c_{-1} = -B_0^-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right]. \tag{3.10}$$

Підставляючи c_{-1} у (3.5), отримаємо розв'язок крайової задачі (3.3), (3.4):

$$x_{-1}(t) = -U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}B_0^-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right],$$

а крайова задача (3.6),(3.7) має родину розв'язків

$$x_0(t,c_0) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + \overline{x}_0(t), \tag{3.11}$$

де частинний розв'язок $\overline{x}_0(t)$ неоднорідної крайової задачі (3.6),(3.7) має вигляд:

$$\overline{x}_0(t) = U(t)Q^-(\alpha + \ell_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1})) + (G[A_1(\cdot)x_{-1}(\cdot, c_{-1}) + f(\cdot)])(t),$$

де оператор $(G[\cdot])(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (2.3),(2.4), визначений у теоремі 1, а $c_0 \in \mathbf{B_1}$ – довільний елемент простору $\mathbf{B_1}$, що буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу.

При ε^1 для визначення коефіцієнта $x_1(t)$ приходимо до крайової задачі

$$\dot{x}_1(t) = A(t)x_1(t) + A_1(t)x_0(t,c_0), \tag{3.12}$$

$$\ell x_1(\cdot) = \ell_1 x_0(\cdot, c_0). \tag{3.13}$$

Критерій розв'язності крайової задачі (3.12),(3.13) має вигляд:

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}[\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + \ell_1\overline{x}_0(\cdot) - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)(U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + \overline{x}_0(\tau))]d\tau = 0.$$

Звідки отримаємо наступне рівняння відносно елемента c_0 банахового простору $\mathbf{B_1}$:

$$B_0 c_0 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell_1\overline{x}_0(\cdot) - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)\overline{x}_0(\tau)d\tau\right]. \tag{3.14}$$

При тій же умові (3.9) операторне рівняння (3.14) має хоча б один розв'язок у вигляді

$$c_0 = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \overline{x}_0(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \overline{x}_0(\tau) d\tau \right]. \tag{3.15}$$

Підставивши (3.15) у (3.11), отримаємо розв'язок крайової задачі (3.6), (3.7). Задача (3.12),(3.13) має розв'язок

$$x_1(t, c_1) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + \overline{x}_1(t), \tag{3.16}$$

де частинний розв'язок $\overline{x}_1(t)$ неоднорідної крайової задачі (3.12),(3.13) має вигляд:

$$\overline{x}_1(t) = U(t)Q^- \ell_1 x_0(\cdot, c_0) + (G[A_1(\cdot)x_0(\cdot, c_0)])(t),$$

для довільного елемента $c_1 \in \mathbf{B_1}$, що буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу.

При ε^2 для визначення коефіцієнта $x_2(t)$ приходимо до крайової задачі

$$\dot{x}_2(t) = A(t)x_2(t) + A_1(t)x_1(t, c_1), \tag{3.17}$$

$$\ell x_2(\cdot) = \ell_1 x_1(\cdot, c_1). \tag{3.18}$$

Критерій розв'язності крайової задачі (3.17), (3.18) має вигляд:

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}[\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + \ell_1 \overline{x}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau)(U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + \overline{x}_1(\tau))] d\tau = 0,$$

Звідки отримаємо наступне рівняння відносно елемента c_0 банахового простору $\mathbf{B_1}$:

$$B_0 c_1 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \overline{x}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \overline{x}_1(\tau) d\tau \right]. \tag{3.19}$$

При тій же умові (3.9) операторне рівняння (3.19) має хоча б один розв'язок у вигляді

$$c_1 = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \overline{x}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \overline{x}_1(\tau) d\tau \right]. \tag{3.20}$$

Підставивши (3.20) у (3.16), отримаємо розв'язок крайової задачі (3.12), (3.13). Задача (3.17),(3.18) має розв'язок

$$x_2(t, c_2) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c_2 + \overline{x}_2(t), \tag{3.21}$$

де частинний розв'язок $\overline{x}_2(t)$ неоднорідної крайової задачі (3.17),(3.18) має вигляд:

$$\overline{x}_2(t) = U(t)Q^- \ell_1 x_1(\cdot, c_1) + (G[A_1(\cdot)x_1(\cdot, c_1)])(t)$$

для довільного елемента $c_2 \in \mathbf{B_1}$, що буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу.

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнта $x_i(t)$ при ε^i ряду (3.2), приходимо до крайової задачі

$$\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + A_1(t)x_{i-1}(t, c_{i-1}), \tag{3.22}$$

$$\ell x_i(\cdot) = \ell_1 x_{i-1}(\cdot, c_{i-1}). \tag{3.23}$$

При тій же умові (3.9), крайова задача (3.22),(3.23) має розв'язок:

$$x_i(t, c_i) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c_i + \overline{x}_i(t), \tag{3.24}$$

де частинний розв'язок $\overline{x}_i(t)$ неоднорідної крайової задачі (3.22),(3.23) має вигляд:

$$\overline{x}_i(t) = U(t)Q^- \ell_1 x_{i-1}(\cdot, c_{i-1}) + (G[A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1})])(t).$$

Довільний елемент $c_i \in \mathbf{B_1}$ знаходиться за формулою:

$$c_i = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \overline{x}_i(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) A_1(\tau) \overline{x}_i(\tau) d\tau \right]. \tag{3.25}$$

$(G[A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1})])(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (3.22), (3.23), який діє на оператор-функцію $A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1}) \in C([a;b], \mathbf{B_1})$ наступним чином:

$$(G[A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1})])(t) := \int_a^b K(t, \tau) A_1(\tau) x_{i-1}(\tau, c_{i-1}) d\tau -$$
$$- U(t)Q^- \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) A_1(\tau) x_{i-1}(\tau, c_{i-1}) d\tau.$$

Доведення абсолютної збіжності отриманих рядів при достатньо малому фіксованому параметру $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ проводиться методом мажорування рядів [12].

Отже, критерій розв'язності крайової задачі (2.1),(2.2) в банаховому просторі може бути сформульований наступним чином.

Теорема 2. *Нехай оператор $Q = \ell U(\cdot)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B_1}$ в банаховий простір $\mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним і породжуюча крайова задача, отримана із* (2.1),(2.2) *при $\varepsilon = 0$, при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1})$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$ немає розв'язків. Тоді якщо виконуються умови:*

1) оператор B_0 є узагальнено-оборотним;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$,

то слабко збурена крайова задача (2.1), (2.2) *при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1})$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$ має хоча б один розв'язок у вигляді ряду:*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_i(t),$$

абсолютно збіжного при довільних фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, а оператор B_0 має вигляд

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 U(\cdot) \mathcal{P}_{N(Q)} - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) A_1(\tau) U(\tau) \mathcal{P}_{N(Q)} d\tau \right],$$

і коефіцієнти ряду визначаються таким чином:

$$x_i(t, c_i) = \begin{cases} U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c_{-1}, & \textit{якщо } \mathrm{i} = -1; \\ U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c_i + \overline{x}_i(t), & \textit{якщо } \mathrm{i} = \overline{0, \infty}. \end{cases} \tag{3.26}$$

$$c_i = \begin{cases} -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau \right], & \textit{якщо } \mathrm{i} = -1; \\ -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \overline{x}_i(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \overline{x}_i(\tau) d\tau \right], & \textit{якщо } \mathrm{i} = \overline{0,\infty}. \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\overline{x}_i(t) =$$

$$= \begin{cases} U(t)Q^-(\alpha + \ell_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1})) + (G[A_1(\cdot)x_{-1}(\cdot, c_{-1}) + f(\cdot)])(t), & \textit{якщо } \mathrm{i} = 0; \\ U(t)Q^- \ell_1 x_{i-1}(\cdot, c_{i-1}) + (G[A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1})])(t), & \textit{якщо } \mathrm{i} = \overline{1,\infty}. \end{cases} \tag{3.28}$$

$$(G[A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1})])(t) :=$$

$$= \begin{cases} \int_a^b K(t,\tau)(A_1(\tau)x_{-1}(\tau, c_{-1}) + f(\tau))d\tau - \\ \qquad -U(t)Q^- \ell \int_a^b K(\cdot,\tau)(A_1(\tau)x_{-1}(\tau, c_{-1}) + f(\tau))d\tau, & \textit{якщо } \mathrm{i} = 0; \\ \int_a^b K(t,\tau) A_1(\tau) x_{i-1}(\tau, c_{i-1}) d\tau - \\ \qquad -U(t)Q^- \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) x_{i-1}(\tau, c_{i-1}) d\tau, & \textit{якщо } \mathrm{i} = \overline{1,\infty}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Зауваження 1. Побудований ітераційний процес (3.26)-(3.29) знаходження хоча б одного розв'язку слабкозбуреної крайової задачі (2.1),(2.2) відрізняється від побудованого ітераційного процесу у статті [4], в якій встановлено умови біфуркації розв'язків крайової задачі і показано, що множина лінійно незалежних розв'язків залежить від розмірності підпростору оператора $\mathcal{P}_{N(Q)} \mathcal{P}_{N(B_0)}$.

4. Ілюстративний приклад

Розглянемо збурену крайову задачу (2.1),(2.2) із зліченновимірною матрицею $A(t)$ і зліченновимірним вектор-стовпчиком $f(t)$:

$$A(t) = \mathrm{diag} \left\{ \frac{2t}{1+t^2}, 0, \frac{2t}{1+t^2}, 0, \ldots, \frac{2t}{1+t^2}, 0, \ldots \right\}, \tag{4.1}$$

$$f(t) = \mathrm{col} \{ f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots \}, \tag{4.2}$$

і крайовою умовою виду

$$\ell x(\cdot) := Mx(0) - Nx(1) = \alpha, \tag{4.3}$$

де

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{5 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0}^{2k} & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 \quad 3 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 5 \quad 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 3 & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0}^{2k} & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 \quad 3 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 2 \quad 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 3 & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\ell_1 = 0;\ \alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}\} \in \mathbb{R}^{2k}; \quad \alpha_i = \mathrm{const},\ i = \overline{1, 2k}.$$

Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді неперервно диференційованої вектор-функції $x(t) = \mathrm{col}\{x_1(t),\, x_2(t), \dots, x_n(t), \dots\} \in C^1\left([0;1], \mathrm{M}\right)$ зі значеннями у просторі M.

Еволюційний оператор задачі має вигляд

$$U(t) = \mathrm{diag}\{1 + t^2, 1, 1 + t^2, 1, \dots, 1 + t^2, 1, \dots\}.$$

Обернений до $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{1+t^2}, 1, \frac{1}{1+t^2}, 1, \dots, \frac{1}{1+t^2}, 1, \dots\right\}.$$

$$Q = M - NU(1,0) = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0}^{2k} & \dots & 0 & \dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

$$Q^- = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0}^{2k} \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots \end{pmatrix}.$$

Проектори відповідно дорівнюють:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^- Q = \mathrm{diag}\left\{\underbrace{0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1}_{2k}, 1, 1, \dots, 1, \dots\right\} : \mathrm{M} \to \mathrm{M},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^- = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0}^{2k} \\ 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}.$$

Породжуюча задача розв'язна тоді і тільки тоді, коли:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_2 & = & -3\int_0^1 f_2(\tau)d\tau, \\ \alpha_4 & = & -3\int_0^1 f_4(\tau)d\tau, \\ \dots & & \\ \alpha_{2k} & = & -3\int_0^1 f_{2k}(\tau)d\tau. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Припустимо, що породжуюча задача нерозв'язна, тобто умова (4.4) не виконується. Тепер розглянемо, яким чином потрібно збурити породжуючу задачу, щоб збурена крайова задача (2.1),(2.2) із зліченновимірною матрицею $A(t)$ вигляду (4.1), зліченновимірним вектором $f(t)$ вигляду (4.2) і крайовою умовою виду (4.3) була завжди розв'язною $\big($навіть для тих $f(t) \in C([a;b], \mathrm{M})$, $\alpha \in \mathbb{R}^{2k}$, які не задовольняють умову розв'язності (4.4)$\big)$.

Для розв'язання цієї проблеми виберемо оператор $A_1(t)$, наприклад, у вигляді діагональної зліченновимірної матриці $A_1(t) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \ldots, \frac{1}{1+t^2}, \ldots\right\}$ та знайдемо оператор B_0, що в данному випадку є зліченновимірною $(2k \times \infty)$-матрицею:

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell \int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau\right] =$$

$$= \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[-N\int_0^1 U(1)U^{-1}(\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}}^{2k} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & -\frac{3\pi}{4} & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \vdots & 0 & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{3\pi}{4} \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Оператор B_0 має узагальнено-обернений оператор (представляє собою зліченновимірну $(\infty \times 2k)$-матрицю) у вигляді:

$$B_0^- = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}}^{2k} \\ \begin{matrix} 0 & -\frac{4}{3\pi} & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{4}{3\pi} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Проектори відповідно дорівнюють:

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} = I - B_0^- B_0 = \operatorname{diag}\left\{\underbrace{1,0,1,0,\ldots,1,0}_{2k}, 1,1,\ldots,1,\ldots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} = I - B_0 B_0^- = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}}^{2k} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Умова $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$ теореми 2 завжди виконана:

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0}}^{2k}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно теореми 2 крайова задача (2.1),(2.2) із зліченновимірною матрицею $A(t)$ вигляду (4.1), зліченновимірною вектор-функцією $f(t)$ вигляду (4.2) і крайовою умовою (4.3) при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b], \mathrm{M})$, $\alpha \in \mathbb{R}^{2k}$ має хоча б один розв'язок. Згідно класифікації С.Г. Крейна [8] така задача називається d-нормальною.

Отриманий результат застосовується для дослідження існування розв'язків найпростіших зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь. Лінійне збурення вдається підібрати таким чином, щоб збурена крайова задача мала розв'язок і у тому випадку, коли породжуюча крайова задача немає розв'язку. Крім того, збурення можна підібрати у вигляді постійної зліченної матриці. На прикладі спостерігаємо появу розв'язків з точки $\varepsilon = 0$.

Перелік цитованих джерел

1. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — К: Наукова думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи. — К: Институт математики НАНУ, 1995. — 320 с.
3. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь в банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, №1. — С. 16–19.
4. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, №3. — С. 291–304.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1960. — Т. 15, №3. — С. 3–80.
6. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М: Наука, 1970. — 536 с.
8. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М: Наука, 1971. — 104 с.
9. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счётные системы дифференциальных уравнений. — К: Институт математики НАНУ, 1993. — 308 с.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М: Наука, 1980. — 496 с.
11. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Bounded solution of linear perturbed differential equations in a Banach space // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2007. — Vol. 38. — P. 29–40.
12. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. — Utrecht-Boston: VSP, 2004. — 317 p.

Получена 01.06.2013