Динамические системы, вып. 20 (2006), 59–67

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 539.3

Дифракция плоских гармонических волн на периодической системе жестких цилиндров

А.М. Назаренко, А.М. Ложкин
Сумский государственный университет,
Сумы

Аннотация. Методом интегральных уравнений решается задача дифракции плоских гармонических волн на периодической системе жестких цилиндрических включений произвольного поперечного сечения. Полученные сингулярные интегральные уравнения реализуются численно. Проведен параметрический анализ напряженно-деформированного состояния среды на границе включений.

Введение

В [1] методом разложения в ряд по собственным функциям решены задачи дифракции плоских волн на периодических системах цилиндрических круговых включений или полостей. В [2] методом интегрального разложения по функциям Бесселя рассмотрена классическая динамическая смешанная краевая задача для полупространства с круговой цилиндрической полостью. В [3] для решения задач о локальном рассеянии стационарных волн плоской деформации на туннельных цилиндрических полостях эллиптического сечения предложен метод конформных отображений с использованием малой коррекции упругих постоянных в анизотропных телах моноклинной системы. Методом R-функций в [4] исследуется дифракция плоской волны расширения на двух отверстиях произвольной формы в бесконечной пластине. В [5, 6] для решения плоских дифракционных задач предлагается метод интегральных уравнений. В [7] этим методом изучается дифракция плоских гармонических волн на периодической системе неподвижных включений произвольного поперечного сечения. В настоящей работе делается обобщение на случай периодической решетки, составленной из жестких цилиндров.

1. Постановка задачи

Пусть на $2d-$периодическую систему абсолютно жестких цилиндрических включений произвольного поперечного сечения набегает гармоническая волна расширения-сжатия (P-случай):

$$U_1^{(0)} = 0,\ U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2},\ \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1},\ c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\ \tau_1 = const, \tag{1.1}$$

или волна сдвига (SV-случай):

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2},\ U_2^{(0)} = 0,\ \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2},\ c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\ \tau_2 = const. \tag{1.2}$$

Здесь c_1 и c_2 – скорости продольной и поперечной волн в матрице, λ, μ и ρ – коэффициенты Ламе и плотность среды, ω – круговая частота колебаний, $i^2 = -1$ (зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$).

Будем считать, что плотность включений постоянна и равна ρ_0, их центры расположены вдоль оси Ox_1, а сечения цилиндров плоскостью Ox_1x_2 ограничены замкнутыми гладкими контурами $L_j = L(\mathrm{mod} 2d)$ типа Ляпунова.

Взаимодействуя с включениями, падающая волна порождает отраженные продольные и поперечные волны. Их совокупность определяет напряженно-деформированное состояние среды, которое требуется определить. Следуя принципу суперпозиции, общее поле амплитуд перемещений и компонент тензора напряжений будем искать в виде суммы падающего и отраженного волновых полей:

$$U_k = U_k^{(0)} + U_k^{(1.1)},\ \tau_{mn} = \tau_{mn}^{(0)} + \tau_{mn}^{(1.1)},\ k,\ m,\ n = 1,\ 2, \tag{1.3}$$

$$\tau_{mn} = \lambda\delta_{mn}(U_{1,1} + U_{2,2}) + \mu(U_{m,n} + U_{n,m})).$$

Здесь $U_k^{(0)}$, $\tau_{mn}^{(0)}$ и $U_k^{(1.1)}$, $\tau_{mn}^{(1.1)}$ – амплитуды компонент вектора перемещений и тензора напряжений набегающего и возмущенного волновых полей, δ_{mn} – символ Кронекера.

Отраженное поле перемещений должно удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а также уравнениям движения [1]. Кроме того, должны выполняться условия на границе жесткого включения:

$$U_1 = B_1 - \omega_0\eta,\ U_2 = B_2 + \omega_0\xi,\ \zeta = \xi + i\eta \in L, \tag{1.4}$$

где B_1, B_2 и ω_0 — амплитуды поступательного движения и жесткого поворота включения.

2. Метод исследования

Представления для амплитуд перемещений отраженного волнового поля будем записывать в виде потенциалов типа простого слоя [7] (суммирование по $n = 1, 2$):

$$U_k^{(1.1)}(M) = \int\limits_L V_n^{(k)}(M,\ P)p_n(s)ds,\ k = 1,\ 2. \tag{2.1}$$

Здесь $p_n\,(s)$ – неизвестные плотности; $V_n^{(k)}$ – компоненты матрицы Грина, представляющие собой амплитуды перемещений в точке M при действии периодической системы гармонических сил, приложенных в точках $\zeta_j = \xi + 2jd + i\eta \in L_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$ и направленных вдоль оси Ox_1 $(k = 1)$ или вдоль оси Ox_2 $(k = 2)$.

Уравнения для амплитуд перемещений $V_n^{(k)}$ имеют вид:

$$V_n^{(k)} = (-1)^{n+k}L_{nk}G,\ L_{12} = L_{21} = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ k,\ n{=}1,\ 2, \tag{2.2}$$

$$L_{11} = \mu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho\omega^2,\ L_{22} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial_2^2} + \rho\omega^2,$$

$$(\Delta+\gamma_1^2)(\Delta+\gamma_2^2)G = F,\ F = -c\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(x_1-\xi+2jd,\ x_2-\eta),$$

где $\delta\,(x_1,\ x_2)$ – дельта функция Дирака, ν — коэффициент Пуассона, $c = \dfrac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}$.

Фундаментальное решение уравнения (2.2) выражается формулой

$$G\,(M,P) = \frac{c}{2d(\gamma_2^2-\gamma_1^2)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-\beta_1(x_2-\eta)}}{\beta_1} - \frac{e^{-\beta_2(x_2-\eta)}}{\beta_2}\right)\frac{\cos\alpha_j\,(x_1-\xi)}{1+\delta_{j0}}, \tag{2.3}$$

$$\alpha_j = \frac{\pi j}{d},\ \beta_m = \sqrt{\alpha_j^2-\gamma_m^2},\ \alpha_j > \gamma_m;\ \beta_m = -i\sqrt{\gamma_m^2-\alpha_j^2},\ \alpha_j < \gamma_m.$$

Анализ функциональных рядов, присутствующих в (2.3), показывает, что функции Грина $V_1^{(1.2)}$ и $V_2^{(1.1)}$ (2.2) непрерывны в точке приложения сосредоточенного источника, а функции $V_1^{(1.1)}$ и $V_2^{(1.2)}$ имеют логарифмическую особенность. Для выделения логарифмической особенности в явном виде фундаментальное решение G (2.3) динамической задачи представлялось в виде $G = G_0 + (G - G_0)$, где G_0 – периодическое фундаментальное решение бигармонического уравнения $\Delta^2 G_0 = F$, соответствующее статической задаче ($\omega = 0$).

В результате приходим к следующим выражениям для $V_n^{(k)}$:

$$V_1^{(1.2)} = V_{10}^{(1.2)} + c\frac{\lambda+\mu}{2d}h_0\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_j\,(d_2-d_1) - \frac{|x_2-\eta|}{2}e^{-\alpha_j|x_2-\eta|}\right)s_1, \tag{2.4}$$

$$V_n^{(n)} = V_{n0}^{(n)} + c\frac{\lambda+\mu}{2d}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_j^2}{\beta_n}d_n - \beta_l d_l - r_n e^{-\alpha_j|x_2-\eta|}\right)s_2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2i}\frac{\gamma_l}{\gamma_2^2-\gamma_1^2}e^{i\gamma_l|x_2-\eta|} + \frac{\chi-(-1)^n}{4}|x_2-\eta|\right\},\ V_2^{(1.1)} = V_1^{(1.2)},\ l\cdot n = 2,$$

$$d_n = \frac{e^{-\beta_n|\eta_0-\eta|}}{\gamma_2^2-\gamma_1^2},\ r_n = \frac{\chi+(-1)^n\alpha_j\,|x_2-\eta|}{2\alpha_j},\ \zeta=\xi+i\eta,\ z=x_1+ix_2,$$

$$h_0 = sign(x_2-\eta),\ s_1 = \sin\alpha_j(x_1-\xi),\ s_2 = \cos\alpha_j(x_1-\xi),\ \chi = 3-4\nu,$$

$$V_{n0}^{(n)} = -c\frac{\lambda+\mu}{4}\left[\frac{\chi}{\pi}Re\{\ln t_2\} + (-1)^n\frac{x_2-\eta}{2d}Im\{t_1\} + \frac{\chi\ln 2}{\pi}\right],$$

$$V_{10}^{(1.2)} = V_{20}^{(1.1)} = c\frac{\lambda+\mu}{8}\cdot\frac{x_2-\eta}{d}Re\{t_1\},\ t_1 = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi(z-\zeta)}{2d},\ t_2 = \sin\frac{\pi(z-\zeta)}{2d}.$$

Здесь $V_{n0}^{(k)}$ – компоненты матрицы Грина статической задачи.

При выборе представлений в виде (2.1) амплитуды перемещений отраженного волнового поля автоматически удовлетворяют уравнениям движения. Кроме того, за счет выбора знаков для β_m в (2.3) выполняются условия излучения на бесконечности, то есть отраженное волновое поле имеет характер расходящихся волн.

Для построения эффективного численного алгоритма граничные условия (1.4) дифференцировались по дуговой координате s_0 и записывались в виде:

$$\left.\frac{d(U_1+iU_2)}{ds_0}\right|_L = i\omega_0 e^{i\varphi_0},\ \left.\frac{d(U_1-iU_2)}{ds_0}\right|_L = -i\omega_0 e^{-i\varphi_0}, \tag{2.5}$$

$$\frac{dW}{ds_0} = \left(\frac{\partial W}{\partial z}e^{i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial\,\bar{z}}e^{-i\varphi_0}\right)_{z\to\zeta_0},$$

где φ_0 - угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ с осью Ox_1, (здесь и в дальнейшем черточка над переменной означает сопряжение, то есть если $z = x_1 + ix_2$, то $\bar{z} = x_1 - ix_2$).

Выполнение граничных условий (2.5) сводит краевую задачу к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$\int_L B_{mn}(s_0,s)f_n(s)ds = M_m(s_0)\omega_0 + N_m(s_0),\ n,\ m = 1,\,2, \tag{2.6}$$

$$B_{mn} = -c\frac{\lambda+\mu}{4d}(E_{mn} + \sum_{j=0}^{\infty}F_{mn}(j)), E_{nn} = \frac{\chi}{2}Re\left\{ctg\frac{\pi(\zeta_0-\zeta)}{2d}e^{i\varphi_0}\right\},$$

$$E_{21} = \frac{\pi(\eta_0-\eta)}{4id}\frac{e^{i\varphi_0}}{\sin^2(\pi(\zeta_0-\zeta)/2d)} - \frac{1}{2i}ctg\frac{\pi(\zeta_0-\zeta)}{2d}\sin\varphi_0,\ E_{12} = \bar{E}_{21},$$

$$F_{nn}(j)=\frac{1}{1+\delta_{j0}}(\alpha_j g_l \sin\alpha_j(\xi_0-\xi)\cos\varphi_0+h_1\beta_l g_l\cos\alpha_j(\xi_0-\xi)\sin\varphi_0-$$

$$-\chi e^{-\alpha_j|\eta_0-\eta|}\sin(\alpha_j(\xi_0-\xi)+h_1\varphi_0)),$$

$$F_{mn}(j)=\alpha_j(a_l\cos\varphi_0+(-1)^m 2i\beta_l b_l\sin\varphi_0)\sin\alpha_j(\xi_0-\xi)+$$

$$+h_1(\beta_l a_l\sin\varphi_0-(-1)^m 2i\alpha_j^2 b_l\cos\varphi_0)\frac{\cos\alpha_j(\xi_0-\xi)}{1+\delta_{j0}}+e_m,\ m\neq n,\ n\cdot l=2,$$

$$g_l=\frac{\gamma_l^2 e^{-\beta_l|\eta_0-\eta|}}{\beta_l(\gamma_2^2-\gamma_1^2)},\ b_l=\frac{e^{-\beta_l|\eta_0-\eta|}}{\gamma_n^2-\gamma_l^2},\ a_l=\frac{(\alpha_j^2+\beta_l^2)e^{-\beta_l|\eta_0-\eta|}}{\beta_l(\gamma_n^2-\gamma_l^2)},$$

$$e_2=\left(-i\alpha_j(\eta_0-\eta)e^{i\varphi_0}-h_1\sin\varphi_0\right)\frac{e^{ih_1\alpha_j(\zeta_0-\zeta)}}{1+\delta_{j0}},\ e_1=\bar{e}_2,\ h_1=sign(\eta_0-\eta),$$

$$f_1=p_1+ip_2,\ f_2=p_1-ip_2,\ M_1=i\omega_0 e^{i\varphi_0},\ M_2=\bar{M}_1,$$

$N_1=-N_2=-\gamma_1\tau\, e^{-i\gamma_1\eta_0}\sin\varphi_0-$ в P-случае,
$N_1=N_2=i\gamma_2\tau\, e^{-i\gamma_2\eta_0}\sin\varphi_0-$ в SV-случае.

Анализ ядер системы уравнений (2.6) показывает, что ядра B_{11} и B_{22} являются сингулярными, а ядра B_{12} и B_{21} – непрерывными. Следовательно, (2.6) – система сингулярных интегральный уравнений первого рода.

Необходимые для разрешимости этой системы уравнений три дополнительных условия вытекают из законов поступательного и вращательного движения абсолютно жесткого тела. Для поступательного движения, исходя из второго закона Ньютона, получаем:

$$\int_L S_1 ds=-\omega^2\rho_0 S_0 B_1,\ \int_L S_2 ds=-\omega^2\rho_0 S_0 B_2, \tag{2.7}$$

а уравнение, описывающее вращательное движение, запишем в виде:

$$\int_L \left(S_1\,(\eta-y)-S_2\,(\xi-x)\right)ds=-\omega^2 J_A\,\omega_0, \tag{2.8}$$

где S_1 и S_2 – амплитуды компонент вектора напряжения на контуре L; S_0 и ρ_0 – площадь и плотность включения, ограниченного контуром L; J_A – момент инерции включения относительно точки $A(x,\,y)$; постоянные B_1 и B_2 определяются согласно (1.4).

3. Результаты численных исследований

При численной реализации алгоритма в настоящей работе использован метод механических квадратур [8]. В качестве примера рассматривалась среда, содержащая бесконечную периодическую систему жестких цилиндрических включений эллиптического поперечного сечения

На границе включения проводилось вычисление безразмерных напряжений

$$\sigma_n = |\tau_n| / P, \ \sigma_s = |\tau_s| / P, \ \sigma_{ns} = |\tau_{ns}| / P, \qquad (3.1)$$

где τ_n и τ_{ns} – амплитуды нормального и тангенциального напряжений на L; τ_s определяется из соотношения $\tau_s + \tau_n = \tau_{11} + \tau_{22}$; P – максимальное напряжение в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ в случае набегания на цилиндр P-волны (1.1) и $\gamma_2 \tau_2 \mu$ – в случае SV-волны (1.2).

$$\xi = a \sin\beta, \ \eta = -b \cos\beta, \ 0 \le \beta \le 2\pi. \qquad (3.2)$$

На рис. 1 и 2 приведены распределения напряжений σ_n и σ_{ns} вдоль контура эллиптического жесткого включения (3.2) в случае набегания P- и SV- волны соответственно при $a/b = 0,5$; $\nu = 0,3$; $a/d = 0,5; \lambda_0/2a = 1,2$ (λ_0 – длина падающей волны: $\lambda_0 = 2\pi/\gamma_1$ в P-случае и $\lambda_0 = 2\pi/\gamma_2$ в SV-случае). Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям $\rho_0/\rho = 0,5$; $1,0$; $2,0$ и $5,0$. Расчеты показывают, что существует принципиальное различие в распределении контурных напряжений при набегании на жесткое включение волны расширения-сжатия (1.1) или волны сдвига (1.2). В P-случае напряжения σ_n достигают максимума в лобовой $\beta = 180^0$ точке; в SV-случае напряжения σ_n в лобовой $\beta = 180^0$ и теневой $\beta = 0^0$ точках равны нулю и достигают максимумов в теневой и освещенной зонах. Напряжения σ_{ns} в P- случае в лобовой и теневой точках равны нулю, а их максимум достигается вблизи точки соскальзывания; в SV-случае напряжения σ_{ns} принимают максимальные значения в лобовой точке и имеют локальный максимум вблизи точки $\beta = 90^0$. При увеличении параметра ρ_0/ρ наблюдается увеличение напряжений σ_n в P- случае и σ_{ns} в SV- случае вблизи лобовой точки и их уменьшение в окрестности теневой точки, а максимальные значения напряжений σ_n в SV-случае смещаются из теневой области (при $\rho_0/\rho < 1$) в освещенную (при $\rho_0/\rho > 1$).

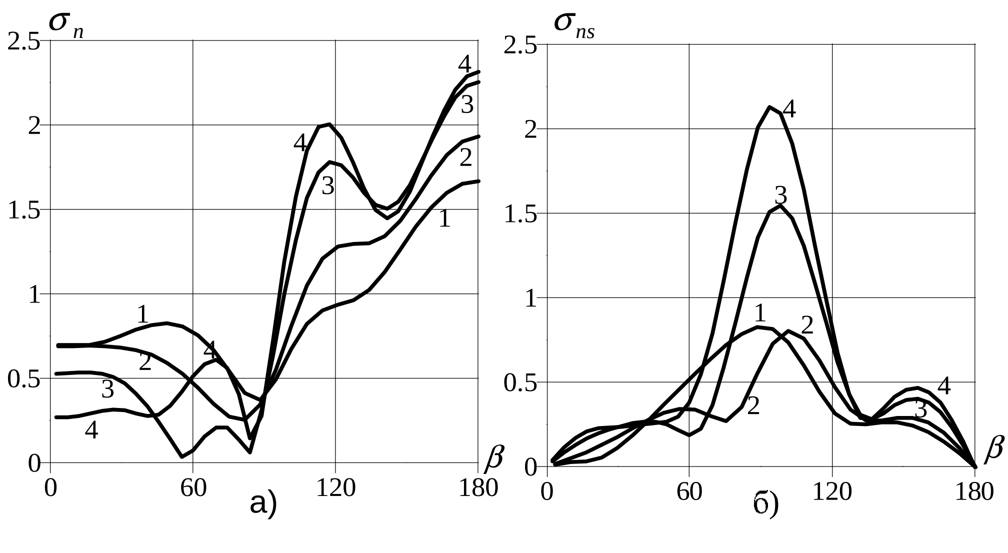

Рис. 1.

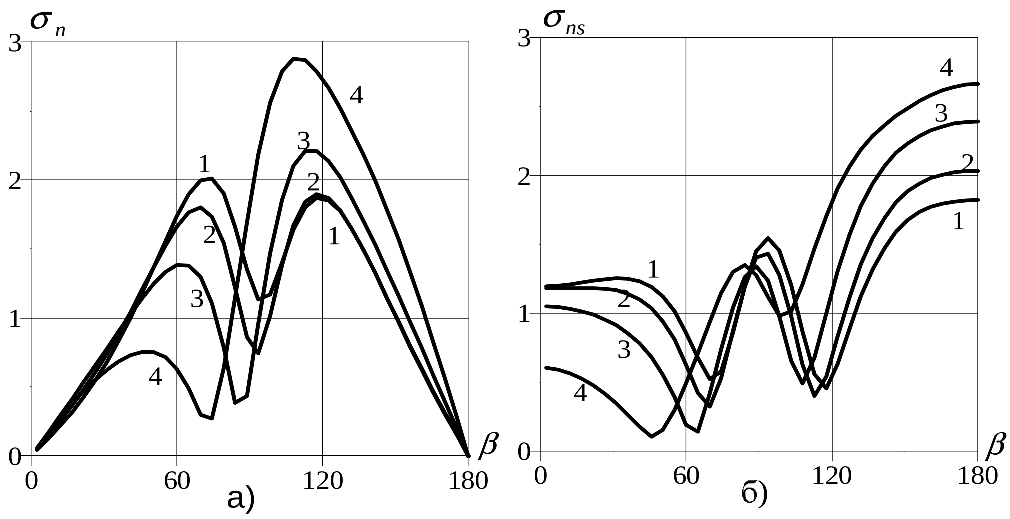

Рис. 2.

Отметим, что при дифракции продольной (1.1) или поперечной (1.2) волны на жестком эллиптическом включении (3.2) напряжение σ_s всегда меньше σ_n и связано с ним соотношением $\sigma_s = \nu\sigma_n/(1-\nu)$.

На рис. 3 и 4 приведены распределения максимальных контурных напряжений σ_n и σ_{ns} в зависимости от отношения плотностей включения и матрицы ρ_0/ρ в P- и SV-случаях соответственно при $a/b = 0,5$; $\nu = 0,3$; $a/d = 0,5$. Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям $\lambda_0/2a = 0,35$; $0,6$; $1,2$ и $1,9$. Видно, что в данном случае также существует принципиальное отличие между P- и SV- случаями. Так, с увеличением параметра ρ_0/ρ напряжения σ_n в P-случае и напряжения σ_{ns} в SV-случае сначала возрастают, а затем при достижении определенного значения (зависящего от отношения длины волны к оси эллипса) они начинают постепенно стабилизироваться и стремится к напряжению, соответствующему неподвижному включению [7]. Напряжения σ_{ns} в P-случае и σ_n в SV-случае, наоборот, сначала убывают, а затем наступает процесс стабилизации. Причем, в случае коротких волн ($\lambda_0/2a = 0,35$; и $0,6$;) жесткое включение начинает вести себя как неподвижное уже при $\rho_0/\rho = 5$ (например, при $\lambda_0/2a = 0,35$ максимальные напряжения на контуре жесткого включения отличаются от соответствующих напряжений на контуре неподвижного включения менее, чем на 2%). В случае средних и длинных волн ($\lambda_0/2a = 1,2$ и $1,9$) даже при довольно больших отношениях плотностей включения и матрицы максимальные напряжения σ_n и σ_{ns} продолжают изменяться при увеличении ρ_0/ρ. В данном случае стабилизация напряжений происходит при $\rho_0/\rho > 10$.

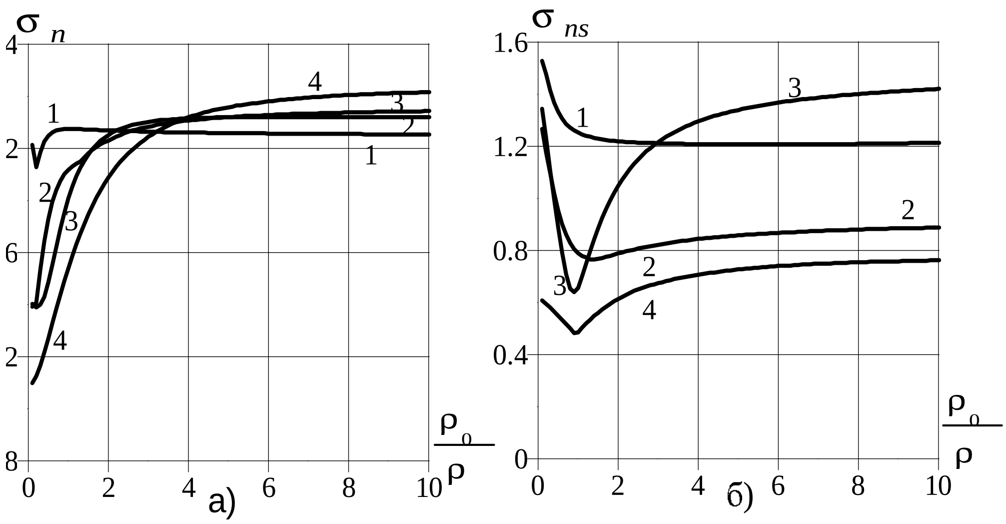

Рис. 3.

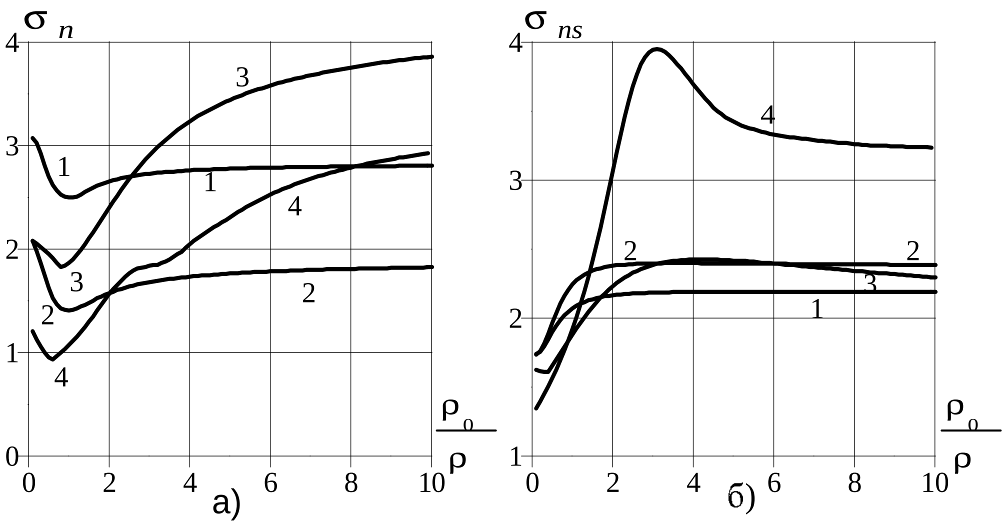

Рис. 4.

Список цитируемых источников

1. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. — К.: Наук. думка, 1978. — 307с.
2. *Малиц П.Я., Сницер А.Р., Шевляков Ю.А.* О решении задачи Рейснера-Сагоци для полупространства с цилиндрической полостью // Прикл. механика. — 1989. — Т.25, №7. — С. 24-30.

3. *Сторожев В.И., Волобуева Т.В.* Дифракция волн плоской деформации на цилиндрической полости в анизотропном массиве моноклинной системы // Теорет. и прикладная механика. — 1999. — Вып. 30. — С. 137-147.
4. *Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф. и др.* Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // Докл. РАН. Математическая физика. — 1996. — Т. 349, №2. — С. 175-179.
5. *Фильштинский Л.А.* Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Мех. тверд. тела. — 1991. — №4.– С. 119-127.
6. *Назаренко А.М.* Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Динамические системы: Межвед. науч. сб. — 2005. — Вып. 19. — С. 54–60.
7. *Назаренко А.М., Ложкин А.М.* Взаимодействие плоских гармонических волн с периодической системой неподвижных цилиндрических включений в условиях плоской деформации //Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып. Динам. и прочность машин. — 2005. — №20. — С. 129-134.
8. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. — К.: Наук. думка, 1984. — 344 с.

Получено 06.09.2006