*Динамические системы, вып. 21 (2006), 61–66*

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

# Обобщенная полугруппа, образованная произведением полугруппы и семейства линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве

**Э.Э. Муртазаев**

Крымский инженерно-педагогический университет
Симферополь 95000

**Аннотация.** Для однопараметрического семейства линейных ограниченных операторов, заданных в банаховом пространстве, которое является произведением полугруппы и семейства линейных ограниченных операторов, находятся условия, при которых оно образует обобщенную полугруппу операторов и дается вид ее инфинитезимальных операторов.

В связи с изучением квази-дифференциальных уравнений М. Ричардсон в работе [1] ввел понятие обобщенной полугруппы операторов. Далее, в статьях [2] и [3] авторами были получены формула представления обобщенной полугруппы линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве и ряд оценок для нормы разности обобщенной и данной полугруппы операторов [4]. В статье [5] автором найдены условия, при которых семейство состоящее в виде суммы полугруппы и семейства линейных ограниченных операторов, заданных в банаховом пространстве образует обобщенную полугруппу и найдены ее инфинитезимальные операторы.

Целью настоящей работы является получить мультипликативный аналог теоремы [5], то есть при соответствующих условиях доказать, что однопараметрическое семейство вида $S_t = \{T_t C(t)\}_{t\geq 0}$, (где $\{T_t\}_{t\geq 0}$ — полугруппа линейных ограниченных операторов и $\{C(t)\}$ — семейство линейных ограниченных операторов, отображающих банахово пространство $X$ в себя) образует обобщенную полугруппу и найти ее инфинитезимальные операторы.

Пусть $X$ — Банахово пространство, $L(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов, отображающих $X$ в себя [6].

**Определение 1.** [2] Однопараметрическое семейство $\{S_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ называется обобщенной полугруппой, если:

1. $S_{t+s} - S_t S_s = F(t, s)$, при любых $t \geq 0$, $s \geq 0$.

2. $S_t S_s = S_s S_t$, при любых $t \geq 0$, $s \geq 0$.

3. $S_0 = I$,($I$ — единичный оператор).

Двухпараметрическое семейство операторов $\{F(t,s)\} \subset L(X)$ может быть рассмотрено как отклонение от полугруппового соотношения семейства $\{S_t\}_{t\geq 0}$. Ясно, что если $F(t,s) = 0$ ($0$ — нулевой оператор), то $\{S_t\}_{t\geq 0}$ — полугруппа. Из определения следует:

а) $F(t,s) = F(s,t)$, при любых $t \geq 0$, $s \geq 0$.

б) $F(t,0) = F(0,s) = 0$,

в) $F(t,t) = S_{2t} - S_t^2$.

**Определение 2.** [2] Если для любых $t \geq 0$, $s \geq 0$ производные

$$\frac{dS_t}{dt} = \lim_{n\to 0} \frac{S_{t+h} - S_t}{h} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(t,s)}{\partial s} = \lim_{n\to 0} \frac{F(t,s+h) - F(t,s)}{h}$$

существуют и непрерывны в равномерной операторной топологии [6], то операторы $A = \frac{dS_t}{dt}\,|_{t=0}$, $Q(t) = \frac{\partial F(t,s)}{\partial s}\,|_{s=0}$ называются соответственно первым и вторым инфинитезимальным операторами обобщенной полугруппы $\{S_t\}_{t\geq 0}$.

Основным результатом настоящей статьи является теорема, приведенная ниже.

**Теорема.** *Пусть однопараметрическое семейство $\{S_t\} \subset L(X)$ имеет вид: $S_t = T_t C(t)$, где $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ полугруппа и $\{C(t)\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ непрерывно дифференцируемы в равномерной операторной топологии. Если выполняются условия:*

1. *$T_t C(s) = C(s) T_t$, при любых $t \geq 0$, $s \geq 0$.*

2. *$C(t)C(s) = C(s)C(t)$, при любых $t \geq 0$, $s \geq 0$.*

3. *$C(0) = I$, ($I$ — единичный оператор).*

*Тогда:*

**1.** *Семейство $\{S_t\}_{t\geq 0}$ является обобщенной полугруппой с инфинитезимальными операторами:*

$$A = A_0 + C'(0) \ \text{(первый инфинитезимальный оператор)},$$
$$Q(t) = T_t C'(t) - S_t C'(0) \ \text{(второй инфинитезимальный оператор)},$$

*где $A_0$ — инфинитезимальный оператор полугруппы $\{T_t\}$.*

**2.** *Семейство $\{C_t\}_{t\geq 0}$ — является обобщенной полугруппой и справедливы соотношения: $A = A_0 + A_1$, $Q(t) = T_1 Q_1(t)$, где $A_1$ — первый инфинитезимальный оператор, $Q_1(t)$ — второй инфинитезимальный оператор обобщенной полугруппы $\{C_t\}_{t\geq 0}$.*

*Доказательство.* Проверим, что для семейства $S_t = \{T_tC(t)\}$ выполняются условия определения 1.

$$S_{t+s} - S_tS_s = T_{t+s}C(t+s) - T_tC(t)\cdot T_sC(s) = T_{t+s}C(t+s) - T_tT_sC(t)C(s) = \\ = T_{t+s}C(t+s) - T_{t+s}C(t)C(s) = T_{t+s}(C(t+s) - C(t)C(s)).$$

Положим: $F(t,s) = T_{t+s}(C(t+s) - C(t)C(s))$. Тогда

$$S_tS_s = T_tC(t)T_sC(s) = T_sC(s)T_tC(t) = S_sS_t, \\ S_0 = T_0C(0) = I\cdot I = I.$$

Семейство $\{F(t,s)\}$ обладает свойствами а), б), в),

а) $F(t,s) = T_{t+s}(C(t+s) - C(t)C(s)) = T_{s+t}(C(s+t) - C(s)C(t)) = F(s,t)$.

б) $F(t,0) = T_t(C(t) - C(t)C(0)) = T_t(C(t) - C(t)) = T_t\cdot 0 = 0$.
$F(0,s) = T_s(C(s) - C(0)C(s)) = T_s(C(s) - C(s)) = T_s\cdot 0 = 0$.

в) $F(t,t) = T_{t+t}(C(t+t) - C(t)C(t)) = T_{2t}C(2t) - T_tT_tC(t)C(t) =$
$= S_{2t} - T_tC(t)T_tC(t) = S_{2t} - S_t^2$.

Следовательно, семейство $S_t = \{T_tC(t)\}$ — является обобщенной полугруппой линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве $X$.

Теперь найдем инфинитезимальные операторы построенной обобщенной полугруппы. Так как семейства $\{T_t\}_{t\geq 0}$ и $\{C_t\}_{t\geq 0}$ непрерывно дифференцируемы в равномерной операторной топологии, то существуют пределы:

$$A = \lim_{h\to 0}\frac{S_h - I}{h}, \quad Q(t) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t,h)}{h}.$$

Тогда

$$A = \lim_{h\to 0}\frac{S_h - I}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{T_hC(h) - I}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{T_hC(h) - C(h) + C(h) - I}{h} = \\ = \lim_{h\to 0}\frac{(T_h - I)C(h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{C(h) - I}{h} = A_0C(0) + C'(0) = A_0 + C'(0)$$

или $A = A_0 + C'(0)$.

$$Q(t) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{T_{t+h}(C(t+h) - C(t)C(h))}{h} = \\ = \lim_{h\to 0}\frac{T_{t+h}(C(t+h) - C(t) + C(t) - C(t)C(h))}{h} = \\ = \lim_{h\to 0}\frac{T_{t+h}(C(t+h) - C(t))}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{T_{t+h}C(t)(C(h) - I)}{h} = \\ = T_tC'(t) - T_tC(t)\cdot C'(0) = T_tC'(t) - S_tC'(0).$$

Итак, имеем: $A = A_0 + C'(0)$ и $Q(t) = T_tC'(t) - S_tC'(0)$. Теперь докажем вторую часть теоремы. Введем обозначение $F_1(t,s) = C(t+s) - C(t)C(s)$. По условию теоремы имеем: $C(t)C(s) = C(s)C(t)$, $C(0) = I$. Проверим, что семейство $F_1(t,s)$ обладает свойствами а), б), в).

а) $F_1(t,s) = C(t+s) - C(t)C(s) = C(s+t) - C(s)C(t) = F_1(s,t)$.

б) $F_1(t,0) = C(t) - C(t) = 0$.
$F_1(0,s) = C(s) - C(s) = 0$.

в) $F_1(t,t) = C(2t) - C(t)C(t) = C(2t) - C^2(t)$.

Обозначим инфинитезимальные операторы обобщенной полугруппы $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ через $A_1$ и $Q_1(t)$. Тогда $A = A_0 + C'(0) = A_0 + A_1$

$$\begin{aligned} Q(t) = T_tC'(t) - S_tC'(0) = T_tC'(t) - T_tC(t)C'(0) = T_t(C'(t) - C(t)C'(0)) = \\ = T_t\Big[\lim_{h\to 0}\frac{C(t+h)-C(t)}{h} - C(t)\lim_{h\to 0}\frac{C(h)-I}{h}\Big] = \\ = T_t\Big[\lim_{h\to 0}\frac{C(t+h)-C(t)-C(t)C(h)+C(t)}{h}\Big] = \\ = T_t\lim_{h\to 0}\frac{C(t+h)-C(t)C(h)}{h} = T_t\lim_{h\to 0}\frac{F_1(t,h)}{h} = T_tQ_1(t). \end{aligned}$$

Итак, получили $A = A_0 + A_1$, $Q(t) = T_tQ_1(t)$ — связь между инфинитезимальными операторами обобщенных полугрупп $\{S_t\}$ и $\{C(t)\}$. □

**Следствие.** *Если* $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ *—полугруппа, то* $\{S_t = T_tC(t)\}$ *также является полугруппой.*

*Доказательство.* Имеем $C(t+s) = C(t)C(s)$, $C(0) = I$. Тогда:

$$\begin{aligned} S_{t+s} = T_{t+s}C(t+s) = T_tT_sC(t)C(s) = T_tC(t)T_sC(s) = S_tS_s, \\ S_0 = T_0C(0) = I\cdot I = I. \end{aligned}$$

□

*Пример.* В банаховом пространстве $C[0,\infty)$ ограниченных равномерно непрерывных функций на $[0,\infty)$ [7] определим семейства операторов $\{T_t\}_{t\geq 0}$ и $\{C_t\}_{t\geq 0}$ следующим образом:
$T_tf = f(x+t), t \geq 0$ — полугруппа сдвига с инфинитезимальным оператором $A_0 = \frac{d}{dx}$ (дифференциальный оператор) $C(t)f = \frac{1}{1+t}f(x)$, $t \geq 0$ семейство операторов подобия.

I) Проверим, что для этих семейств выполняются все условия теоремы.

1. $T_tC(s)f = T_t\big(\frac{1}{1+s}f(x)\big) = \frac{1}{1+s}T_tf = \frac{1}{1+s}f(x+t)$
$C(s)T_tf = C(s)f(x+t) = \frac{1}{1+s}f(x+t)$

2. $C(t)C(s)f = C(t)\frac{1}{1+s}f = \frac{1}{1+s}C(t)f = \frac{1}{(1+s)(1+t)}f(x)$
   $C(s)C(t)f = C(s)\frac{1}{1+t}f = \frac{1}{1+t}C(s)f = \frac{1}{(1+t)(1+s)}f(x)$

3. $C(0)f = \frac{1}{1+0}f = f(x)$, т. е. $C(0) = I$

и построенная по этим семействам обобщенная полугруппа имеет вид:

$$S_tf = T_tC(t)f = \frac{1}{1+t}f(x+t), f \in C[0,\infty), t \geq 0.$$

Найдем инфинитезимальные операторы этой обобщенной полугруппы. Так как $C'(t)f = (C(t)f(x))'_t = \left(\frac{1}{(1+t)}f(x)\right)'_t = -\frac{1}{(1+t)^2}f(x)$, то $C'(0)f = -\frac{1}{(1+0)^2}f(x) = -f(x)$. Тогда $Af = (A_0+C'(0))f = \left(\frac{d}{dx}-I\right)f = f'(x)-f(x)$ — первый инфинитезимальный оператор.

$$Q(t)f = (T_tC'(t) - S_tC'(0))f = T_t\Big(-\frac{1}{(1+t)^2}f\Big) - S_t(-f) = -\frac{1}{(1+t)^2}T_tf + S_tf =$$
$$= -\frac{f(x+t)}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t}f(x+t) = \frac{-1+1+tf(x+t)}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2}f(x+t)$$

— второй инфинитезимальный оператор.

Итак, получили:

$Af = \left(\frac{d}{dx} - I\right)f = f'(x) - f(x),$

$Q(t) = \frac{1}{(1+t)^2}f(x+t).$

II) Проверим, что $C(t)f = \frac{1}{1+t}f(x)$ образует обобщенную полугруппу:

$$(C(t+s) - C(t)C(s))f = C(t+s)f - C(t)C(s)f =$$
$$= \Big(\frac{1}{1+t+s} - \frac{1}{(1+t)(1+s)}\Big)f(x) = \frac{(1+t)(1+s)-1-t-s}{(1+t+s)(1+t)(1+s)}f(x) =$$
$$= \frac{1+s+t+ts-1-t-s}{(1+t+s)(1+t)(1+s)}f(x) = \frac{ts}{(1+t+s)(1+t)(1+s)}f(x);$$

Итак, имеем $F_1(t,s)f = \frac{ts}{(1+t+s)(1+t)(1+s)}f(x)$.

1. $C(t)C(s)f = C(t)\big(\frac{1}{1+s}f\big) = \frac{1}{1+s}C(t)f = \frac{1}{(1+t)(1+s)}f(x)$
   $C(s)C(t)f = C(s)\big(\frac{1}{1+t}f\big) = \frac{1}{1+t}C(s)f = \frac{1}{(1+t)(1+s)}f(x)$,
   т. е. $C(t)C(s) = C(s)C(t)$.

2. $C(0)f = \frac{1}{1+0}f = f(x)$, т. е. $C(0) = I$

   а) $F_1(t,s)f = \frac{tsf(x)}{(1+t+s)(1+t)(1+s)} = \frac{s\cdot tf(x)}{(1+t+s)(1+t)(1+s)} = F_1(s,t)f$

б) $F_1(t,0)f = \frac{t\cdot 0 f(x)}{(1+t)(1+t)} = 0$
$F_1(0,s)f = \frac{s\cdot 0 f(x)}{(1+s)(1+0)(1+s)} = 0,$
т. е. $F_1(t,0) = F_1(0,s) = 0$ (0 — нулевой оператор)

в) $F_1(t,t)f = \frac{t\cdot t f(x)}{(1+t+t)(1+t)(1+t)} = \frac{t^2}{(1+2t)(1+t)^2} f(x)$

$$(C(2t) - C^2(t))f = \Big(\frac{1}{1+2t} - \frac{1}{(1+t)^2}\Big) f(x) = \frac{1+2t+t^2-1-2t}{(1+2t)(1+t)^2} f(x) =$$
$$= \frac{t^2}{(1+2t)(1+t)^2} f(x), \text{т. е. } \; F_1(t,t) = C(2t) - C^2(t).$$

Теперь найдем инфинитезимальные операторы обобщенной полугруппы $\{C(t)\}_{t\geq 0}$:
$A_1 f = (A - A_0)f = \big(\frac{d}{dx} - I - \frac{d}{dx}\big) f = -f(x)$, т. е. $A_1 f = -f(x)$

$$Q_1(t)f = \lim_{h\to 0} \frac{F_1(t,h)}{h} f = \lim_{h\to 0} \frac{(C(t+h) - C(t)C(h))}{h} f =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(\frac{1}{1+t+h} - \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1+h}\big)}{h} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{t}{(1+t+h)(1+t)(1+h)} f(x) = \frac{t}{(1+t)^2} f(x)$$

## Список цитируемых источников


1. *J.M.Richardson.* Quasi-differential equations and generalized semi-group relations. // Journal of math. anal. and appl. — 1961. — Т. 2, № 2. — С. 293–298.
2. *A.B.BuchE, A.T.Bharucha Reid* On some functional equations associated with semi-groups of operators. // Proc. Nat. Acad. of Sci. (USA), 1968. — Т. 60, — С. 1170–1174.
3. *A.B.BuchE, A.T.Bharucha Reid* On the general semi-group relation in the strong operator topology. // Ind. Math., 1971. — Т. 33, — С. 23–31.
4. *Дж. Голдстейн* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Вища школа, 1989. — 347 с.
5. *Муртазаев Э.Э.* Операторные соотношения, связанные с обобщенной полугруппой линейных операторов // Ученые записки Крымского инженерно-педагогического университета. — Симферополь, 2006. — № 8. — С. 10–13.
6. *Н.Данфорд, Д.Шварц.* Линейные операторы // Общая теория. — Москва: изд-во иностранная литература, 1962. — Т. 1, — 895 с.
7. *К.Иосида.* Функциональный анализ. — Москва: изд-во Мир, 1967. — 624 с.


*Получено 06.12.2006*