Динамические системы, вып. 22 (2007), 73–82

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9:532

Малые движения вязкой стратифицированной жидкости

Д. О. Цветков
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: tsvet@crimea.edu*

Аннотация. В работе рассмотрена задача о малых движениях вязкой жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд и равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси, плотность которой в состоянии относительного равновесия имеет устойчивую стратификацию. Доказана теорема существования сильного (по времени) решения начально-краевой задачи.

1. Введение

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложения в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1] — [4] и работы [5] — [8], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим вязкую стратифицированную несжимаемую жидкость (с динамическим коэффициентом вязкости μ), частично заполняющую некоторый сосуд и равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. В состоянии относительного равновесия жидкость занимает область Ω, ограниченную твердой стенкой S и равновесной поверхностью Γ.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на равновесной поверхности Γ. При этом стационарное распределение плотности жидкости ρ_0 зависит от формы параболоида свободного вращения, то есть является функцией всех координат: $\rho_0 = \rho_0(x_1, x_2, x_3)$. Отметим также, что равномерная скорость вращения сосуда запишется в виде $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{e}_3$. Будем считать для определенности, что $\omega_0 > 0$.

В состоянии равномерного вращения давление в жидкости распределено по закону

$$\nabla P_0(x) = \rho_0(x)\nabla\left(\frac{1}{2}\omega_0^2(x_1^2+x_2^2) - gx_3\right) =: \rho_0(x)\nabla U_0 \quad (\text{в } \Omega). \tag{2.1}$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к равномерному вращению. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, — поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления (2.1), а через $\rho = \rho(t,x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x)$.

Линеализированные уравнения для определения функций $\vec{u}$, p, ρ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{u}\times\vec{e}_3) = \rho_0^{-1}(-\nabla p + \rho\nabla U_0 + \mu\Delta\vec{u}) + \vec{f} \quad (\text{в } \Omega),\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних массовых сил.

В дальнейшем будем рассматривать лишь основной случай устойчивой стратификации по плотности:

$$\begin{aligned}
&0 < N_{min}^2 \le N^2(x) \le N_{max}^2 =: N_0^2 < \infty,\\
&N^2(x) := \frac{\nabla U_0\cdot\nabla\rho_0}{\rho_0(x)}, \quad \rho_0(0) > 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $N^2(x)$ — квадрат частоты Вяйсяля-Брента (частоты плавучести).

На твердой стенке S для вязкой жидкости должно выполнятся условие прилипания

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S). \tag{2.4}$$

Кинематические и динамические условия на поверхности Γ удобно записать в криволинейной системе координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$, в которой уравнение равновесной поверхности Γ имеет вид $\xi^3 = 0$, а коэффициент Ламе $h_3|_\Gamma = 1$. Тогда, считая, что свободная движущиеся поверхность $\Gamma(t)$ описываются уравнениями $\xi^3 = \zeta(t,\xi^1,\xi^2)$, приходим к линеаризованному кинематическому условию:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \vec{u}\cdot\vec{n} \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.5}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega$ и направленный вне Ω.

Динамические условия на $\Gamma(t)$ состоят в равенстве нулю касательных напряжений и в равенстве нормального напряжения скачку давлений, возникающему вследствие действия центробежных и гравитационных сил. После линеаризации они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mu(u_{i,3} + u_{3,i}) = 0 \quad (i = 1,2, \quad \text{на } \Gamma),\\
&-p + 2\mu u_{3,3} = a\zeta \quad (\text{на } \Gamma),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $a = a(\widehat{\xi}) := (\nabla P_0, \vec{n})|_\Gamma$, $\widehat{\xi} := (\xi^1, \xi^2)$, а через $u_{i,k}$ обозначены ковариантные производные ковариантного вектора u_i по переменной ξ^k.

В начальный момент времени естественно считать заданными

$$\vec{u}(x,0) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(x,0) = \rho^0(x) \quad (\, x \in \Omega\,), \quad \zeta(\hat{x},0) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\, \hat{x} \in \Gamma\,). \tag{2.7}$$

Таким образом, задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости в открытом равномерно вращающемся сосуде сводится к решению уравнений (2.2) при краевых и начальных условиях (2.4) — (2.7).

3. Функциональные пространства

Начально-краевую задачу (2.2) — (2.7) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования уравнений (2.2) на ортогональные подпространства [9].

Свяжем с функцией $\rho_0 = \rho_0(x)$ гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega \rho_0(x)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}d\Omega. \tag{3.1}$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0),$$

где

$$\vec{J}_0(\Omega,\rho_0) = \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\ div\vec{u} = 0 \quad (\textit{в}\ \Omega), \quad u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\textit{на}\ \partial\Omega)\}.$$
$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\ \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p, \quad \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\textit{на}\ S),$$
$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad (\textit{в}\ \Omega), \quad \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\,\},$$
$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\ \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0 \quad (\textit{на}\ \Gamma)\,\}.$$

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := \int_\Omega \rho_0 \frac{N^2(x)}{|\nabla\rho_0|^2}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\eta,\zeta)_0 := \int_\Gamma a\eta(\hat{x})\overline{\zeta(\hat{x})}\,d\Gamma, \quad \hat{x} \in \Gamma.$$

Предполагаем в дальнейшем, что состояние относительного равновесия вращающейся жидкости в сосуде статически устойчиво по линейному приближению, это условие равносильно тому, что

$$a(\widehat{\xi}) \geq a_0 > 0 \quad (\,\widehat{\xi} \in \Gamma\,). \tag{3.2}$$

Введем также пространство $H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$ скалярных функций $\{p(x)\}$ таких, что

$$\|p\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)} = \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}|\nabla p|^2\, d\Omega < \infty, \ \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0. \tag{3.3}$$

4. Переход к операторному уравнению

Будем считать, что при каждом t отдельные слагаемые в (2.2) являются элементами $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, тогда

$$\begin{aligned} \vec{u}(t,x) &\in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) = \\ &= \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)|\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (\text{ в } \Omega\,),\ u_n = 0 \ (\text{ на } S\,)\,\}. \\ \rho_0^{-1}\nabla p(t,x) &\in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{G}(\Omega,\rho_0) = \\ &= \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)|\ \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p \ (\text{ в } \Omega\,),\ \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Пусть $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на $\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. При этом

$$\begin{gathered} P_{0,S}\vec{u}(t,x) = \vec{u}(t,x), \quad P_{0,S}(\rho_0^{-1}\nabla p) = \rho_0^{-1}\nabla\widetilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0), \\ P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1}\nabla p) = \rho_0^{-1}\nabla\varphi \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Применим ортопроекторы $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ к первому уравнению (2.2), с учетом (4.2) получим

$$\vec{0} = -\,\rho_0^{-1}\nabla\varphi + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0) + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) + P_{0,\Gamma}\vec{f}(t,x), \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0 P_{0,S}(\vec{u}\times\vec{e}_3) = -\rho_0^{-1}\nabla\widetilde{p} + P_{0,S}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0) + \\ + P_{0,S}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) + P_{0,S}\vec{f}(t,x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Соотношение (4.3) показывает, что $\rho_0^{-1}\nabla\varphi(t,x)$ может быть найдено, если известно решение $(\vec{u}, \rho)$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (4.4), а также условий из (2.6) с соответствующей заменой $p \to \widetilde{p}$, так как

$$p = \widetilde{p} + \varphi, \quad \varphi = 0 \quad (\text{ на } \Gamma\,).$$

Обозначим через B_0 оператор, определенный по закону

$$B_0 := P_\Gamma a(\widehat{\xi}) P_\Gamma, \tag{4.5}$$

где $a(\widehat{\xi})$ — заданная на Γ функция (2.6), а через P_Γ обозначен ортопроектор на $H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. Так как $a(\widehat{\xi})$ — непрерывная на Γ функция, то B_0 — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в H_0. Кроме того, согласно (3.2), оператор B_0 положительно определен в H_0.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА I.

По заданной функции $\psi(\hat{x}),\ \hat{x} \in \Gamma$, найти функцию $p_1(x),\ x \in \Omega$, являющуюся решением задачи

$$\nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla p_1) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla p_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S),$$
$$(\rho_0^{-1}|_{\hat{x}\in\Gamma}) p_1 = \psi := B_0 \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \psi \, d\Gamma = 0.$$

Это аналог известной задачи Зарембы. Она имеет единственное решение $p_1 \in H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$ при $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \bigcap H_0$, где $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ — пространство Соболева-Слободецкого (см. [10]).

Если $p_1(x)$ — решение задачи I для $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}$, то $\rho_0^{-1} \nabla p_1(x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ и

$$\rho_0^{-1}(x) \nabla p_1(x) = G\psi = G B_0 \zeta, \tag{4.6}$$

где $G : H_\Gamma^{\frac{1}{2}} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ есть линейный ограниченный оператор (см. [9]).

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА II.

По заданной функции $\vec{f}_1$ найти функции $\vec{u}(x)$ и $p_2(x)$, являющиеся решением краевой задачи

$$\rho_0^{-1} \nabla p_2 - P_{0,S}(\rho_0^{-1} \mu \Delta \vec{u}) = \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S),$$
$$\mu(u_{i,3} + u_{3,i}) = 0 \quad (i = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma), \quad -p_2 + 2\mu u_{3,3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Известно (см. [6]), что эта задача имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{u} = \mu^{-1} A^{-1} \vec{f}_1$$

для правой части из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, где A — оператор задачи II. При этом оператор A есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор.

С учетом выше сказанного вернемся к начально-краевой задаче (2.2) — (2.7), точнее, после отделения тривиального решения (4.3), к соответствующей начально-краевой задаче для уравнения (4.4). Представим $\rho_0^{-1} \nabla \widetilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ в виде

$$\rho_0^{-1} \nabla \widetilde{p} = \rho_0^{-1} \nabla p_1 + \rho_0^{-1} \nabla p_2, \quad \rho_0^{-1} \nabla p_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad (i = 1, 2) \tag{4.7}$$

и пусть p_1 есть решение вспомогательной задачи I для $\psi = B_0 \zeta$, а p_2 — функция из вспомогательной задачи II.

Теорема 1. *Классическое решение начально-краевой задачи* (2.2) — (2.7) *есть решение задачи Коши для системы дифференциально операторных уравнений:*

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + 2i\omega_0 S_0\vec{u} + GB_0\zeta + \mu A\vec{u} + C\rho = P_{0,S}\vec{f} =: \vec{f}_{0,S}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} - \gamma_n\vec{u} = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \\ \dfrac{d\rho}{dt} - C^*\vec{u} = 0, \quad \rho(0) = \rho^0, \end{cases} \tag{4.8}$$

и уравнения (4.3). *Здесь A есть оператор задачи II, G оператор, связанный с задачей I, γ_n оператор следа:*

$$\gamma_n\vec{u} := u_n = \vec{u}\cdot\vec{n}|_\Gamma, \quad \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega,\rho_0) := \{\, \vec{v} \in \vec{H}^1(\Omega,\rho_0)|\ div\vec{v} = 0\,(\,в\,\Omega\,),\ \vec{v} = \vec{0}\,(\,на\,S\,)\,\},$$

$C^*\vec{u} := -\nabla\rho_0\cdot\vec{u}$, $C\rho := -P_{0,S}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0)$, $S_0\vec{u} := iP_{0,S}(\vec{u}\times\vec{e}_3)$, *а $\vec{u}$, ζ и ρ считаются функциями t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.*

Лемма 2. *1. Оператор γ_n может быть расширен до оператора $\tilde{\gamma}_n$ с областью определения $D(\tilde{\gamma}_n) = \{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) : \ \tilde{\gamma}_n\vec{v} \in H_0\}$, в этом случае оператор $\tilde{\gamma}_n$ есть оператор, сопряженный к оператору G: $\tilde{\gamma}_n = G^*$.*

2. Для операторов A и $\tilde{\gamma}_n$ следующие включения имеют место:

$$D(A) \subset D(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega,\rho_0) \subset D(\tilde{\gamma}_n).$$

3. Операторы $C : \mathfrak{L}_2(\Omega) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$ и $C^* : \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \to \mathfrak{L}_2(\Omega)$, взаимно сопряжены и

$$\|C\| = \|C^*\| \leq N_0.$$

4. Оперратор S_0 обладает следующими свойствами: $S_0 = S_0^*$, $\quad \|S_0\| = 1$.

Доказательство. Утверждение пуктов 1 и 3 доказывается в работах [6], [8]; пунктов 2, 3 — в работе [9]. □

С целью получения более симметричного вида операторной матрицы, отвечающей задаче (2.2) – (2.7), введем еще в (4.8) замену $B_0^{\frac{1}{2}}\zeta = \widehat{\zeta}$ и применим (положительно определенный и ограниченный) оператор $B_0^{\frac{1}{2}}$ к обеим частям второго уравнения системы (4.8). В новых переменных будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \widehat{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu A + 2i\omega_0 S_0 & GB_0^{\frac{1}{2}} & C \\ -B_0^{\frac{1}{2}}G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \widehat{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{0,S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\Big(\vec{u}(0); \widehat{\zeta}(0); \rho(0)\Big)^t = \Big(\vec{u}^0; B_0^{\frac{1}{2}}\zeta^0; \rho^0\Big)^t.$$

Определение 1. Функции $\vec{u}(t,x)$, $\zeta(t,\hat{x})$, $\rho(t,x)$ и $p(t,x)$ назовем сильным решением задачи (2.2) – (2.7), если выполнено (4.3) и $\{\vec{u};\widehat{\zeta};\rho\}$ есть сильное решение задачи (4.9) в пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)\oplus H_0\oplus\mathfrak{L}_2(\Omega)$. Это значит, что для всех $t\geq 0$ функции $\vec{u}=\vec{u}(t)\in\mathcal{D}(A)$, $B_0^{\frac12}\widehat{\zeta}(t)\in\mathcal{D}(G)$, $\rho=\rho(t)\in\mathfrak{L}_2(\Omega)$ и функции $d\vec{u}/dt$, $d\widehat{\zeta}/dt$, $d\rho/dt$, $A\vec{u}(t)$, $S_0\vec{u}$, $GB_0^{\frac12}\widehat{\zeta}(t)$, $C\rho(t)$, $B_0^{\frac12}G^*\vec{u}(t)$, $C^*\vec{u}(t)$ есть непрерывные по t, кроме того, уравнение и начальное условие (4.9) выполнены.

Для удобства, рассмотрим задачу (4.9) при $\mu=1$. Свяжем с ней оператор-матрицу

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & GB_0^{\frac12} & C\\ -B_0^{\frac12}G^* & 0 & 0\\ -C^* & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

которая имеет плотную в $\mathcal{H}=\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)\oplus H_0\oplus\mathfrak{L}_2(\Omega)$ область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)=\mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{D}(GB_0^{\frac12})\oplus\mathfrak{L}_2(\Omega). \tag{4.11}$$

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{A}_0$ с областью определения* (4.11) *есть аккретивный оператор, то есть для любых $(\vec{u};\widehat{\zeta};\rho)^t\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ выполнено неравенство*

$$Re\left(\mathcal{A}_0\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \widehat{\zeta}\\ \rho\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \widehat{\zeta}\\ \rho\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}}=(A\vec{u},\vec{u})\geq 0. \tag{4.12}$$

Отметим, что оператор $\mathcal{A}_0$ не является максимальным аккретивным оператором. Для перехода к максимальному аккретивному оператору представим $(\vec{u};\widehat{\zeta};\rho)^t = e^{at}(\vec{v};\eta;\sigma)^t$, $a>0$, и, подставляя в (4.9), получим следующую задачу Коши

$$\frac{dy}{dt}+\mathcal{A}_a y+\mathcal{S}y=f(t),\quad y(0)=y^0, \tag{4.13}$$

где

$$y(t)=(\vec{v}(t);\eta(t);\sigma(t))^t,\quad f(t)=(\vec{f}_{0,S}(t);0;0)^t e^{-at},\quad \mathcal{S}:=\mathrm{diag}(2i\omega_0S_0;0;0),$$

$$\mathcal{A}_a:=\mathcal{A}_0+a\mathcal{I}=\begin{pmatrix} A_a & GB_0^{\frac12} & C\\ -B_0^{\frac12}G^* & aI & 0\\ -C^* & 0 & aI\end{pmatrix},\quad A_a=A+aI,$$

$\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$.

Обозначим

$$Q_1:=B_0^{\frac12}G^*A_a^{-\frac12},\quad Q_1^+:=A_a^{-\frac12}GB_0^{\frac12},\quad \mathcal{D}(Q_1^+)=\mathcal{D}(GB_0^{\frac12})=B_0^{-\frac12}\mathcal{D}(G). \tag{4.14}$$

Лемма 4. $\quad Q_1^+\subset Q_1^*,\quad Q_1^+=Q_1^*|_{\mathcal{D}(GB_0^{\frac12})},\quad \overline{Q_1^+}=Q_1^*.$

Поскольку всякий аккретивный оператор допускает расширение до максимального аккретивного оператора, то дальнейшее исследование задачи (4.13) основывается на расширении оператора $\mathcal{A}_a$ до максимального аккретивного оператора.

Лемма 5. *Замыкание $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$ оператора $\mathcal{A}_a$ есть максимальный равномерный аккретивный оператор. При этом*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\, y = (\vec{v};\eta;\sigma)^t \in \mathcal{H} \mid \vec{v} + A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \eta \in D(A_a)\,\}, \tag{4.15}$$

и справедливы следующие факторизации:
а) в виде Шура - Фробениуса

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q_1 A_a^{-\frac{1}{2}} & I_\Gamma & 0 \\ -Q_2 A_a^{-\frac{1}{2}} & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1 Q_2^* \\ 0 & Q_2 Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^* & A_a^{-\frac{1}{2}} Q_2^* \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ T_1 & I_\Gamma & 0 \\ T_2 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1 Q_2^* \\ 0 & Q_2 Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix},$$

$$T_1 := -Q_1 A_a^{-\frac{1}{2}}, \quad T_2 := -Q_2 A_a^{-\frac{1}{2}}, \quad T_3 := A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^*, \quad T_4 := A_a^{-\frac{1}{2}} Q_2^*,$$
$$\mathcal{W}_1 := aI_\Gamma + Q_1 Q_1^*, \qquad \mathcal{W}_2 := aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2 Q_2^*; \tag{4.16}$$

б) с симметрическим окаймлением

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & Q_1^* & Q_2^* \\ -Q_1 & aI_\Gamma & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix},$$
$$Q_2 := C^* A_a^{-\frac{1}{2}}, \quad Q_2^* = A_a^{-\frac{1}{2}} C. \tag{4.17}$$

Доказательство аналогично приведенному в [8].

5. Теорема о существовании сильного решения

Вместо задачи (4.13) рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y + \mathcal{S}y = f(t), \quad y(0) = y^0. \tag{5.1}$$

используя факторизацию Шура - Фробениуса для оператора $\mathcal{A}$, осуществим замену

$$\begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \\ \sigma \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \eta_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

и применим к (5.1) слева оператор

$$\begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix}.$$

В результате приходим к следующей задаче:

$$\frac{dz}{dt} + (\mathcal{I} + \mathcal{T})\mathcal{A}_\omega z + \widetilde{\mathcal{S}} z = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad z := (\vec{v}_1; \eta_1; \sigma_1)^t, \tag{5.3}$$

где

$$\mathcal{I} + \mathcal{T} := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_3T_1 + T_4T_2 & T_3 & T_4 \\ T_1 & 0 & 0 \\ T_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\omega := \begin{pmatrix} A_b & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1Q_2^* \\ 0 & Q_2Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathcal{S}} := \begin{pmatrix} S & -ST_3 & -ST_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом оператор $\mathcal{T}$ – компактный, $\widetilde{\mathcal{S}}$ – ограниченный, оператор $\mathcal{A}_\omega$ есть самосопряженный положительно определенный, имеющий компактный обратный оператор $\mathcal{A}_\omega^{-1}$.

Так как для оператора $(-\mathcal{A}_\omega)$ уравнение

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_\omega z = 0, \quad z = (\vec{v}_1; \zeta_1; \sigma_1)^t, \tag{5.4}$$

является абстрактным параболическим (см. [12], с. 104, с. 121) и соответствующая полугруппы аналитична в секторе, содержащем положительную полуось, то (см. [12], с. 183) уравнение

$$\frac{dz}{dt} + \left(\mathcal{I} + (\mathcal{T} + \widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1})\right)\mathcal{A}_\omega z = 0, \tag{5.5}$$

где оператор $\mathcal{T} + \widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1}$ компактный, будет также абстрактным параболическим (см. [12], с. 181). Соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную полуось.

Таким образом, если в уравнении

$$\frac{dz}{dt} + \left(\mathcal{I} + (\mathcal{T} + \widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1})\right)\mathcal{A}_\omega z = f(t) \tag{5.6}$$

функция f удовлетворяет условию Гёльдера, т.е. для каждого $\tau \in \mathbb{R}^+$ найдутся такие числа $K = K(\tau) > 0$, $\gamma = \gamma(\tau) \in (0, 1]$, что

$$\|f(t) - f(s)\| \leq K|t - s|^\gamma \quad \text{при} \quad 0 \leq s, t \leq \tau,$$

тогда, с учетом (5.2) и возможности перейти от (5.1) к уравнению, отвечающему не замкнутому оператору $\mathcal{A}$, а его сужению $\mathcal{A}_a$ (см. [8]); задача (4.13) (см. [13], с. 130) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\begin{aligned} &\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A), \quad B_0^{\frac{1}{2}}\zeta^0 \in \mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}, \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \\ &\vec{f}(t) \in C^\gamma(\,[0,T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)\,), \quad \gamma \in (0,1], \end{aligned} \tag{5.7}$$

для задачи Коши (4.13)*. Тогда она имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$*.*

Как следствие теоремы 2 имеем следующий результат.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (5.7)*, то задача* (2.2) – (2.7) *имеет единственное сильное (в смысле определения 1) решение на промежутке* $[0,T]$*.*

Доказательство теоремы основывается на переходе от задачи (4.13) с обратной заменой к задаче (4.9).

Список цитируемых источников

1. *Краусс В.К.* Внутренние волны. — Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
2. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. — М.: Мир, 1977.
3. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
4. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
5. *Копачевский Н.Д., Темнов А.Н.* Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1986, — Т.26, № 5. — С. 734 — 755.
6. *Копачевский Н.Д., Темнов А.Н.* Свободные колебания вязкой стратифицированной жидкости в сосуде // Деп. в ВИНИТИ 16.08.1983, № 4531-83 ДЕП, 45 с.
7. *Темченко Т.П.* Спектральные и эволюционные задачи колебаний многослойных стратифицированных жидкостей: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Симферополь, 1989. — 147 с.
8. *Цветков Д.О.* Математические проблемы теории колебания стратифицированной жидкости: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.03. — Симферополь, 2005. — 180 с.
9. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
10. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 455 с.
11. *Gagliardo E.* Caratterizioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminare matematico della universita di Padora, 1957, Vol. XXVII.
12. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1967. – 464 с.
13. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.: Выща шк., 1989. — 347 с.

Получена 13.03.2007