Динамические системы, вып. 23 (2007), 63–71

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9:532

Малые движения системы вязких стратифицированных жидкостей

Д. О. Цветков

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: tsvet@crimea.edu*

Аннотация. Изучается задача о малых движениях системы из двух тяжелых вязких стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, плотности, которых в состоянии равновесия имеют устойчивую стратификацию. Используя теорию дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве, теорию краевых задач математической физики, получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

1. Введение

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложения в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1] – [7] и работы [8] – [9], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд, полностью заполненный системой из двух вязких стратифицированных несжимаемых жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Обозначим через Ω_k $(k = 1, 2)$ область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_{0k} с коэффициентом динамической вязкости $\mu_k = \text{const} > 0$ $(k = 1, 2)$, соответствующий участок твердой стенки — через S_k $(k = 1, 2)$, границу раздела жидкостей — через Γ.

Обозначим через $\vec{n}_k$ $(k = 1, 2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ $(k = 1, 2)$ и направленный вне Ω_k. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности Γ.

© *Д. О. ЦВЕТКОВ*

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_{0k} = \rho_{0k}(x_3)$ $(k = 1, 2)$:

$$0 < N^2_{k,\min} \le N^2_k(x_3) \le N^2_{k,\max} =: N^2_{0,k} < \infty, \tag{2.1}$$
$$N^2_k(x_3) := -\frac{g\rho'_{0k}(x_3)}{\rho_{0k}(x_3)}, \qquad (\, k = 1, 2).$$

Функции $N_k(x_3)$ $(k = 1, 2)$ называют частотами Вяйсяля-Брента, или частотами плавучести. Физически $N_k(x_3)$ равна частоте колебаний, с которой частица жидкости, находящаяся на уровне $x_3 = \mathrm{const}$, будет колебаться в стратифицированной жидкости, если сместиться с этого уровня.

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_k$ $(k = 1, 2)$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta = \zeta(t, \hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma$ представляет собой отклонение свободно движущийся поверхности $\Gamma(t)$ от Γ; $p_k = p_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$ $(k = 1, 2)$ — отклонение полей давлений от равновесных; $\rho_k = \rho_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$ $(k = 1, 2)$ — отклонения полей плотности от исходных $\rho_{0k}(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом (см., например, [8] – [9]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = \rho^{-1}_{0k}(x_3)(-\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{u}_k - \rho_k g \vec{e}_3) + \vec{f}_k \quad (\text{в } \Omega_k,\ k = 1, 2), \\ &\operatorname{div} \vec{u}_k = 0, \qquad \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \rho_{0k} \cdot \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k,\ k = 1, 2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k,\ k = 1, 2), \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \tau_{k3}(\vec{u}_1) - \tau_{k3}(\vec{u}_2) = 0 \quad (\, k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma), \\ &\tau_{33}(\vec{u}_1) - \tau_{33}(\vec{u}_2) + g\Delta\rho_0\zeta = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \Delta\rho_0 := \rho_{01} - \rho_{02}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\vec{u}_i(0, x) = \vec{u}^0_i(x), \quad \rho_k(0, x) = \rho^0_k(x) \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}). \tag{2.5}$$

Символом $\tau_{kj}(\vec{u})$ в (2.4) обозначены напряжения в жидкости

$$\tau_{kj}(\vec{u}) = -p\delta_{kj} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right).$$

Отметим, что второе условие в (2.4) характеризует равенство касательных напряжений на границе Γ раздела двух вязких жидкостей, а последние условие в (2.4) получено из кинематического условия и того факта, что разность нормальных напряжений на Γ равна скачку давлений, обусловленному гравитационными силами.

3. Закон баланса полной энергии

Будем исследовать задачу (2.2) — (2.5) методами теории операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Для того, чтобы понять, какие функциональные пространства естественно связать с рассматриваемой задачей, получим из (2.2) — (2.4) закон баланса энергии. С этой целью умножим первое уравнение (2.2) на $\rho_{0k}(x_3)\vec{u}_k(t,x)$, третье уравнение (2.2) — на функцию $g^2[\rho_{0k}(x_3)N_k^2(x_3)]^{-1}\rho_k(t,x)$, проинтегрируем по Ω_k и сложим результаты. Применяя далее формулу Грина (см., например, [8]), используя условие соленоидальности $\mathrm{div}\vec{u}_k = 0$ (в Ω_k) и условие прилипания $\vec{u}_k = \vec{0}$ (на S_k), получим закон баланса энергии:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega_k}\rho_{0k}|\vec{u}_k|^2\,d\Omega_k + g^2\int\limits_{\Omega_k}[\rho_{0k}N_k^2]^{-1}|\rho_k|^2\,d\Omega_k + \Delta\rho_0 g\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2\,d\Gamma\right) = \\ = -\sum_{k=1}^{2}\mu_k E(\vec{u}_k,\vec{u}_k) + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\rho_{0k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k\,d\Omega_k, \qquad (3.1)$$

где

$$E(\vec{u}_k,\vec{v}_k) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial(u_k)_i}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_k)_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial(v_k)_i}{\partial x_j}+\frac{\partial(v_k)_j}{\partial x_i}\right)d\Omega_k. \qquad (3.2)$$

Здесь в скобках стоит полная энергия системы; первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию системы, второе — потенциальную энергию, появляющуюся из-за наличия сил плавучести, а третье — потенциальную энергию, обусловленную колебаниями поверхности раздела двух вязких жидкостей. Правая часть (3.1) есть сумма скорости диссипации энергии за счет вязких сил и мощности внешних сил.

4. Функциональные пространства

Рассмотрим пространство

$$\widehat{L_2}(\Omega,\rho) = \vec{L}_2(\Omega_1,\rho_1)\oplus\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_2)$$

элементами которого являются матрицы-строки с компонентами — векторами: $\widehat{u} = (\vec{u}_1;\vec{u}_2)$, $\vec{u}_k = \vec{u}_k(x)$, $x\in\Omega_k$ $(k=1,2)$; скалярное произведение для произвольных элементов $\widehat{u}$ и $\widehat{v}$ определяется по формуле

$$(\widehat{u},\widehat{v})_{\widehat{L_2}(\Omega,\rho)} := \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\rho_{0k}\vec{u}_k(x)\cdot\overline{\vec{v}_k(x)}\,d\Omega_k.$$

Введем в пространстве $\widehat{L_2}(\Omega,\rho)$ подпространства согласно следующим определениям

$$\widehat{J_0}(\Omega,\rho) := \{\widehat{w} = (\vec{w}_1,\vec{w}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega,\rho)|\ \mathrm{div}\vec{w}_k = 0\ (\,\text{в}\,\Omega_k\,),\ \vec{w}_k\cdot\vec{n}_k = 0\ (\,\text{на}\,\partial\Omega_k\,)\};$$
$$\widehat{G_{h,S}}(\Omega,\rho) := \{\widehat{u} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega,\rho)|\ \vec{u}_k = \rho_{0k}^{-1}\nabla p_k,\ \vec{u}_k\cdot\vec{n}_k = 0\ (\,\text{на}\,S_k\,),$$
$$\nabla\cdot\vec{u}_k = 0\ (\,\text{в}\,\Omega_k\,),\ \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_1\ (\,\text{на}\,\Gamma\,),\ \vec{u}_1 = \vec{u}_2\ (\,\text{на}\,\Gamma\,)\,\},$$
$$\widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho) := \{\widehat{v} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega,\rho)|\ \vec{v}_k = \rho_{0k}^{-1}\nabla\varphi_k,\ \varphi_1 = \varphi_2\ (\,\text{на}\,\Gamma\,)\,\}.$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\widehat{L_2}(\Omega,\rho) = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \oplus \widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho), \tag{4.1}$$

где $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) := \widehat{J_0}(\Omega,\rho) \oplus \widehat{G_{h,S}}(\Omega,\rho) = \{\widehat{u} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega,\rho)\ :\ div\,\vec{u}_k = 0\ (\,\textit{в}\,\Omega_k\,),$
$\vec{u}_k\cdot\vec{n}_k = 0\ (\,\textit{на}\,S_k),\ \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_1\ (\,\textit{на}\,\Gamma\,),\ \vec{u}_1 = \vec{u}_2\ (\,\textit{на}\,\Gamma\,)\,\}.$ □

Введем в рассмотрение пространство

$$\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho) := \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1) \oplus \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2,\rho_2), \tag{4.2}$$

где $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k,\rho_k) := \{\,\vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k,\rho_k)|\ \mathrm{div}\,\vec{u}_k = 0\ (\,\text{на}\,\Omega_k\,),\ \vec{u}_k = \vec{0}\ (\,\text{на}\,S_k\,)\,\}$ (причем на границе раздела Γ выполнено условие $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$)); со скалярным произведением

$$(\widehat{u},\widehat{v})_{\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)} = \widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v}) = \sum_{k=1}^{2} E(\vec{u}_k,\vec{v}_k).$$

Можно показать, как и в [11], п.2.2.6, что $\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ плотно вложено в пространство $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\widehat{\varphi},\widehat{\psi})_{\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)} := g^2\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\left[\rho_{0k}(x_3)N_k^2(x_3)\right]^{-1}\varphi_k(x)\overline{\psi_k(x)}\,d\Omega_k$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma) = H_0 \oplus \{1_\Gamma\}$ со скалярным произведением

$$(\eta,\zeta)_0 := \int_\Gamma \eta(\hat{x})\overline{\zeta(\hat{x})}\,d\Gamma.$$

5. Переход к операторному уравнению

Будем считать, что решения задачи (2.2) — (2.5) и заданные функции являются гладкими функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах

$\vec{L}_2(\Omega_k,\rho_k)$ $(k=1,2)$. В связи с этим в дальнейшем производные $\partial/\partial t$ заменим на d/dt.

Перепишем первое уравнение (2.2) в виде

$$\frac{d\widehat{u}}{dt}=-\widehat{\rho_0^{-1}\nabla p}+\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u}-\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}+\widehat{f}, \tag{5.1}$$

где $\widehat{u}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, $\widehat{\rho_0^{-1}\nabla p}=(\rho_{01}^{-1}\nabla p_1,\rho_{02}^{-1}\nabla p_2)$, $\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u}=(\mu_1\rho_{01}^{-1}\Delta\vec{u}_1,\mu_2\rho_{02}^{-1}\Delta\vec{u}_2)$, $\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}=(g\rho_{01}^{-1}\rho_1\vec{e}_3,g\rho_{02}^{-1}\rho_2\vec{e}_3)$, $\widehat{f}=(\vec{f}_1,\vec{f}_2)$.

Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на подпространства $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$ и $\widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_k $(k=1,2)$ для поля $\widehat{u}$, считаем, что оно принадлежит пространству $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, точнее, пространству $\widehat{J^1_{0,S_1}}(\Omega,\rho)$ (см. (4.2)), плотно вложенному в $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

Подействуем введенными ортопроекторами $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на обе части уравнения (5.1). Будем иметь

$$\frac{d\widehat{u}}{dt}=-\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi'}+P_{0,S}\left(\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u}\right)-P_{0,S}\left(\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right)+P_{0,S}\widehat{f}, \tag{5.2}$$

$$0=-\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi''}+P_{0,\Gamma}\left(\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u}\right)-P_{0,\Gamma}\left(\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right)+P_{0,\Gamma}\widehat{f}. \tag{5.3}$$

Из уравнения (5.3) при известных $\widehat{u}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ и $\widehat{\rho}=(\rho_1,\rho_2)$ поле $\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi''}\in\widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho)$ вычисляется непосредственно. В то же время это поле не входит в (5.2). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать основное уравнение (5.2).

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим две вспомогательные задачи.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА I. По заданным функциям $\vec{P}_{0,S_k}f_k$ найти функции $\vec{w}_k(x)$, $p_k'(x)$ $(k=1,2)$ являющиеся решением краевой задачи

$$\rho_{0k}^{-1}\nabla p_k'-P_{0,S_k}(\mu_k\rho_{0k}^{-1}\Delta\vec{w}_k)=P_{0,S_k}\vec{f}_k,\quad \operatorname{div}\vec{w}_k=0\quad(\text{в }\Omega_k),\quad \vec{w}_k=\vec{0}\quad(\text{на }S_k),$$
$$\vec{w}_1=\vec{w}_2\ (\text{на }\Gamma),\quad \vec{w}_1\cdot n_1=\vec{w}_2\cdot\vec{n}_1\ (\text{на }\Gamma),\quad \tau_{i3}(\vec{w}_1)-\tau_{i3}(\vec{w}_2)=0\ (\text{на }\Gamma,\ i=\overline{1,3}).$$

Это аналог первой вспомогательной задачи С.Г.Крейна (см. [11], с.116).

Определение 1. Функцию $\widehat{w}=(\vec{w}_1,\vec{w}_2)\in\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ назовем обобщенным решением вспомогательной задачи I, если для любого $\widehat{v}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\in\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ выполнено тождество $\mu\widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v})=(\widehat{f},\widehat{v})_{\widehat{L}_2(\Omega,\rho)}$, $\widehat{f}=(\vec{f}_1,\vec{f}_2)$.

Лемма 2. *Если $\widehat{f}\in\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, то вспомогательная задача I имеет единственное обобщенное решение $\widehat{w}=\mu^{-1}A^{-1}\widehat{f}$, где A – оператор вспомогательной задачи I. Оператор A есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, обладающий следующими свойствами*

1. $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(A^{\frac12})=\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)\subset\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, $\overline{\mathcal{D}(A)}=\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

2. Для любого $\widehat{u} \in \mathcal{D}(A)$ и $\widehat{v} \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega, \rho)$ имеем $(A\widehat{u}, \widehat{v}) = \widehat{E}(\widehat{u}, \widehat{v})$. Если $\widehat{u}$, $\widehat{v} \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega, \rho)$, то $\widehat{E}(\widehat{u}, \widehat{v}) = (A^{\frac{1}{2}}\widehat{u}, A^{\frac{1}{2}}\widehat{v})$.

3. Обратный оператор A^{-1} есть компактный и положительный, действующий в пространстве $\widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho)$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА II. По заданной функции ψ найти функции $\vec{v}_k(x)$, $p''_k(x)$ $(k = 1, 2)$ являющиеся решением краевой задачи

$$\rho_{0k}^{-1}\nabla p''_k - P_{0,S_k}(\mu_k \rho_{0k}^{-1}\Delta \vec{v}_k) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}_k = 0 \text{ (в } \Omega_k \text{)}, \quad \vec{v}_k = \vec{0} \text{ (на } S_k \text{)},$$
$$\vec{v}_1 \cdot n_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 \text{ (на } \Gamma \text{)}, \quad \tau_{i3}(\vec{v}_1) - \tau_{i3}(\vec{v}_2) = 0 \text{ (на } \Gamma,\ i = 1, 2 \text{)}.$$
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \text{ (на } \Gamma \text{)}, \quad \tau_{33}(\vec{v}_1) - \tau_{33}(\vec{v}_2) = \psi \text{ (на } \Gamma \text{)}, \quad \int_\Gamma \psi\, d\Gamma = 0.$$

Определение 2. Функцию $\widehat{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega, \rho)$ назовем обобщенным решением вспомогательной задачи II, если для любого $\widehat{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega, \rho)$ выполнено тождество $\mu \widehat{E}(\widehat{v}, \widehat{u}) = (\psi, \gamma_1 \vec{u}_1)_{L_{2,\Gamma}}$, где γ_1 – оператор нормального следа поля заданного в Ω_1 на границу Γ, $L_{2,\Gamma} = H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$.

Лемма 3. *Если $\psi \in L_{2,\Gamma}$, то существует единственное обобщенное решение вспомогательной задачи II: $\widehat{v} = \mu^{-1} T\psi$, где T — оператор, изометрически действующий из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega, \rho)$ (см. подробнее [11], с.280).*

Разыскивая теперь решения задачи (2.2) — (2.5) (с учетом (5.3)) в виде

$$\widehat{u} = \widehat{w} + \widehat{v}, \quad \widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi'} = \widehat{\rho_0^{-1}\nabla p'} + \widehat{\rho_0^{-1}\nabla p''}, \tag{5.4}$$

где $(\widehat{w}, \widehat{p}\,')$ — решение вспомогательной задачи I, а $(\widehat{v}, \widehat{p}\,'')$ — решение вспомогательной задачи II; пользуясь определением операторов A и T, приходим к следующему выводу.

Теорема 1. *Задача (2.2) — (2.5) равносильна системе эволюционных уравнений*

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} + \mu A\widehat{w} + C\widehat{\rho} = \widehat{f}, \quad \frac{d\widehat{v}}{dt} + \mu^{-1} g\Delta\rho_0 B\widehat{u} = 0, \quad \frac{d\widehat{\rho}}{dt} - C^*\widehat{u} = 0, \tag{5.5}$$

где $B\widehat{u} := T\gamma_1\vec{u}_1$, $C\widehat{\rho} = P_{0,S}\left(\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right) = (C_1\rho_1, C_2\rho_2)$, $C_k\rho_k = P_{0,S_k}(g\rho_{0k}^{-1}\rho_k\vec{e}_3)$, $C^*\widehat{u} = (C_1^*\vec{u}_1, C_2^*\vec{u}_2)$, $C_k^*\vec{u}_k = -\nabla\rho_{0k} \cdot \vec{u}_k$; а начальные функции

$$\widehat{v}(0) = \widehat{v}^0, \quad \widehat{w}(0) = \widehat{w}^0, \quad \widehat{\rho}(0) = \widehat{\rho}^0, \tag{5.6}$$

определяются по начальным данным следующим образом. Функции $\widehat{v}^0 = (\vec{v}_1^0, \vec{v}_2^0)$ есть решение вспомогательной задачи II с граничной функцией ψ^0, а $\widehat{u}^0 = \widehat{w}^0 + \widehat{v}^0$.

Лемма 4. *Операторы $C :\ \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega) \to \widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho)$ и $C^* :\ \widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho) \to \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ определенные соотношениями (см. после (5.5)), взаимно сопряжены и ограничены.*

Доказательство леммы такое же, с учетом введенных выше пространств, как и при малых движениях одной вязкой стратифицированной жидкости (см., например, [10]).

Задачу (5.5) — (5.6) можно привести к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \oplus \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \oplus \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega).$$

Для этого осуществим в (5.5) — (5.6) замену переменных по формулам

$$\widehat{w} = A^{-\frac{1}{2}}x, \quad \widehat{v} = A^{-\frac{1}{2}}y, \quad \widehat{u} = A^{-\frac{1}{2}}q \quad (q = x+y), \tag{5.7}$$

а затем подействуем на левые и правые части первых двух уравнений оператором $A^{\frac{1}{2}}$. Придем к задаче

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}z + \mathcal{B}z = \mathcal{F}, \qquad z(0) = z^0, \tag{5.8}$$

где $z = (x; y; \widehat{\rho})^t$, $z^0 = (x^0; y^0; \widehat{\rho}^0)^t = (A^{\frac{1}{2}}\widehat{w}^0; A^{\frac{1}{2}}\widehat{v}^0; \widehat{\rho}^0)^t$, индекс $(\ldots)^t$ означает операцию транспонирования матрицы, оператор $B_A = A^{\frac{1}{2}}T\gamma_1 A^{-\frac{1}{2}}$ является самосопряженным, неотрицательным и компактным оператором (см, например, [11] с. 282),

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mu A & 0 & A^{\frac{1}{2}}C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & -\mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & 0 \\ \mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & \mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & 0 \\ -C^*A^{-\frac{1}{2}} & -C^*A^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}}\widehat{f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (2.2) — (2.5) такие функции $\widehat{u}$, $\widehat{\rho}$ и ζ для которых вектор $z(t) = (\vec{x}(t); \vec{y}(t); \widehat{\rho}(t))^t$ является сильным решением задачи Коши (5.8) и выполнено тривиальное соотношение (5.3). В свою очередь сильным решением задачи Коши (5.8) назовем функцию $z(t)$ такую, что $z(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из промежутка $[0,T]$, $\mathcal{A}z(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$, $\mathcal{B}z(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$, $z(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$ и для любого t из промежутка $[0,T]$ выполнено уравнение и начальное условие из (5.8).

Рассмотрим для простоты задачу (5.8) при $\mu = 1$ (получить такую же задачу можно, сделав замену $\mu A \to A$). Произведем в уравнении (5.8) замену $z(t) = e^t z_1(t)$. В результате получим уравнение относительно z_1:

$$\frac{dz_1}{dt} + \widehat{\mathcal{A}}z_1 + \mathcal{B}z_1 = \widehat{\mathcal{F}}, \tag{5.9}$$

где $\widehat{\mathcal{F}} = e^{-t}\mathcal{F}$, I и $\widehat{I}$ — единичные опреторы в $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$ и $\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ соответственно,

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} A+I & 0 & A^{\frac{1}{2}}C \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & A^{-\frac{1}{2}}C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \mathcal{A}_0(\mathcal{I} + \mathcal{T}). \tag{5.10}$$

Осуществляя в (5.9) замену $(\mathcal{I}+\mathcal{T})z_1=\widehat{z}$, с учетом (5.10), приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d\widehat{z}}{dt}+(\mathcal{I}+\mathcal{B}_{\mathcal{A}})\mathcal{A}_0\widehat{z}=(\mathcal{I}+\mathcal{T})\widehat{\mathcal{F}},\qquad \widehat{z}^0=(\mathcal{I}+\mathcal{T})z^0. \tag{5.11}$$

где $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}:=\mathcal{T}+(\mathcal{I}+\mathcal{T})\mathcal{B}(\mathcal{I}+\mathcal{T})^{-1}\mathcal{A}_0^{-1}$.

Так как для оператора $(-\mathcal{A}_0)$ уравнение

$$\frac{d\widehat{z}}{dt}+\mathcal{A}_0\widehat{z}=0,$$

является абстрактным параболическим (см. [13], с. 104, с. 121) и соответствующая полугруппы аналитична в секторе, содержащем положительную полуось, то (см. [13], с. 183) уравнение

$$\frac{d\widehat{z}}{dt}+(\mathcal{I}+\mathcal{B}_{\mathcal{A}})\mathcal{A}_0\widehat{z}=0,$$

где оператор $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ компактный, будет также абстрактным параболическим (см. [13], с. 181). Соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную полуось.

Таким образом, если в уравнении (5.11): $(\mathcal{I}+\mathcal{T})\widehat{\mathcal{F}}\in C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right)$, тогда задача (5.11) имеет сильное решение на проомежутке $[0,T]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$x^0\in\mathcal{D}(A),\quad y^0\in\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho),\quad C\widehat{\rho}^0\in\mathcal{D}(A^{\frac12}),\quad \widehat{\mathcal{F}}\in C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right),$$

для задачи Коши (5.8). *Тогда она имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0;T]$.

Доказательство теоремы основывается на переходе от задачи (5.11) с обратной заменой к задаче (5.8).

Как следствие теоремы 2 имеем следующий результат.

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$\widehat{w}^0\in\mathcal{D}(A^{\frac32}),\quad \widehat{v}^0\in\mathcal{D}(A^{\frac12}),\quad \widehat{u}^0=\widehat{w}^0+\widehat{v}^0,$$

$$\zeta^0\in L_{2,\Gamma},\quad C\widehat{\rho}^0\in\mathcal{D}(A^{\frac12}),\quad \widehat{f}\in C^1\left([0,T];\mathcal{D}(A^{\frac12})\right),$$

тогда задача (2.2) — (2.5) *имеет единственное сильное решение (в смысле определения 3) на промежутке* $[0;T]$.

Список цитируемых источников

1. *Краусс В.К.* Внутренние волны. — Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
2. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. — М.: Мир, 1977.

3. *Черкесов Л.В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. — Киев.: Наук. думка, 1976.
4. *Митропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
5. *Букатов А.Е., Черкесов Л.В.* Волны в неоднородном море. — Киев.: Наук. думка, 1983.
6. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
7. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
8. *Копачевский Н.Д.* Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей //Ротапринт ФТИНТ. — Харьков., 1978. – 60 с.
9. *Темченко Т.П.* Спектральные и эволюционные задачи колебаний многослойных стратифицированных жидкостей: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Симферополь, 1989. – 147 с.
10. *Цветков Д.О.* Математические проблемы теории колебания стратифицированной жидкости: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.03. — Симферополь, 2005. — 180 с.
11. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
12. *Gagliardo E.* Caratterizioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminare matematico della universita di Padora, 1957, Vol. XXVII.
13. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1967. – 464 с.

Получена 26.11.2007