Динамические системы, вып. 25 (2008), 71–82

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 519.21

О существовании стационарной меры для системы взаимодействующих частиц в полумарковской случайной среде

И. И. Нищенко

Национальный технический университет Украины
"Киевский Политехнический Институт"
Киев 03056. *E-mail: irynan@gmail.com*

Аннотация. В статье исследуется вопрос о существовании стационарного режима поведения специального класса систем с взаимодействием. Особенностью эволюции рассматриваемой системы является то, что закон взаимодействия частиц определяется состоянием некоторого случайного процесса и меняется в случайные моменты времени. В работе приведены условия, при выполнении которых существует стационарное решение уравнения, описывающего эволюцию такой системы.

Ключевые слова: системы взаимодействующих частиц, мерозначный процесс, полумарковский процесс.

1. Вступление

В данной работе исследуется вопрос о существовании стационарного режима поведения специального класса систем взаимодействующих частиц. Системы со взаимодействием обладают тем свойством, что движение отдельных частиц описывается некоторой случайной эволюцией, в то время как взаимодействие между частицами понимается как зависимость движения каждой частицы от распределения массы остальных частиц системы.

Общий подход к изучению стохастических потоков и мерозначных процессов, связанных с системами взаимодействующих частиц, предложен А. А. Дороговцевым. В монографии [1] эволюция системы со взаимодействием описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t),\mu_t,t)dt + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x(u,t),\mu_t,t)dw_k(t) \\ x(u,0) = u,\ u \in \mathbb{R}^d \\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1} \end{cases} \tag{1.1}$$

© *И. И. НИЩЕНКО*

где $\{x(u,t),\, t \geq 0\}$ — траектория частицы, стартовавшей из точки $u \in \mathbb{R}^d$; μ_0 — некоторая вероятностная мера на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ борелевских множеств в $\mathbb{R}^d$, играющая роль начального распределения массы частиц в системе; $\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}$ — образ меры μ_0 при отображении $x(\cdot,t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, то есть распределение массы частиц в момент времени t:

$$\mu_t(\Delta) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} 1\!\!\mathrm{I}_\Delta(x(u,t))\mu_0(du),\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

где $1\!\!\mathrm{I}_\Delta(x(u,t)) = 1$, если $x(u,t) \subset \Delta$, и $1\!\!\mathrm{I}_\Delta(x(u,t)) = 0$, если $x(u,t) \not\subset \Delta$; $\{w_k, k \geq 1\}$ — последовательность независимых $\mathbb{R}^d$-значных винеровских процессов, играющих роль случайной среды, в которой движутся частицы.

Коэффициенты a и $b_k, k \geq 1$, зависят от положения $x(u,t)$ в момент времени t частицы, стартовавшей из u, а также от μ_t — распределения массы остальных частиц в момент времени t.

В этой статье мы рассматриваем случай, когда роль случайной среды, определяющей характер взаимодействия частиц, играет некоторый полумарковский процесс. А именно, пусть $\{\nu(t), t \geq 0\}$ — полумарковский процесс с конечным множеством состояний $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ и с последовательными моментами скачков $\tau_1, \tau_2, \ldots$. В случайной среде, порожденной этим полумарковским процессом, рассмотрим эволюцию системы взаимодействующих частиц в $\mathbb{R}^d$, заданную следующим уравнением:

$$\begin{cases} dx(u,t) = -\alpha\left(x(u,t) - \varphi(u)\right)dt + f_{\nu(t)}(x(u,t),\mu_t)dt \\ x(u,0) = u,\ u \in \mathbb{R}^d \\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1} \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, i \in E$ — набор функций, определяющих характер взаимодействия частиц.

В качестве одного из возможных примеров уравнения (1.2) рассмотрим случай, когда $d = 1$, начальная мера $\mu_0 = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^M \delta_{u_k}$ сосредоточена в конечном числе точек. Пусть $f_i(x,\mu) = \int_{A_i(x)} h_i(v-x)\mu(dv)$, где $h_i(x)$ — некоторая 2π-периодическая функция взаимодействия, $A_i(x) = \{v \in \mathbb{R} : |x - v| \leq \varepsilon_i\} \subset \mathbb{R}$ — область взаимодействия для точки x, $i \in E$. Тогда уравнение (1.2) можно рассматривать как аналог модели Курамото (см. [3]) для связанных осцилляторов. Действительно, в этом случае мы получаем следующее уравнение для фаз $x_k = x(u_k,t)$:

$$\frac{dx_k}{dt} = \omega_k - \alpha x_k + \frac{1}{M}\sum_{j:\,|x_j - x_k| \leq \varepsilon_i} h_i(x_j - x_k),\ k = 1,\ldots,M,$$

где $\omega_k = \varphi(u_k)/\alpha$ и при условии, что $\nu(t) = i$. Этот пример демонстрирует, что общие свойства уравнения (1.2) определяют характеристики явления синхронизации в различных динамических системах со случайными связями.

Нас интересует вопрос о наличии стационарного решения уравнения (1.2). Для уравнений с взаимодействием в общем виде вопросы существования стационарного решения исследовались в работах [1], [4], [5]. Уравнение (1.1) имеет стационарное решение, когда $a(x,\mu,u) = -\alpha(x-u) + \phi(x,\mu)$, что соответствует наличию у каждой частицы собственного центра притяжения. По видимому, это условие (наличие притягивающих центров) является существенным для существования стационарного режима у мерозначного процесса. Этим обусловлен и наш выбор первого слагаемого в правой части уравнения (1.2).

2. Основные определения и предположения

Определение 1. Стохастический поток $\{x(u,t), u \in \mathbb{R}^d, t \geq 0\}$ и мерозначный процесс $\{\mu_t,\, t \geq 0\}$ называются решением уравнения (1.2), соответствующим начальной мере μ_0, если для произвольного $t \geq 0$

$$\begin{cases} x(u,t) = u + \int\limits_0^t \left[-\alpha\left(x(u,r) - \varphi(u)\right) + f_{\nu(r)}(x(u,r),\mu_r)\right] dr, \\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что однородный полумарковский процесс $\{\nu(t),\, t \geq 0\}$ с конечным множеством состояний $E = \{1, 2 \ldots, N\}$ и последовательностью $\tau_1, \tau_2, \ldots$ моментов скачков задан полумарковским ядром (см. [2])

$$F_{ij}(t) = P\left(\nu(\tau_{n+1}) = j,\, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \,|\, \nu(\tau_n) = i\right), \quad i,j \in E$$

и выполнены следующие условия:

(a) вложенная цепь Маркова $\{\nu_n = \nu(\tau_n)\}_{n=0}^{\infty}$ неразложима и эргодична со стационарным распределением $\{\pi_i\}_{i=1}^{N}$;

(b) распределения $F_i(t) = \sum\limits_{j \in E} F_{ij}(t)$ времен пребывания в состояниях неарифметичны;

(c) средние времена пребывания конечны, $m_i = \int\limits_0^{\infty} (1 - F_i(t))dt \leq C < \infty, \quad i \in E$, и $m = \sum\limits_{i \in E} \pi_i m_i > 0$.

Обозначим через $_1$ пространство вероятностных мер на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, имеющих конечный первый момент. Метрику в этом пространстве определим расстоянием Вассерштейна (см. [1]):

$$\Upsilon_1(\mu,\sigma) = \inf_{\varkappa \in C(\mu,\sigma)} \iint\limits_{R^{2d}} |u - v| \varkappa(du, dv),$$

где $C(\mu,\sigma)$ — множество всех вероятностных мер в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$, имеющих в качестве маргинальных распределений меры μ и σ.

Теперь на ${}_1 \times \mathcal{B}({}_1) \times \mathbb{R}_+$ определим ядро

$$Q_{ij}(\mu, A, t) = P(\mu_{\tau_1} \in A, \nu(\tau_1) = j, \, \tau_1 \le t \,|\, \mu_0 = \mu, \nu(0) = i) = \int_0^t F_{ij}(du) 1\!\!1_A(\mu_{i,u}),$$

а также основание этого ядра

$$Q_{ij}(\mu, A) = Q_{ij}(\mu, A, [0, \infty)) = \int_0^\infty F_{ij}(du) 1\!\!1_A(\mu_{i,u}).$$

Здесь $\mu_{i,u}$ — решение детерминированного уравнения

$$\begin{cases} dx_i(u,t) = -\alpha(x_i(u,t) - \varphi(u))dt + f_i(x_i(u,t), \mu_{i,t})dt \\ x_i(u,0) = u, \;\; u \in \mathbb{R}^d \\ \mu_{i,t} = \mu \circ x_i(\cdot, t)^{-1} \end{cases} \tag{2.1}$$

с начальной мерой μ.

3. Существование инвариантной меры

В этом пункте будет доказано, что введенное выше ядро $Q_{ij}(\mu, A)$ обладает инвариантной мерой λ, определенной в пространстве $E \times {}_1$, то есть такой, что для произвольного множества $A \subset {}_1$

$$\sum_{i \in E} \int_{{}_1} \lambda(i, d\mu) Q_{ij}(\mu, A) = \lambda(j, A), \;\; j \in E.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (a)-(c) на полумарковский процесс $\nu(t)$, функции $\varphi, f_1, \ldots, f_N$ в уравнении (1.2) удовлетворяют условию Липшица*

$$|\,\varphi(u) - \varphi(v)\,| \le K\,|\,u - v\,|, \; K < 1; \tag{3.1}$$

$$|\,f_i(x_1, \mu_1) - f_i(x_2, \mu_2)\,| \le L\left(|\,x_1 - x_2\,| + \Upsilon_1(\mu_1, \mu_2)\right), \quad i \in E \tag{3.2}$$

и

$$0 < N \frac{1 + \alpha K}{\alpha - 3L} < 1. \tag{3.3}$$

Тогда ядро $Q_{ij}(\mu, A)$ обладает инвариантной мерой.

Доказательство. Заметим, что поскольку $Q_{ij}(\mu, {}_1) = p_{ij}$, где p_{ij} — переходные вероятности вложенной цепи Маркова $\{\nu_n\}_{n=0}^\infty$, то для инвариантной меры, если таковая существует, необходимо должно выполняться

$$\sum_{i \in E} \lambda(i, {}_1) p_{ij} = \lambda(j, {}_1), \; j \in E; \quad \sum_{i \in E} \lambda(i, {}_1) = 1,$$

а значит, $\lambda(i, {}_1) = \pi_i$, где $\{\pi_i\}_{i\in E}$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Поэтому будем искать инвариантную меру ядра $Q_{ij}(\mu, A)$ на множестве $\mathcal{M}$ всех вероятностных мер на ${}_1 \times E$, имеющих своей проекцией на E инвариантное распределение $\{\pi_i\}_{i\in E}$ вложенной цепи полумарковского процесса ν:

$$\forall \rho \in \mathcal{M}: \quad \rho(i, {}_1) = \pi_i, \ \ i \in E.$$

Произвольную меру $\rho \in \mathcal{M}$ можем представить в виде

$$\rho(i, A) = \pi_i \varrho_i(A), \quad i \in E,\, A \subset {}_1, \tag{3.4}$$

где $\varrho_i(\cdot)$ — вероятностная мера на ${}_1$.

Через $\mathcal{M}_1$ обозначим подмножество пространства $\mathcal{M}$, состоящее из таких мер ρ, что их проекции ϱ на ${}_1$ имеют конечный первый момент, то есть

$$\forall \sigma \in {}_1: \quad \int\limits_{1} \Upsilon_{1}(\sigma, \delta)\varrho(d\delta) < +\infty.$$

В пространстве $\mathcal{M}_1$ определим расстояние $\Upsilon_{\mathcal{M}_1}$ между мерами ρ^1, ρ^2 следующим образом:

$$\Upsilon_{\mathcal{M}_1}(\rho^1, \rho^2) = \sum_{i\in E} \Upsilon_{\widetilde{1}}(\varrho_i^1, \varrho_i^2),$$

где

$$\Upsilon_{\widetilde{1}}(\varrho_i^1, \varrho_i^2) = \inf_{\widetilde{\varkappa}\in\widetilde{C}(\varrho_i^1, \varrho_i^2)} \iint\limits_{1}^{2} \Upsilon_{1}(\sigma_1, \sigma_2)\widetilde{\varkappa}(d\sigma_1, d\sigma_2),$$

и $\widetilde{C}(\varrho_i^1, \varrho_i^2)$ — множество всех вероятностных мер в $\mathcal{B}({}_1^2)$, имеющих в качестве маргинальных распределений меры ϱ_i^1 и ϱ_i^2.

Известно (см. [1]), что $(\mathcal{M}_1, \Upsilon_{\mathcal{M}_1})$ — полное метрическое сепарабельное пространство . В $(\mathcal{M}_1, \Upsilon_{\mathcal{M}_1})$ зададим оператор $\mathbf{Q}$, действующий по правилу

$$\mathbf{Q}\,\rho(j, A) = \sum_{i\in E} \int\limits_{1} \rho(i, d\mu) Q_{ij}(\mu, A).$$

Мы покажем, что при выполнении условий теоремы этот оператор является сжимающим в пространстве $(\mathcal{M}_1, \Upsilon_{\mathcal{M}_1})$, а значит, имеет в этом пространстве неподвижную точку.

Из определения ядра $Q_{ij}(\mu, A)$ и соотношения (3.4) для меры ρ следует, что меру $\mathbf{Q}\rho$ можно представить в виде

$$\mathbf{Q}\,\rho(j, A) = \sum_{i\in E} M \int\limits_{1} \mathbb{1}_A(\mu_{i,\tau_i})\varrho_i(d\mu)\pi_i p_{ij},$$

а соответствующую меру $(\mathbf{Q}\rho)_j$ — в виде

$$(\mathbf{Q}\rho)_j(A) = \sum_{i\in E} M \int_{1} 1\!\!1_A(\mu_{i,\tau_i})\varrho_i(d\mu)\frac{\pi_i}{\pi_j}p_{ij} \equiv \sum_{i\in E} c_{ij}R_i\varrho_i(A),$$

где $c_{ij} = \pi_i p_{ij}/\pi_j$, а $R_i\varrho_i(A) = M\int_{1} 1\!\!1_A(\mu_{i,\tau_i})\varrho_i(d\mu)$.

Покажем теперь, что для произвольных мер $\rho^1, \rho^2 \in \mathcal{M}_1$ выполняется неравенство

$$\Upsilon_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{Q}\rho^1, \mathbf{Q}\rho^2) \le D\Upsilon_{\mathcal{M}_1}(\rho^1, \rho^2)$$

с некоторой константой $D < 1$. Действительно:

$$\Upsilon_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{Q}\rho^1, \mathbf{Q}\rho^2) = \sum_{j\in E}\Upsilon_{1}\left(\sum_{i\in E} c_{ij}R_i\varrho_i^1, \sum_{i\in E} c_{ij}R_i\varrho_i^2\right) \le N\sum_{i\in E}\Upsilon_{1}(R_i\varrho_i^1, R_i\varrho_i^2).$$

Здесь мы использовали то, что $c_{ij} > 0$, $\sum\limits_{i\in E} c_{ij} = 1$, а значит, $c_{ij} \le 1$.

Пусть $\varkappa_i \in \widetilde{C}(\varrho_i^1, \varrho_i^2)$, где, напомним, $\widetilde{C}(\varrho_i^1, \varrho_i^2)$ — множество всех вероятностных мер на $\mathcal{B}({}^2_1)$, имеющих ϱ_i^1 и ϱ_i^2 своими маргинальными распределениями. Определим меру κ_i на $\mathcal{B}({}^2_1)$ следующим образом

$$\kappa_i(A, B) = M\iint_{{}^2_1} \varkappa_i(d\mu, d\sigma)1\!\!1_A(\mu_{i,\tau_i})1\!\!1_B(\sigma_{i,\tau_i}), \quad i \in E,\ A, B \subset {}_1.$$

Поскольку $\kappa_i(A,) = R_i\varrho_i^1(A)$, $\kappa_i(, B) = R_i\varrho_i^2(B)$, то $\kappa_i \in \widetilde{C}(R_i\varrho_i^1, R_i\varrho_i^2)$. Поэтому, используя определение метрики Вассерштейна, можем записать

$$\Upsilon_{1}(R_i\varrho_i^1, R_i\varrho_i^2) \le \iint_{{}^2_1}\int_0^\infty \varkappa_i(d\mu, d\sigma)\Upsilon_{1}(\mu_{i,t}, \sigma_{i,t})F_i(dt). \tag{3.5}$$

Оценим расстояние $\Upsilon_{1}(\mu_{i,t}, \sigma_{i,t})$ между мерами $\mu_{i,t}, \sigma_{i,t}$, $t \ge 0$. Пусть x_i^1 — решение уравнения (2.1) с начальной мерой $\mu(0) = \mu$; x_i^2 — решение уравнения (2.1) с начальной мерой $\mu(0) = \sigma$. Тогда для произвольной меры $\varkappa \in C(\mu_i, \sigma_i)$ (тут $\mu_i = \mu_{i,0}$, $\sigma_i = \sigma_{i,0}$) имеем

$$\begin{aligned}\Upsilon_{1}(\mu_{i,t}, \sigma_{i,t}) &\le \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \left|x_i^1(u,t) - x_i^2(v,t)\right| \varkappa(du, dv) \le \\ &\le \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \left|x_i^1(u,t) - x_i^2(u,t)\right| \varkappa(du, dv) + \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \left|x_i^2(u,t) - x_i^2(v,t)\right| \varkappa(du, dv).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части этого неравенства. По методу вариации постоянных находим, что

$$x_i^1(u,t) - x_i^2(u,t) = \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)} \left[f_i\left(x_i^1(u,s), \mu_{i,s}\right) - f_i\left(x_i^1(u,s), \sigma_{i,s}\right)\right] ds.$$

Следовательно

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2d}} \left|x_i^2(u,t) - x_i^2(u,t)\right| \varkappa(du,dv) \leq 2L \int\limits_0^t e^{-(\alpha-L)(t-s)} \Upsilon_1(\mu_{i,s}, \sigma_{i,s}) ds. \tag{3.7}$$

Оценим теперь второе слагаемое в (3.6). Так как

$$x_i^2(u,t) - x_i^2(v,t) = (u-v)e^{-\alpha t} + \alpha(\varphi(v) - \varphi(u)) \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds +$$
$$+ \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)} \left[f_i(x_i^2(u,s), \sigma_{i,s}) - f_i(x_i^2(u,s), \sigma_{i,s})\right] ds,$$

то, принимая во внимание условия Липшица (3.1), (3.2) находим

$$\left|x_i^2(u,t) - x_i^2(v,t)\right| \leq (1/\alpha + K)\left(1 + \frac{L}{\alpha - L}\right)|u - v|.$$

Таким образом

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2d}} \left|x_i^2(u,t) - x_i^2(v,t)\right| \varkappa(du,dv) \leq (1/\alpha + K)\frac{\alpha}{\alpha - L}\Upsilon_1(\mu_i, \sigma_i) \equiv C\Upsilon_1(\mu_i, \sigma_i) \tag{3.8}$$

Объединение (3.7) и (3.8), в виду произвольности меры $\varkappa$, дает

$$\Upsilon_1(\mu_{i,t}, \sigma_{i,t}) \leq 2L \int\limits_0^t e^{-(\alpha-L)(t-s)} \Upsilon_1(\mu_{i,s}, \sigma_{i,s}) ds + C\Upsilon_1(\mu_i, \sigma_i).$$

Итерируя это неравенство, окончательно получаем

$$\Upsilon_1(\mu_{i,t}, \sigma_{i,t}) \leq C\Upsilon_1(\mu_i, \sigma_i)\left(1 + 2L\frac{1}{\alpha - 3L}\right) = D\Upsilon_1(\mu_i, \sigma_i),$$

где $D = \dfrac{\alpha}{\alpha - 3L}(1/\alpha + K)$.

Подставив найденную оценку для $\Upsilon_1(\mu_{i,t}, \sigma_{i,t})$ в (3.5), имеем

$$\Upsilon_1(R_i\varrho_i^1, R_i\varrho_i^2) \le D \iint\limits_{{}^{2}_{1}} \int\limits_{0}^{\infty} \varkappa_i(d\mu, d\sigma)\Upsilon_1(\mu_i, \sigma_i)F_i(dt) = D\Upsilon_1(\varrho_i^1, \varrho_i^2),$$

а значит, $\Upsilon_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{Q}\rho^1, \mathbf{Q}\rho^2) \le N \sum\limits_{i\in E} \Upsilon_1(R_i\varrho_i^1, R_i\varrho_i^2) \le ND\Upsilon_{\mathcal{M}_1}(\rho^1, \rho^2)$, где $ND < 1$ в силу условия (3.3) теоремы.

Из наличия неподвижной точки у сжимающего оператора немедленно следует утверждение теоремы: ядро Q обладает инвариантной мерой. $\square$

Полученное распределение $\lambda(\cdot,\cdot)$ имеет следующий смысл. Если в задаче Коши (1.2) взять $\lambda(\cdot,\cdot)$ в качестве начального распределения полумарковского процесса ν и меры μ (то есть $P(\nu(0) = i, \mu_0 \in A) = \lambda(i, A)$), то последовательность $\{\mu_{\tau_n}\}_{n=0}^{\infty}$ значений мерозначного процесса в моменты скачков полумарковского процесса будет стационарной.

4. Существование стационарной меры для случая $\varphi = 0$

В том случае, когда в уравнении (1.2) $\varphi = 0$, исходное уравнение обладает эволюционным свойством. Это обстоятельство позволит установить существование такого начального условия в (1.2), что решение задачи Коши будет стационарным.

Предварительно докажем следующее абстрактное утверждение. Пусть $(, \rho)$ — полное метрическое сепарабельное пространство, $\{G_{s,t},\ 0 \le s \le t\}$ — двупараметрическое семейство непрерывных случайных отображений пространства в себя. Термин "случайное отображение" означает, что для произвольного $u \in$ $G_{s,t}(u)$ — случайный элемент в . Пусть $\Omega' \subset \Omega$ — подмножество полной меры исходного вероятностного пространства.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1. *Семейство $\{G_{s,t},\ 0 \le s \le t\}$ обладает эволюционным свойством на Ω', т.е.*

$$\forall\, \omega \in \Omega',\ \forall\, 0\ \le s_1\ \le s_2\ \le s_3 : \quad G_{s_1,s_3} = G_{s_2,s_3}G_{s_1,s_2}.$$

2. *Семейство $\{G_{s,t},\ 0 \le s \le t\}$ стационарно, т.е.*

$$\forall\, h > 0 : \quad \{G_{s,t},\ 0 \le s \le t\} \stackrel{d}{=} \{G_{s+h,t+h},\ 0 \le s \le t\}.$$

3. *Семейство $\{G_{s,t},\ 0 \le s \le t\}$ является сжимающим в том смысле, что*

$$\exists\, \gamma > 0, C > 0,\ \ \forall\, u, v \in ,\forall\, \omega \in \Omega' : \quad \rho\,(G_{s,t}(u), G_{s,t}(v)) \le Ce^{-\gamma(t-s)}\rho(u, v).$$

4. *Для произвольного $u \in$ семейство $\{G_{0,t}(u)\}$ слабо компактно.*

5. *При фиксированном* $u \in$ *и для всех* $\omega \in \Omega'$ *существует* $C(u) > 0$ *такое, что*
$$\rho(G_{s,t_1}(u), G_{s,t_2}(u)) \leq C(u)|t_1 - t_2|.$$

Тогда существуют (возможно, на новом вероятностном пространстве) случайный процесс $\{x(t),\, t \geq 0\}$ *в и семейство непрерывных случайных отображений* $\{\widetilde{G}_{s,t},\, 0 \leq s \leq t\}$*в такие, что:*

1) $\{G_{s,t}\} \overset{d}{=} \{\widetilde{G}_{s,t}\}$*;*

2) $\forall\, h > 0 \quad \{x(t),\, \widetilde{G}_{s,t},\, 0 \leq s \leq t\} \overset{d}{=} \{x(t+h),\, \widetilde{G}_{s+h,t+h},\, 0 \leq s \leq t\}$*;*

3) $\forall\, s \leq t \quad x(t) = \widetilde{G}_{s,t}x(s)$*.*

Доказательство. Зафиксируем $u_0 \in$ и рассмотрим случайный процесс $y(t) = G_{0,t}(u_0)$, $t \geq 0$. Проверим, что $y(t)$ слабо сходится при $t \to \infty$. Как и прежде, используем расстояние Вассерштейна между вероятностными распределениями на , но на этот раз — нулевого порядка:

$$\Upsilon_0(\mu, \sigma) = \inf_{\varkappa \in C(\mu,\sigma)} \iint\limits_{2} \frac{\rho(u,v)}{1+\rho(u,v)} \varkappa(du, dv).$$

Известно (см. [1]), что сходимость в метрике Υ_0 равносильна слабой сходимости.

По условию теоремы распределения процесса $\{y(t),\, t \geq 0\}$ слабо компактны в . Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует компакт K такой, что $\inf\limits_{t \geq 0} P(y(t) \in K) \geq 1 - \varepsilon$. На исходном вероятностном пространстве, или, возможно, его расширении выберем случайные элементы η и ξ в так, чтобы распределения $\{\eta, G_{s,t};\, 0 \leq s \leq t\}$ и $\{\xi, G_{s,t};\, 0 \leq s \leq t\}$ совпадали с распределениями $\{y(t_1), G_{s,t},\, t_1 \leq s \leq t\}$ и $\{y(t_2), G_{s,t},\, t_2 \leq s \leq t\}$ соответственно. Тогда расстояние Вассерштейна между распределениями $y(t_1 + t)$ и $y(t_2 + t)$ не превосходит

$$M \frac{\rho\left(G_{0,t}(\eta), G_{0,t}(\xi)\right)}{1 + \rho\left(G_{0,t}(\eta), G_{0,t}(\xi)\right)} \leq M \frac{\rho\left(G_{0,t}(\eta), G_{0,t}(\xi)\right)}{1 + \rho\left(G_{0,t}(\eta), G_{0,t}(\xi)\right)} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\eta \in K, \xi \in K\}} + 2\varepsilon \leq$$
$$\leq Ce^{-\gamma t}\, diam K + 2\varepsilon.$$

Следовательно, распределения $\{y(t),\, t \geq 0\}$ фундаментальны при $t \to +\infty$ в метрике Вассерштейна. Поэтому распределение $y(t)$ слабо сходится при $t \to +\infty$ к некоторой мере ν.

Аналогичными рассуждениями с учетом стационарности семейства $\{G_{s,t}\}$ можно доказать, что для произвольного $T > 0$ случайные процессы $\{y(t+s),\, s \in [0, T]\}$ слабо сходятся при $t \to +\infty$.

Используя диагональный метод Кантора, построим последовательность $t_n \to +\infty$ такую, что $\{y(t_n), G_{t_n+r_1, t_n+r_2},\, 0 \leq r_1 \leq r_2,\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$ сходится по распределению. Пусть $\{\varkappa, \widetilde{G}_{r_1,r_2};\, 0 \leq r_1 \leq r_2,\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$ — соответствующий предел, заданный на некотором вероятностном пространстве. Условие 5) теоремы позволяет продолжить семейство $\{\widetilde{G}_{r_1,r_2};\, 0 \le r_1 \le r_2,\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$ до семейства $\{\widetilde{G}_{s,t};\, 0 \le s \le t\}$, распределенного так же как $\{G_{s,t};\, 0 \le s \le t\}$. Тогда $x(t) = \widetilde{G}_{0,t}(\varkappa)$ — искомый случайный процесс. □

Доказанная теорема применима к уравнению (1.2) следующим образом. Пусть $\{\nu(t),\, t \ge 0\}$ – стационарный процесс со значениями в E (в частности, это может быть исходный полумарковский процесс, для которого, как известно (см. [2]), существует такое начальное распределение фазы и времени переключения, при котором он становится стационарным). Предположим, что функции $\{f_i,\, i \in E\}$ ограничены. Зададим отображения $\{G_{s,t}(\cdot)\}$ в пространстве $_1$ следующим образом. Пусть $\mu_t = G_{s,t}(\mu)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} dy(u,t) = [-\alpha\, y(u,t) + f_{\nu(t)}(y(u,t),\mu_t)]dt \\ y(u,s) = u,\; u \in \mathbb{R}^d \\ \mu_t = \mu \circ y(\cdot,t)^{-1} \end{cases}$$

Из оценок, приведенных в доказательстве теоремы 1, следует, что $\{G_{s,t}(\cdot)\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Поэтому, возможно, на другом вероятностном пространстве существует семейство $\{\widetilde{G}_{s,t}(\cdot)\}$, распределенное так же как $\{G_{s,t}(\cdot)\}$ (или, что то же самое, существует процесс $\widetilde{\nu}$, распределенный так же как ν, при условии, что все функции f_i, $i \in E$ различны) и случайная мера μ_0 такие, что решение $\{\mu_t,\, t \ge 0\}$ задачи Коши (1.2) с $\varphi = 0$ — стационарный процесс.

5. Стационарное решение на оси

В этом пункте мы ведем речь о стационарном решении уранения

$$dx(u,t) = \left[-\alpha\,(x(u,t) - \varphi(u)) + f_{\widetilde{\nu}(t)}(x(u,t),\mu_t)\right]dt, \tag{5.1}$$

на всем $\mathbb{R}$, где $\{\widetilde{\nu}(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ — стационарный полумарковский процесс, конечномерные распределения которого построены по конечномерным распределениям стационарного полумарковского процесса $\{\nu(t),\, t \ge 0\}$.

Определение 2. Стохастический поток $\{x(u,t), u \in \mathbb{R}^d,\, t \in \mathbb{R}\}$ и мерозначный процесс $\{\mu_t,\, t \in \mathbb{R}\}$ называются стационарным решением уравнения (5.1), отвечающим вероятностной мере μ на $\mathbb{R}^d$, если $\forall\, s \le t,\, u \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} x(u,t) = x(u,s) + \int\limits_s^t \left[-\alpha\,(x(u,r) - \varphi(u)) + f_{\widetilde{\nu}(r)}(x(u,r),\mu_r)\right]dr, \\ \mu_t = \mu \circ x(\cdot,t)^{-1} \end{cases}$$

и, кроме того, $\{\mu_t,\, t \in \mathbb{R}\}$ — стационарный процесс.

Теорема 3. *Пусть все функции f_i, $i \in E$ ограничены, удовлетворяют условию Липшица по совокупности аргументов на $\mathbb{R}^d \times {}_1$ с постоянной L и пусть $\alpha > L+1$. Тогда для каждой меры $\mu \in {}_1$ существует единственное стационарное решение уравнения (5.1), ей отвечающее.*

Доказательство. Для каждого $s \in \mathbb{R}$ обозначим через x^s и μ^s решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} dx^s(u,t) = -\alpha\left(x^s(u,t) - \varphi(u)\right)dt + f_{\widetilde{\nu}(t)}(x^s(u,t),\mu_t^s)dt \\ x^s(u,s) = u,\ u \in \mathbb{R}^d \\ \mu_t^s = \mu \circ x^s(\cdot,t)^{-1}. \end{cases}$$

Отметим, что при сделанных предположениях о функциях φ и f_i, $i \in E$ мера μ_t^s при каждом ω принадлежит пространству ${}_1$ мер с конечным первым моментом, так как в этом случае $x^s(\cdot,t)$ удовлетворяет условию Липшица в $\mathbb{R}^d$. Для $s_1 < s_2 < t$ рассмотрим $M\Upsilon_1(\mu_t^{s_1},\mu_t^{s_2})$. Согласно определению метрики Υ_1

$$M\Upsilon_1(\mu_t^{s_1},\mu_t^{s_2}) \le M\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|\, x^{s_1}(u,t) - x^{s_2}(u,t)\,\|\mu(du).$$

Оценим разность $\|\, x^{s_1}(u,t) - x^{s_2}(u,t)\,\|$:

$$\|\, x^{s_1}(u,t) - x^{s_2}(u,t)\,\| \le e^{-\alpha(t-s_2)}\|\, x^{s_1}(u,s_2) - u\,\| + \\ + L\int\limits_{s_2}^{t} e^{-\alpha(t-r)}\left(\|\, x^{s_1}(u,r) - x^{s_2}(u,r)\,\| + \Upsilon_1(\mu_r^{s_1},\mu_r^{s_2})\right)dr \quad (5.2)$$

Заметим, что

$$\|\, x^{s_1}(u,s_2) - u\,\| \le \|\varphi(u)\| + \|u - \varphi(u)\| + C(1 + 1/\alpha),$$

где $C = \max\limits_{i\in E}\sup\|\, f_i\|_\infty$ и поэтому, итерируя неравенство (5.2) по мере μ, получаем

$$\Upsilon_1(\mu_t^{s_1},\mu_t^{s_2}) \le C_1 e^{-\alpha(t-s_2)} + (L+1)\int\limits_{s_2}^{t} e^{-\alpha(t-r)}\Upsilon_1(\mu_r^{s_1},\mu_r^{s_2})dr,$$

и окончательно

$$\Upsilon_1(\mu_t^{s_1},\mu_t^{s_2}) \le C_1 e^{-(\alpha-L-1)(t-s_2)}.$$

Из установленной фундаментальности семейства $\{\mu_t^s,\ s<t\}$ следует существование в ${}_1$ предела $\mu_t = \lim\limits_{s\to-\infty}\mu_t^s$, и, аналогично, существует предел $x(u,t) = \lim\limits_{s\to-\infty} x^s(u,t)$. Так же, как это сделано в [1], можно проверить, что $\{\mu_t,\ t\in\mathbb{R}\}$ стационарный процесс и что $\mu_t = \mu\circ x(\cdot,t)^{-1}$. Единственность стационарного решения проверяется аналогично [1]. Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Дороговцев А.А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 289 с.
2. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их применения . — Киев: Наук.думка, 1978. — 217 с.
3. *Acebron JA, Bonilla LL, Vincente CJP, Ritort F, and Spigler R* The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena.//Reviews of Modern Physics — 2005. — V. 77. — P.137–186.
4. *Dorogovtsev A.A., Karlikova M.P.* Long-time behaviour of measure-valued process corresponding to stochastic flows with interaction // Theory of Stochastic Processes. — 2003. — 9(25), No. 1-2. —- P.52-59.
5. *Pilipenko A.Yu.* Stationary measure-valued processes generated by a flow of interacted particles. Ukrainian Mathematical Congress, 2001, Section 9 // Probability Theory and Mathematical Statistics, Proceedings, Kyiv. — 2002. — P.123-130.

Получена 09.11.2008