Динамические системы, вып. 24 (2008), 69–82

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 519.873

Стационарные характеристики системы M/G/2/0 с поочерёдным обслуживанием заявок двумя линиями

А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич
Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского,
Симферополь 95007. *e-mail: svp54@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается СМО M/G/2/0 с двумя последовательными линиями обслуживания. Входящий поток заявок — пуассоновский, очередь на первую линию не допускается. Заявка, прошедшая первую стадию обслуживания, ожидает очереди в случае занятости второй линии. Получены статистические характеристики системы в состоянии равновесия при условии, что время обслуживания на второй стадии имеет экспоненциальное распределение.

Введение. В данной статье рассматривается система массового обслуживания, состоящая из двух линий и одного места для ожидания. Одна из линий условно может быть названа "секретарь" (С), а другая – "директор" (Д). В систему поступает простейший поток заявок, обслуживание которых осуществляется по следующим правилам. Поступившая в систему заявка либо начинает обслуживатся линией С, если она свободна, либо теряется, если линия С занята или отключена. Обслуженная линией С заявка либо начинает обслуживаться линией Д, если она свободна, либо поступает на место ожидания при занятой линии Д, либо остаётся в системе на линии С, если линия Д и место ожидания заняты, при этом линия С считается отключённой. Заявки, обслуженные линией Д, покидают систему, при этом, если на месте ожидания имеется заявка, то она начинает обслуживаться линией Д. Если при этом ещё имеется и заявка, отключившая линию С, то она поступает на место ожидания, а линия С может после этого принимать новые заявки.

В работе проводится математическое моделирование работы системы при произвольных непрерывных распределениях времён обслуживания заявок линиями. Аналитическое решение соответствующей системы интегро – дифференциальных уравнений удалось найти только для случая экспоненциального распределения времени обслуживания линией Д. При этом получена алгебраическая система уравнений для определения вероятностей состояний системы в стационарном режиме.

Постановка задачи, вероятностные рассуждения и предельные переходы. Пусть λ – параметр простейшего входящего потока заявок, $\mu_1(x)$ – интенсивность случайной величины ω_1 – времени обслуживания заявок линией С, $\mu_2(y)$ – интенсивность случайной величины w_2 – времени обслуживания заявок линией Д.

Нумерация состояний системы проводится следующим образом:

0 — система свободна от заявок

1 — линия С занята обслуживанием заявки, других заявок в системе нет.

2 — линия Д занята обслуживанием, других заявок в системе нет.

3 — в системе две заявки: одна из них обслуживается линией С, другая – линией Д.

4 — в системе две заявки: одна из них обслуживается линией Д, а другая уже обслуженная линией С находится на месте ожидания.

5 — в системе три заявки: одна из них обслуживается линией Д, другая уже обслуженная линией С – на месте ожидания и третья обслуживается линией С.

6 — в системе три заявки: одна из них обслуживается линией Д, две оставшиеся обслужены линией С, при этом одна из них – на месте ожидания, а другая на месте линии С, и линия С не функционирует.

Если система находится в состояниях 1,3,5 или 6, то поступающая в систему заявка теряется.

Обозначим через $\xi(t)$ случайный процесс, фазовое пространство которого состоит из состояний $\overline{0,6}$. Граф переходов состояний системы представлен на рисунке:

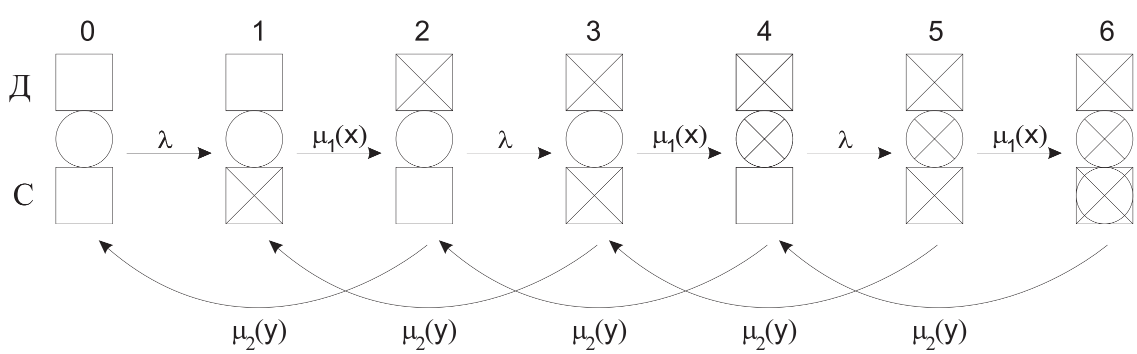

Рис. 1. Основные компоненты экспертной системы

Введём функции:

$$p_k(t) := \mathbb{P}\{\xi(t) = k\},\ k = \overline{0,6}$$

$$Q_1(t,x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 1,\ \omega_1 < x\}, \quad q_1(t,x) := \frac{\partial Q_1(t,x)}{\partial x}$$

$$Q_2(t,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 2,\ \omega_2 < y\}, \quad q_2(t,y) := \frac{\partial Q_1(t,y)}{\partial y}$$

$$Q_3(t,x,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 3,\ \omega_1 < x,\ \omega_2 < y\}, \quad q_3(t,x,y) := \frac{\partial Q_3(t,x,y)}{\partial x}\partial y$$

$$Q_4(t,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 4,\ \omega_2 < y\}, \quad q_4(t,y) := \frac{\partial Q_4(t,y)}{\partial y}$$

$$Q_5(t,x,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 5,\ \omega_1 < x,\ \omega_2 < y\}, \quad q_5(t,x,y) := \frac{\partial Q_5(t,x,y)}{\partial x}\partial y, \quad \omega_1 < \omega_2$$

$$Q_6(t,y,z) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 6,\ \omega_2 < y,\ \omega_3 < z\}, \quad q_6(t,y,z) := \frac{\partial Q_6(t,y,z)}{\partial y}\partial z, \quad \omega_3 < \omega_2$$

где ω_1 – время обслуживания заявок линией С, ω_2 – время обслуживания заявок линией Д, ω_3 – время пребывания обслуженной линией С заявки, находящейся на месте линии С.

Заметим, что имеют место соотношения:

$$p_k(t) = Q_k(t,\infty) = \int_0^\infty q_k(t,x)\,dx,\ k = 1,2,4, \quad p_3(t) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty q_3(t,x,y)\,dy,$$
$$p_5(t) = \int_0^\infty dx \int_x^\infty q_5(t,x,y)\,dy, \quad p_6(t) = \int_0^\infty dz \int_z^\infty q_6(t,y,z)\,dy.$$

Для получения системы интегро – дифференциальных уравнений и граничных условий проведём вероятностные рассуждения и предельные переходы. Пусть $t > 0$, $h > 0$, h – малая величина. Событие $\{\xi(t+h) = 0\}$ может произойти, если произойдут либо событие $\{\xi(t) = 0$, и за время h не поступит заявка$\}$, либо $\{\xi(t) = 2,\ y_k \leqslant \omega_2 < y_{k+1}$, и за время h закончится обслуживание, и за h не поступит заявка$\}$, где $y_k = hk,\ k = 0,1,2,\ldots$ Приравнивая вероятности рассмотренных событий, получим соотношение:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda h + o(h)) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} q_2(t,y)\,dy(\mu_2(y_k)h + o(h))(1-\lambda h + o(h))$$

После элементарных преоброзований имеем:

$$p_0(t+h) - p_0(t) + p_0(t)(\lambda h + o(h)) + \sum_{k=0}^{\infty} q_2(t,y_k)h(\mu_2(y_k)h + o(h))$$

После деления на h обеих частей последнего равенства и перехода к пределу при $h \to \infty$ получаем:

$$p_0'(t) + \lambda p_0(t) = \int_0^\infty q_2(t,y)\mu_2(y)\,dy \tag{1}$$

Далее, имеет место равенство событий: $\{\xi(t+h)=1,\ x\leqslant\omega_1<x+h\}=$ $\{\xi(t)=\ 1,\ x-h\leqslant\omega_1<x$, и за h не закончено обслуживание$\}+$ $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\{\xi(t)\ =\ 3,\ \ x-h\ \leqslant\ \omega_1\ <\ x,\ \ y_k\ \leqslant\ \omega_2\ <\ y_{k+1}$, и за h закончено обслуживание линией Д, и за h не закончено обслуживание линией С$\}$, где $y_k=hk$. Переходя к вероятностям, имеем:

$$\int_x^{x+h} q_1(t+h,a)\,da=\int_{x-h}^{x} q_1(t,a)\,da(1-\mu_1(x)h+o(h))+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{x-h}^{x}da\int_{y_k}^{y_{k+1}} q_3(t,a,b)\,db(\mu_2(y_k)h+o(h))(1-\mu_1(x)h+o(h))$$

После преобразований получаем:

$$\left(\int_x^{x+h} q_1(t+h,a)\,da-\int_{x-h}^{x} q_1(t,a)\,da\right)+\int_{x-h}^{x} q_1(t,a)\,da(\mu_1(x)h+o(h))=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty} q_3(t,x,y_k)h^2(\mu_2(y_k)h+o(h))$$

Деление обеих частей последнего равенства на h^2 и переход к пределу при $h\to\infty$ приводит к уравнению:

$$\frac{\partial q_1(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial q_1(t,x)}{\partial x}+\mu_1(x)q_1(t,x)=\int_0^{\infty} q_3(t,x,y)\mu_2(y)\,dy \qquad (2)$$

Для получения граничного условия для уравнения (2) цепочка рассуждений аналогичная: $\{\xi(t+h)\ =\ 1,\ \ 0\ \leqslant\ \omega_1\ <\ h\}\ =\ \{\xi(t)\ =\ 0$, и за h поступила заявка$\}$, $\int\limits_0^h q_1(t+h,x)\,dx=p_0(t)(\lambda h+o(h))$,

$$q_1(t,0)=\lambda p_0(t) \qquad (2')$$

Продолжаем рассуждения: $\{\xi(t+h)=2,\ y\leqslant\omega_2<y+h\}=\{\xi(t)=2,\ y-h\leqslant\omega_2<y$, и за h не закончено обслуживание, и за h не поступила заявка$\}$.

$$\int_y^{y+h} q_2(t+h,a)\,da=\int_{y-h}^{y} q_2(t,a)\,da(1-\mu_2(y)h+o(h))(1-\lambda h+o(h)),$$
$$\left(\int_y^{y+h} q_2(t+h,a)\,da-\int_{y-h}^{y} q_2(t,a)\,da\right)+\int_{y-h}^{y} q_2(t,a)\,da(\mu_2(y)h+\lambda h+o(h))=0,$$
$$\frac{\partial q_2(t,y)}{\partial t}+\frac{\partial q_2(t,y)}{\partial y}+(\mu_2(y)+\lambda)q_2(t,y)=0. \qquad (3)$$

$\{\xi(t\ +\ h)\ =\ 2,\ \ 0\ \leqslant\ \omega_2\ <\ h\}\ =\ \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\{\xi(t)\ =\ 1,\ \ x_k\ \leqslant\ \omega_1\ <\ x_{k+1}$, и за h закончено обслуживание$\}+\ \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\{\xi(t)\ =\ 4,\ \ y_k\ \leqslant\ \omega_1\ <\ y_{k+1}$, и за h закончено обслуживание$\}$, где $x_k = kh,\ y_k = kh,\ k = 0, 1, \dots$

$$\int_0^h q_2(t+h, y)\, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} q_1(t, a)\, da(\mu_1(x_k)h + o(h)) +$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} q_4(t, a)\, da(\mu_2(y_k)h + o(h)),$$
$$q_2(t, 0) = \int_0^{\infty} q_1(t, x)\mu_1(x)\, dx + \int_0^{\infty} q_4(t, y)\mu_2(y)\, dy. \qquad (3')$$

$\{\xi(t+h) = 3,\ x \leqslant \omega_1 < x+h,\ y \leqslant \omega_2 < y+h\}=$
$\{\xi(t) = 3,\ x-h \leqslant \omega_1 < x,\ y-h \leqslant \omega_2 < y$, и за h не закончено обслуживание линией С, и за h не закончено обслуживание линией Д$\}$.

$$\int_x^{x+h} da \int_y^{y+h} q_3(t+h, a, b)\, db =$$
$$= \int_{x-h}^{x} da \int_{y-h}^{y} q_3(t, a, b)\, db(1 - \mu_1(x)h + o(h))(1 - \mu_2(y)h + o(h)),$$
$$\left(\int_x^{x+h} da \int_y^{y+h} q_3(t+h, a, b)\, db - \int_{x-h}^{x} da \int_{y-h}^{y} q_3(t, a, b)\, db\right) +$$
$$+ (\mu_1(x)h + \mu_2(y)h + o(h)) \int_{x-h}^{x} da \int_{y-h}^{y} q_3(t, a, b)\, db = 0.$$

Обе части последнего равенства следует делить на h^3 и переходить к пределу при $h \to \infty$. Заметим, что вычисление предела

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3} \left(\int_x^{x+h} da \int_y^{y+h} q_3(t+h, a, b)\, db - \int_{x-h}^{x} da \int_{y-h}^{y} q_3(t, a, b)\, db\right)$$

можно проводить, используя правило Лопиталя, что приводит к достаточно громоздким выкладкам. Проще этот предел вычисляется, если во втором интеграле сделать линейные замены переменных, и разность интегралов преобразовать с использованием теоремы о среднем:

$$\int_x^{x+h} da \int_y^{y+h} q_3(t+h, a, b)\, db - \int_x^{x+h} da \int_y^{y+h} q_3(t, a-h, b-h)\, db =$$
$$= \int_x^{x+h} da \int_y^{y+h} \left(\frac{\partial q_3(t, a, b)}{\partial t} h + \frac{\partial q_3(t, a, b)}{\partial a} h + \frac{\partial q_3(t, a, b)}{\partial b} h + o(h)\right) db =$$
$$= \left(\frac{\partial q_3(t, x, y)}{\partial t} h + \frac{\partial q_3(t, x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial q_3(t, x, y)}{\partial y} h + o(h)\right) \cdot h^2$$

$$\frac{\partial q_3(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial q_3(t, x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q_3(t, x, y)}{\partial y} + (\mu_1(x) + \mu_2(y))q_3(t, x, y) = 0 \qquad (4)$$

Для уравнения (4) получим два граничных условия:
$\{\xi(t+h)=3,\ 0\leqslant\omega_1<h,\ y\leqslant\omega_2<y+h\}=\{\xi(t)=2,\ y-h\leqslant\omega_2<y$, и за h поступила заявка, и за h не закончилось обслуживание $\}$,

$$\int_0^h da\int_y^{y+h} q_3(t+h,a,b)\,db=\int_{y-h}^{y} q_2(t,a)\,da(\lambda h+o(h))(1-\mu_2(y)h+o(h))$$
$$q_3(t,0,y)=\lambda q_2(t,y) \tag{4$'$}$$

$\{\xi(t+h)=3,\ x\leqslant\omega_1<x+h,\ 0\leqslant\omega_2<h\}=$
$\bigcup\limits_k\{\xi(t)=5,\ x-h\leqslant\omega_1<x,\ y_k\leqslant\omega_2<y_{k+1}$, и за h не закончено обслуживание линией С, и за h закончено обслуживание линией Д$\}$, где $y_k=hk,\ y_k\geqslant x, k\in\mathbb{N}$.

$$\int_x^{x+h} da\int_0^h q_3(t+h,a,b)\,db=$$
$$=\sum_{k:\,y_k\geqslant x}\int_{x-h}^{x} da\int_{y_k}^{y_{k+1}} q_5(t,a,b)\,db(\mu_2(y_k)h+o(h))(1-\mu_1(x)h+o(h))$$
$$q_3(t,x,0)=\int_x^{\infty} q_5(t,x,y)\mu_2(y)\,dy \tag{4$''$}$$

$\{\xi(t+h)=4,\ y\leqslant\omega_2<y+h\}$=$\{\xi(t+h)=4,\ y-h\leqslant\omega_2<y$, и за h не закончено обслуживание, и за h не поступила заявка$\}+$
$\bigcup\limits_k\{\xi(t)=3,\ x_k\leqslant\omega_1<x_{k+1},\ y-h\leqslant\omega_2<y$, и за h закончено обслуживание линией С , и за h не закончено обслуживание линией Д$\}$.

$$\int_y^{y+h} q_4(t+h,a)\,da=\int_{y-h}^{y} q_4(t,a)\,da(1-\mu_2(y)h+o(h))(1-\lambda h+o(h))+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}} da\int_{y-h}^{y} q_3(t,a,b)\,db(\mu_1(x_k)h+o(h))(1-\mu_2(y)h+o(h)),$$
$$\int_y^{y+h} q_4(t+h,a)\,da-\int_{y-h}^{y} q_4(t,a)\,da+(\mu_2(y)h+\lambda h+o(h))\int_{y-h}^{y} q_4(t,a)\,da=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} q_3(t,x_k,y)h^2(\mu_1(x_k)h+o(h)),$$
$$\frac{\partial q_4(t,y)}{\partial t}+\frac{\partial q_4(t,y)}{\partial y}+(\mu_2(y)+\lambda)q_4(t,y)=\int_0^{\infty} q_3(t,x,y)\mu_1(x)\,dx \tag{5}$$

Получим граничное условие:
$\{\xi(t+h)=4,\ 0\leqslant\omega_2<h\}$=$\bigcup\limits_{k,j}\{\xi(t)=6,\ y_k\leqslant\omega_2<y_{k+1},\ z_j\leqslant\omega_3<z_{j+1}$, и за h

закончилось обслуживание},

$$\int_0^h q_4(t+h,a)\,da = \sum_{k,j} \int_{y_k}^{y_{k+1}} da \int_{z_j}^{z_{j+1}} q_6(t,a,b)\,db(\mu_2(y_k)h + o(h)),$$

$$q_4(t,0) = \int_0^\infty dz \int_z^\infty q_6(t,y,z)\mu_2(y)\,dy \tag{5$'$}$$

Далее,

$$\frac{\partial q_5(t,x,y)}{\partial t} + \frac{\partial q_5(t,x,y)}{\partial x} + \frac{\partial q_5(t,x,y)}{\partial y} + (\mu_1(x) + \mu_2(y))q_5(t,x,y) = 0 \tag{6}$$

Заметим, что уравнение (6) получается при помощи тех же рассуждений, какие были использованы для получения уравнения (4), отличие состоит лишь в том, что для уравнения (6) получим одно граничное условие, поскольку функция $q_5(t,x,y)$ отлична от нуля при $0 \leqslant x \leqslant y$:
$\{\xi(t+h) = 5,\ 0 \leqslant \omega_1 < h,\ y \leqslant \omega_2 < y+h\} = \{\xi(t) = 4,\ y-h \leqslant \omega_2 < y$, и за h не закончено обслуживание, и за h поступила заявка$\}$.

$$\int_0^h da \int_y^{y+h} q_5(t+h,a,b)\,db = \int_{y-h}^y q_4(t,a)\,da(\lambda h + o(h))(1 - \mu_1(y)h + o(h))$$

$$q_5(t,0,y) = \lambda q_4(t,y) \tag{6$'$}$$

$\{\xi(t+h) = 6,\ y \leqslant \omega_2 < y+h,\ z \leqslant \omega_3 < z+h\} =$
$\{\xi(t) = 6,\ y-h \leqslant \omega_2 < y,\ z-h \leqslant \omega_3 < z$, и за h не закончено обслуживание$\}$.

$$\frac{\partial q_6(t,y,z)}{\partial t} + \frac{\partial q_6(t,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial q_6(t,y,z)}{\partial z} + \mu_2(y)q_6(t,y,z) = 0 \tag{7}$$

$\{\xi(t+h) = 6,\ y \leqslant \omega_2 < y+h,\ 0 \leqslant \omega_3 < h\} =$
$\bigcup\limits_k \{\xi(t) = 5,\ x_k \leqslant \omega_1 < x_{k+1},\ y-h \leqslant \omega_2 < y$, и за h не закончено обслуживание линией Д, и за h закончено обслуживание линией С$\}$, где $x_k = hk,\ x_k \leqslant y$.

$$\int_y^{y+h} da \int_0^h q_6(t+h,a,b)\,db =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} da \int_{y-h}^{y} q_5(t,a,b)\,db(\mu_1(x_k)h + o(h))(1 - \mu_2(y)h + o(h)),$$

$$q_6(t,y,0) = \int_0^y q_5(t,x,y)\mu_1(x)\,dx \tag{7$'$}$$

Для уравнения (7) получено только одно граничное условие (7$'$), поскольку функция $q_5(t,x,y)$ отлична от нуля только при $0 \leqslant x \leqslant y$.

В стационарном режиме, при $t \to \infty$ вероятности состояний системы обозначим через p_k, $k = \overline{0,6}$. Понятно, что $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)$. Обозначим через $g_k(x) := \lim\limits_{t\to\infty} q_k(t,x)$, $k = 1,2,4$, $\quad g_k(x,y) = \lim\limits_{t\to\infty} q_k(t,x,y)$, $k = 3,5,6$.

Поскольку частные производные по t от функций $q_k(\ldots)$ при $t \to \infty$ стремятся к нулю, то в стационарном режиме система интегро – дифференциальных уравнений и граничных условий упростится и примет вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda p_0 = \int_0^\infty g_2(y)\mu_2(y)\,dy,\\
&g_1'(x) + \mu_1(x)g_1(x) = \int_0^\infty g_3(x,y)\mu_2(y)\,dy, \quad g_1(0) = \lambda p_0,\\
&g_2'(y) + (\mu_2(y) + \lambda)g_2(y) = 0,\\
&g_2(0) = \int_0^\infty g_1(x)\mu_1(x)\,dx + \int_0^\infty g_4(y)\mu_2(y)\,dy,\\
&\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y} + (\mu_1(x) + \mu_2(y))g_3(x,y) = 0,\\
&g_3(0,y) = \lambda g_2(y), \quad g_3(x,0) = \int_x^\infty g_5(x,y)\mu_2(y)\,dy,\\
&g_4'(y) + (\mu_2(y) + \lambda)g_4(y) = \int_0^\infty g_3(x,y)\mu_1(x)\,dx,\\
&g_4(0) = \int_0^\infty dz \int_z^\infty g_6(y,z)\mu_2(y)\,dy,\\
&\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_5(x,y)}{\partial y} + (\mu_1(x) + \mu_2(y))g_5(x,y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant y,\\
&g_5(0,y) = \lambda g_4(y),\\
&\frac{\partial g_6(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial g_6(y,z)}{\partial z} + \mu_2(y)g_6(y,z) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant y,\\
&g_6(y,0) = \int_0^y g_5(x,y)\mu_1(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{$*$}$$

Решение системы $(*)$ **в случае** $\mu_2(y) = \mu_2$ Аналитическое решение системы $(*)$ удалось получить в случае, если $\mu_2(y) = \mu_2 = \mathrm{const}$. Тогда система $(*)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\lambda p_0 = \mu_2 p_2 \tag{8}$$

$$g_1'(x) + \mu_1(x)g_1(x) = \mu_2 \int_0^\infty g_3(x,y)\,dy, \tag{9}$$

$$g_1(0) = \lambda p_0, \tag{9$'$}$$

$$g_2'(y) + (\mu_2 + \lambda)g_2(y) = 0, \tag{10}$$

$$g_2(0) = \int_0^\infty g_1(x)\mu_1(x)\,dx + \mu_2 p_4 \tag{10$'$}$$

$$\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y}+(\mu_1(x)+\mu_2)g_3(x,y)=0, \tag{11}$$

$$g_3(0,y)=\lambda g_2(y) \tag{11$'$}$$

$$g_3(x,0)=\mu_2\int_x^\infty g_5(x,y)\,dy \tag{11$''$}$$

$$g_4'(y)+(\mu_2+\lambda)g_4(y)=\int_0^\infty g_3(x,y)\mu_1(x)\,dx \tag{12}$$

$$g_4(0)=\mu_2 p_6 \tag{12$'$}$$

$$\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial g_5(x,y)}{\partial y}+(\mu_1(x)+\mu_2)g_5(x,y)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant y \tag{13}$$

$$g_5(0,y)=\lambda g_4(y) \tag{13$'$}$$

$$\frac{\partial g_6(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial g_6(y,z)}{\partial z}+\mu_2 g_6(y,z)=0, \quad 0\leqslant z\leqslant y \tag{14}$$

$$g_6(y,0)=\int_0^y g_5(x,y)\mu_1(x)\,dx \tag{14$'$}$$

Мы будем использовать следующие формулы:
для решения уравнения $u'(x)+f(x)u(x)=g(x), \quad x\geqslant 0:$

$$u(x)=\exp\left(-\int_0^x f(t)\,dt\right)\left(u(0)+\int_0^x g(t)\exp\left(\int_0^t f(y)\,dy\right)dt\right), \tag{15}$$

для решения уравнения $u_a'(a,b)+u_b'(a,b)+(\alpha(a)+\beta(b))u(a,b)=0:$

$$u(a,b)=\begin{cases} u(a-b,0)\exp\left(-\int\limits_{a-b}^{a}\alpha(t)\,dt\right)\exp\left(-\int\limits_0^b\beta(t)\,dt\right),\ 0\leqslant b\leqslant a\\ u(0,b-a)\exp\left(-\int\limits_0^a\alpha(t)\,dt\right)\exp\left(-\int\limits_{b-a}^{b}\beta(t)\,dt\right),\ 0\leqslant a\leqslant b\end{cases} \tag{16}$$

Из (13) и (13$'$) по формуле (16) имеем:
$g_5(x,y)=g_5(0,y-x)\exp\left(-\int_0^x(\mu_1(t)+\mu_2)\,dt\right),\ 0\leqslant x\leqslant y.$
Используя обозначение для функции надёжности случайной величины ω_1
$\Phi_1(x)=\mathbb{P}\{\omega_1\geqslant x\}=\exp\left(-\int_0^x\mu_1(t)\,dt\right),$ получаем:

$$g_5(x,y)=\lambda g_4(y-x)\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x) \tag{17}$$

Преобразуем с помощью (17) интеграл в соотношении (11$''$):

$$\mu_2\int_x^\infty g_5(x,y)\,dy=\lambda\mu_2\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)\int_x^\infty g_4(y-x)\,dy=\lambda\mu_2\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)p_4$$

Далее из (11),(11$'$) и (11$''$), используя (16), получаем:

$$g_3(x,y)=\begin{cases} g_3(x-y,0)\exp\left(-\int\limits_{x-y}^{x}(\mu_1(t)+\mu_2)\,dt\right),\ 0\leqslant y\leqslant x\\ g_3(0,y-x)\exp\left(-\int\limits_0^x(\mu_1(t)+\mu_2)\,dt\right),\ 0\leqslant x\leqslant y\end{cases}$$

После некоторых преобразований получаем окончательно:

$$g_3(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu_2\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)p_4, \ 0 \leqslant y \leqslant x \\ \lambda g_2(y-x)\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x), \ 0 \leqslant x \leqslant y \end{cases} \tag{18}$$

Преобразуем интеграл в уравнении (12):

$$\int_0^\infty g_3(x,y)\mu_1(x)\,dx = \int_0^y \lambda g_2(y-x)\Phi_1(x)\mu_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dx + \\ + \int_y^\infty \lambda\mu_2 p_4\Phi_1(x)\mu_1(x)\exp(-\mu_2 x)dx.$$

Обозначим через $f_1(x)$ плотность распределения случайной величины ω_1, тогда $\Phi_1(x)\mu_1(x) = f_1(x)$ и уравнение (12) примет вид:

$$g_4'(y)+(\mu_2+\lambda)g_4(y) = \lambda\int_0^y g_2(y-x)f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dx + \lambda\mu_2 p_4\int_y^\infty f_1(x)\exp(-\mu_2 x)dx$$

Для решения данного уравнения с начальным условием $(12\,')$ будем использовать преобразование Лапласа и некоторые его свойства.

Если функция $h(t)$ является оригиналом, то изображение будем обозначать через

$$h^*(s) = \int_0^\infty \exp(-st)h(t)\,dt = (h(t))^*_{(s)}$$

Заметим, что первый интеграл в правой части уравнения является свёрткой двух функций:

$$\int_0^y g_2(y-x)f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dx = \big(g_2(x) * f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\big)(y)$$

и потому преобразование Лапласа от этого интеграла вычисляется легко:

$$\left(\int_0^y g_2(y-x)f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dx\right)^*(s) = g_2^*(s)f_1^*(s+\mu_2).$$

Преобразование Лапласа от второго интеграла правой части уравнения вычисляется следующим образом:

$$\left(\int_y^\infty f_1(x)\exp(-\mu_2 x)dx\right)^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sy)\,dy\left(\int_y^\infty f_1(x)\exp(-\mu_2 x)dx\right) = \\ = \int_0^\infty dx\int_0^x \exp(-sy)f_1(x)\exp(-\mu_2 x)dy = \\ = \int_0^\infty dx f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\frac{1}{s}(1-\exp(-sx)) = \frac{1}{s}(f_1^*(\mu_2) - f_1^*(\mu_2+s))$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получим:

$$sg_4^*(s) - \mu_2 p_6 + (\lambda + \mu_2) g_4^*(s) = \lambda g_2^*(s) f_1^*(s + \mu_2) + \lambda \mu_2 p_4 \frac{1}{s} (f_1^*(\mu_2) - f_1^*(\mu_2 + s))$$

Переходя к пределу в обеих частях данного соотношения при $s \to 0$, получим:

$$-\mu_2 p_6 + (\lambda + \mu_2) p_4 = \lambda p_2 f_1^*(\mu_2) - \lambda \mu_2 p_4 f_1^{*\prime}(\mu_2) \tag{19}$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части уравнения (9):

$$\int_0^\infty g_3(x, y)\, dy = \int_0^x \lambda \mu_2 p_4 \Phi_1(x) \exp(-\mu_2 x) dy + \int_x^\infty \lambda g_2(y - x) \Phi_1(x) \exp(-\mu_2 x) dy = \lambda \mu_2 p_4 x \Phi_1(x) \exp(-\mu_2 x) + \lambda p_2 \Phi_1(x) \exp(-\mu_2 x)$$

После этого уравнение (9) преобразуется и для его решения используется формула (15):

$$g_1'(x) + \mu_1(x) g_1(x) = \lambda \mu_2^2 p_4 \Phi_1(x) \exp(-\mu_2 x) + \lambda \mu_2 p_2 \Phi_1(x) \exp(-\mu_2 x),\ g_1(0) = \lambda p_0,\ g_1(x) = = \exp\left(-\int_0^x \mu_1(t)\, dt\right) \left(\lambda p_0 + \int_0^x (\lambda \mu_2^2 p_4 t + \lambda \mu_2 p_2) \exp(-\mu_2 t) \Phi_1(t) \exp\left(\int_0^t \mu_1(y)\, dy\right) dt\right) = = \Phi_1(x) \left(\lambda p_0 + \lambda \mu_2^2 p_4 \int_0^x t \exp(-\mu_2 t) dt + \lambda \mu_2 p_2 \int_0^x \exp(-\mu_2 t) dt\right).$$

Окончательно получаем:

$$g_1(x) = \Phi_1(x) \Big(\lambda p_0 + \lambda p_4 \big(1 - \exp(-\mu_2 x) - \mu_2 x \exp(-\mu_2 x)\big) + \lambda p_2 \big(1 - \exp(-\mu_2 x)\big)\Big) \tag{20}$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части $(10')$:

$$\int_0^\infty g_1(x) \mu_1(x)\, dx = = \int_0^\infty f_1(x) \Big(\lambda p_0 + \lambda p_4 \big(1 - \exp(-\mu_2 x) - \mu_2 x \exp(-\mu_2 x)\big) + \lambda p_2 \big(1 - \exp(-\mu_2 x)\big)\Big) dx = = \lambda p_0 + \lambda p_4 \big(1 - f_1^*(\mu_2) + \mu_2 f_1^{*\prime}(\mu_2)\big) + \lambda p_2 \big(1 - f_1^*(\mu_2)\big)$$

После этого решение уравнения (10) с начальным условием $(10')$ выписывается по формуле (15):

$$g_2(y) = \exp(-(\lambda + \mu_2) y) \left(\lambda p_0 + \lambda p_4 \big(1 - f_1^*(\mu_2) + \mu_2 f_1^{*\prime}(\mu_2)\big) + \mu_2 p_4 + \lambda p_2 \big(1 - f_1^*(\mu_2)\big)\right) \tag{21}$$

Преобразуем интеграл в соотношении $(14')$:

$$\int_0^y g_5(x, y) \mu_1(x)\, dx = \int_0^y \lambda g_4(y - x) f_1(x) \exp(-\mu_2 x)\, dx = \lambda \Big(g_4(x) * f_1(x) \exp(-\mu_2 x)\Big)(y)$$

Из (14) и (14′) имеем:

$$g_6(y,z) = g_6(y-z,0)\exp(-\mu_2 z) = \lambda\Big(g_4(x)*f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\Big)(y-z)\exp(-\mu_2 z) \quad (22)$$

Далее к однородным алгебраическим уравнениям (8) и (19) для стационарных вероятностей состояний системы p_k добавим ещё пять однородных уравнений. Ясно, что полученная таким образом система должна быть избыточной, т.е. любое из её уравнений должно быть следствием остальных. Этот факт можно использовать для контроля правильности получения уравнений. Добавление же к однородной системе нормировочного уравнения $\sum\limits_{k=0}^{6} p_k = 1$ позволит найти велечины $p_k,\ k=\overline{0,6}$. Итак, из (17) имеем:

$$p_5 = \int_0^\infty dx \int_x^\infty g_5(x,y)\,dy = \lambda\int_0^\infty dx\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)\int_x^\infty g_4(y-x)\,dy$$

Окончательно:

$$p_5 = \lambda\Phi_1^*(\mu_2)p_4 \quad (23)$$

Из (18) получаем:

$$\begin{aligned} p_3 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty g_3(x,y)\,dy = \int_0^\infty dx \int_0^x \lambda\mu_2 p_4\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dy + \\ + \int_0^\infty dx \int_x^\infty \lambda g_2(y-x)\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dy = \lambda\mu_2 p_4\int_0^\infty x\Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dx + \\ + \lambda\int_0^\infty \Phi_1(x)\exp(-\mu_2 x)\,dx\int_x^\infty g_2(y-x)\,dy. \end{aligned}$$

$$p_3 = -\lambda\mu_2 p_4\Phi_1^{*\prime}(\mu_2) + \lambda p_2\Phi_1^*(\mu_2) \quad (24)$$

Из (20) получаем: $\quad p_1 = \int_0^\infty g_1(x)\,dx =$

$$= \int_0^\infty \Phi_1(x)\Big(\lambda p_0 + \lambda p_4\big(1-\exp(-\mu_2 x) - \mu_2 x\exp(-\mu_2 x)\big) + \lambda p_2\big(1-\exp(-\mu_2 x)\big)\Big)dx$$

Если обозначить математическое ожидание случайной величины ω_1 через $\frac{1}{\mu_1}$:

$$M\omega_1 = \int_0^\infty \Phi_1(x)\,dx = \frac{1}{\mu_1},$$

то окончательно имеем:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}p_0 + \lambda p_4\Big(\frac{1}{\mu_1} - \Phi_1^*(\mu_2) + \mu_2\Phi_1^{*\prime}(\mu_2)\Big) + \lambda p_2\Big(\frac{1}{\mu_1} - \Phi_1^*(\mu_2)\Big) \quad (25)$$

Из (21) имеем: $$p_2 = \int_0^\infty g_2(y)\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \exp(-(\lambda+\mu_2)y)\left(\lambda p_0 + \lambda p_4\big(1 - f_1^*(\mu_2) + \mu_2 f_1^{*\prime}(\mu_2)\big) + \mu_2 p_4 + \lambda p_2\big(1 - f_1^*(\mu_2)\big)\right) dy,$$

$$(\lambda+\mu_2)p_2 = \lambda p_0 + \lambda p_4\big(1 - f_1^*(\mu_2) + \mu_2 f_1^{*\prime}(\mu_2)\big) + \mu_2 p_4 + \lambda p_2\big(1 - f_1^*(\mu_2)\big) \qquad (26)$$

Из (22) получаем:

$$p_6 = \int_0^\infty dz \int_z^\infty g_6(y,z)\,dy = \int_0^\infty dz \int_z^\infty \lambda\Big(g_4(x) * f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\Big)(y-z)\exp(-\mu_2 z)dy =$$
$$\lambda \int_0^\infty \exp(-\mu_2 z)dz \int_0^\infty \exp(-0\cdot y)\Big(g_4(x) * f_1(x)\exp(-\mu_2 x)\Big)(y)dy = \lambda\frac{1}{\mu_2} g_4^*(0) f_1^*(0+\mu_2),$$

$$p_6 = \frac{\lambda}{\mu_2} p_4 f_1^*(\mu_2) \qquad (27)$$

Искомая алгебраическая система будет состоять из (8), (19), (23) – (27) и нормировочного уравнения $\sum\limits_{k=0}^{6} p_k = 1$.

В заключение выпишем эту систему:

$$\begin{aligned}
&\lambda p_0 = \mu_2 p_2\\
&(\lambda+\mu_2)p_4 - \mu_2 p_6 = \lambda p_2 f_1^*(\mu_2) - \lambda\mu_2 p_4 f_1^{*\prime}(\mu_2)\\
&p_5 = \lambda\Phi_1^*(\mu_2)p_4\\
&p_3 = -\lambda\mu_2 p_4 \Phi_1^{*\prime}(\mu_2) + \lambda p_2 \Phi_1^*(\mu_2)\\
&p_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}p_0 + \lambda p_4\Big(\frac{1}{\mu_1} - \Phi_1^*(\mu_2) + \mu_2\Phi_1^{*\prime}(\mu_2)\Big) + \lambda p_2\Big(\frac{1}{\mu_1} - \Phi_1^*(\mu_2)\Big) \qquad (**)\\
&(\mu_2 + \lambda f_1^*(\mu_2))p_2 = \lambda p_0 + \big(\lambda + \mu_2 - \lambda f_1^*(\mu_2) + \lambda\mu_2 f_1^{*\prime}(\mu_2)\big)p_4\\
&p_6 = \frac{\lambda}{\mu_2} p_4 f_1^*(\mu_2)\\
&p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.
\end{aligned}$$

Частный случай $\mu_1(x) = \mu_1$, $\mu_2(y) = \mu_2$. Этот случай удобно рассматривать для контроля формул предыдущего случая, т.к. случайный процесс оказывается марковским и линейная система уравнений для стационарных вероятностей состояний выписывается по стрелкам графа переходов:

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu_2 p_2\\
\mu_1 p_1 &= \lambda p_0 + \mu_2 p_3\\
(\lambda+\mu_2)p_2 &= \mu_1 p_1 + \mu_2 p_4\\
(\mu_1+\mu_2)p_3 &= \lambda p_2 + \mu_2 p_5\\
(\lambda+\mu_2)p_4 &= \mu_1 p_3 + \mu_2 p_6
\end{aligned}$$

$$(\mu_1+\mu_2)p_5 = \lambda p_4$$
$$\mu_2 p_6 = \mu_1 p_5$$
$$p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6 = 1.$$

Преодолев некоторые вычислительные трудности, систему (**) можно привести к данной системе, поскольку при $\mu_1(x)=\mu_1$ имеем:

$$\Phi_1^*(s)=\frac{1}{s+\mu_1},\quad \Phi_1^{*\prime}(s)=-\frac{1}{(s+\mu_1)^2},\quad f_1^*(s)=\frac{\mu_1}{s+\mu_1},\quad f_1^{*\prime}(s)=-\frac{\mu_1}{(s+\mu_1)^2}$$

Зная стационарные вероятности p_j можно найти

а) вероятность того, что линия (Д) свободна: p_0+p_1;

б) вероятность того, что линия (С) свободна: $p_0+p_2+p_4$;

в) вероятность отказа для вновь прибывшей заявки: $p_1+p_3+p_5+p_6$;

г) среднее число заявок в системе: $p_1+p_2+2p_3+2p_4+3p_5+3p_6$.

Заключение. Исследование системы $M/G/1$ восходит к классическим работам А.Я. Хинчина. Нахождение аналитического решения для системы $M/G/2$ представляет известные трудности. Авторами получены аналитические формулы для стационарных вероятностей системы $M/G/2/0$ в случае, когда время обслуживания на одной из линий имеет произвольное непрерывное распределение, а на другой — экспоненциальное распределение.

Список цитируемых источников

1. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. — М.: Изд-во РУДН, 1995. — 529 с.
2. *Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С.* Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: "Выща школа", 1987. – 246 с.
3. *Коваленко А.И., Смолич В.П.* Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками // Динамические системы. – ТНУ, 2000. – Вып.16 – с.137-142.
4. *Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.* Исследование надёжности трёхэлементной системы с приоритетным обслуживанием двумя наладчиками // ТВИМ. – ТНУ, 2007. – №1, с.

Получена 30.03.2008