Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 57–68

УДК 517.9:532

Модели обобщенных сжимаемых вязкоупругих жидкостей. Малые движения баротропной жидкости Олдройта

Д. А. Закора

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: dmitry_@crimea.edu*

Аннотация. В работе выводятся математические модели сжимаемых вязкоупругих жидкостей Максвелла, Олдройта и Кельвина-Фойгта. Изучается модель вращающейся вязкоупругой баротропной жидкости Олдройта. Начально-краевая задача, описывающая модель, сводится к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. На основе этой задачи Коши доказывается теорема об однозначной сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи. Выводится спектральная задача, ассоциированная с нормальными колебаниями изучаемой системы.

Ключевые слова: модель Олдройта, вязкоупругая жидкость, задача Коши, существование, единственность.

Введение

В работе изучается модель вязкоупругой баротропной жидкости, которая является развитием модели Олдройта для несжимаемой жидкости. Первые модели несжимаемых жидкостей, учитывающие предысторию течения и названные впоследствии линейными вязкоупругими жидкостями, были предложены в XIX в. Дж. Максвеллом [13], [14], В. Кельвином [12] и В. Фойгтом [17], [18]. Эти модели были развиты в середине XX в. в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта [15], [16]. Впоследствии эти и более общие модели изучались многими авторами. Отметим работы [9], [4] (см. также указанную там литературу), посвященные исследованию начально-краевых задач для уравнений движений жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта.

Спектральному анализу модели Олдройта вязкоупругой несжимаемой жидкости посвящены работы [7], [8], [1] (см. также указанную там литературу). В настоящей работе выводится корректная спектральная задача, ассоциированная с изучаемой системой, и хорошо приспособленная к дальнейшему спектральному анализу.

1. Постановка задачи

1.1. Модели вязкоупругих сжимаемых жидкостей

Как известно, движение вязкой сжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описывается следующей системой уравнений в форме Коши:

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\Big] = -\nabla\widehat{P} + \mathrm{Div}\sigma + \widehat{\rho}\vec{F} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\widehat{\rho}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{1.2}$$

В данной системе $\vec{v} = \vec{v}(t,x)$ — поле скоростей жидкости, $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}(t,x)$ — плотность жидкости, $\widehat{P} = \widehat{P}(t,x)$ — давление в жидкости, $\vec{F} = \vec{F}(t,x)$ — поле внешних сил. Через $\mathrm{Div}\sigma$ обозначен вектор, координатами которого являются дивергенции строк матрицы $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$, где σ — тензор вязких напряжений в жидкости. При этом определяющее соотношение для вязкой сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \mu\Big[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\Big] + \eta\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} =: \mu\sigma_{ij}^{(1)} + \eta\sigma_{ij}^{(2)} \quad (i,j = 1,2,3). \tag{1.3}$$

Будем считать далее, что жидкость удовлетворяет обобщенной математической модели, описываемой следующим определяющим соотношением:

$$P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma = Q_n\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma^{(1)} + R_n\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma^{(2)}, \tag{1.4}$$

где $P_m(\lambda)$, $Q_n(\lambda)$, $R_n(\lambda)$ — многочлены степеней m и n соответственно. Если $n = m-1$, то определяющее соотношение (1.4) будет соответствовать модели Максвелла, если $n = m$ — модели Олдройта, если $n = m+1$ — модели Кельвина-Фойгта. Предположим, что корни полинома $P_m(\lambda)$ вещественны, различны и отрицательны, обозначим их через $-b_l$ $(l = \overline{1,m})$, а дроби $Q_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$, $R_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$ имеют следующие разложения:

$$\frac{Q_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1\mu_{-1}\lambda + \gamma_2\mu_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l+\lambda}, \quad \frac{R_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1\eta_{-1}\lambda + \gamma_2\eta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\eta_l}{b_l+\lambda}, \tag{1.5}$$

где $\mu_l, \eta_l > 0$, $l = \overline{-1,m}$, а γ_1, γ_2 принимают значения 0 или 1. При этом $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ для модели Максвелла, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ для модели Олдройта, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ для модели Кельвина-Фойгта. Из определяющего соотношения (1.4) с помощью преобразования Лапласа и представлений (1.5) можно найти (см. [4], с. 43-46) тензор вязких напряжений σ:

$$\sigma(t,x) = J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) + J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x), \tag{1.6}$$

$$J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) := \gamma_1\mu_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(1)}(t,x) + \gamma_2\mu_0\sigma^{(1)}(t,x) + \sum_{l=1}^m \int_0^t \mu_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(1)}(s,x)\,ds,$$

$$J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x) := \gamma_1\eta_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(2)}(t,x) + \gamma_2\eta_0\sigma^{(2)}(t,x) + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \eta_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(2)}(s,x)\,ds.$$

В (1.6) мы пренебрегли экспоненциально затухающим во времени слагаемым, порождаемым состоянием жидкости в начальный момент времени. Это слагаемое можно считать отнесенным к полю внешних сил.

Из системы (1.1)-(1.2) и соотношения (1.6) получим систему уравнений, описывающую движения обобщенной сжимаемой вязкоупругой жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\Big] = -\nabla\widehat{P} + J_1(t)\big(\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\nabla\mathrm{div}\vec{v}\big) + J_2(t)\nabla\mathrm{div}\vec{v} + \widehat{\rho}\vec{F} \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\widehat{\rho}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \quad (1.8)$$

Отметим здесь, что если $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ и жидкость несжимаема, то уравнения (1.7), (1.8) будут описывать обычную жидкость Одройта (см., например, [1]).

1.2. Уравнения малых движений баротропной жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающуюся область

Пусть сжимаемая жидкость Олдройта занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $S := \partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения области запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Далее будем считать, что сжимаемая жидкость удовлетворяет уравнению состояния баротропной жидкости: $\widehat{P} = a_\infty^2\widehat{\rho}$, где a_∞=const — скорость звука в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения (1.7) движения сжимаемой жидкости Олдройта, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления:

$$\nabla P_0 = \rho_0(-\vec{\omega}_0\times(\vec{\omega}_0\times\vec{r}) - g\vec{e}_3) = \rho_0\nabla(2^{-1}|\vec{\omega}_0\times\vec{r}|^2 - gx_3), \quad (1.9)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости. Из (1.9) и соотношения $P_0 = a_\infty^2\rho_0$ заключаем, что стационарная плотность ρ_0 является функцией параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. При этом ρ_0 будет постоянной только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле. Для функции $\rho_0(z)$ выполнено также следующее свойство: $0 < \alpha_1 \le \rho_0(z) \le \alpha_2$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x) = P_0(z) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(z) + \widetilde{\rho}(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\widetilde{\rho}(t,x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния.

Осуществим линеаризацию уравнений (1.7), (1.8) (при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$), записанных в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. Получим задачу о малых движениях баротропной вращающейся жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big) = -\nabla\big(a_\infty^2\rho_0^{-1}(z)\widetilde{\rho}(t,x)\big) + \\ + \rho_0^{-1}(z)\big(\mu_0\Delta\vec{u}(t,x) + (\eta_0 + 3^{-1}\mu_0)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(t,x)\big) + \\ + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_l\Delta\vec{u}(s,x) + (\eta_l + \frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(s,x)\big)\,ds + \vec{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega),$$

$$\frac{\partial\widetilde{\rho}(t,x)}{\partial t} + \mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big) = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \vec{u}(t,x) = \vec{0} \ \ (\text{на } S),$$

где $\vec{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в полученной системе, с целью ее симметризации, следующую замену: $a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\widetilde{\rho}(t,x) = \rho(t,x)$. В результате получим основную задачу:

$$\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big) = -\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big) + \\ + \rho_0^{-1}(z)\big(\mu_0\Delta\vec{u}(t,x) + (\eta_0 + 3^{-1}\mu_0)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(t,x)\big) + \qquad (1.10) \\ + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_l\Delta\vec{u}(s,x) + (\eta_l + \frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(s,x)\big)\,ds + \vec{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega),$$

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big) = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \vec{u}(t,x) = \vec{0} \ \ (\text{на } S). \qquad (1.11)$$

Для полноты формулировки задачи зададим еще начальные условия:

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \qquad (1.12)$$

2. Теорема о существовании и единственности сильного решения задачи. О спектральной задаче

2.1. Вспомогательные операторы и их свойства

Введем векторное гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ с весом $\rho_0(z)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} := \int_\Omega \rho_0(z)\vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega, \quad \|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \int_\Omega \rho_0(z)|\vec{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f, \rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Определим оператор $S\vec{u}(t,x) := i\big(\vec{u}(t,x) \times \vec{e}_3\big)$, $\mathcal{D}(S) = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Имеет место лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [5].

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$: $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$, $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$; более того, $\|\mathcal{S}\| = 1$.*

Будем считать далее, что граница S области Ω — класса C^2. Утверждения следующей леммы можно найти, например в [10].

Лемма 2. *Введем пространство $H_{A(\alpha,\beta)} := \{\vec{u} \in \vec{W}_2^1(\Omega) \big| \, \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S)\}$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:*

$$(\vec{u}, \vec{v})_{A(\alpha,\beta)} := \int_\Omega E_{\alpha,\beta}(\vec{u}, \overline{\vec{v}})\, d\Omega, \quad \|\vec{u}\|^2_{A(\alpha,\beta)} := \int_\Omega E_{\alpha,\beta}(\vec{u}, \vec{u})\, d\Omega,$$

$$E_{\alpha,\beta}(\vec{u}, \vec{v}) := \big(\beta - \frac{2}{3}\alpha\big) \mathrm{div}\vec{u}\, \mathrm{div}\vec{v} + \frac{1}{2}\alpha \sum_{j,k=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\Big), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Пространство $H_{A(\alpha,\beta)}$ является гильбертовым; оно компактно вложено в пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$: $H_{A(\alpha,\beta)} \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Порождающий оператор $A(\alpha, \beta)$ гильбертовой пары $(H_{A(\alpha,\beta)}; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, определен на $\mathcal{D}(A(\alpha, \beta)) = \vec{W}_2^2(\Omega) \cap H_{A(\alpha,\beta)}$ и обладает дискретным спектром. Для каждого поля $\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ существует и единственно обобщенное решение задачи:

$$-\rho_0^{-1}(z)\big(\alpha\Delta\vec{u} + (\beta + 3^{-1}\alpha)\nabla \mathrm{div}\vec{u}\big) = \vec{w} \quad (\textit{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\textit{на } S),$$

выражаемое формулой $\vec{u} = A^{-1}(\alpha, \beta)\vec{w}$.

С помощью леммы 2 введем операторы $A_l := A(\mu_l, \eta_l)$ $(l = \overline{0, m})$. В силу условия (1.5) очевидно, что $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_l)$ $(l = \overline{1, m})$, а нормы в энергетических пространствах H_{A_l} $(l = \overline{0, m})$ эквивалентны между собой.

Определим оператор $B\vec{u}(t,x) := a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \mathrm{div}(\rho_0(z)\vec{u}(t,x))$, $\mathcal{D}(B) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) |$
$\mathrm{div}(\rho_0\vec{u}) \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (на S)$\} \supset \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l = \overline{1, m})$.

Лемма 3. *Сопряженный оператор $B^*\rho = -\nabla(a_\infty \rho_0^{-1/2}\rho)$, $\mathcal{D}(B^*) = W^1_{2,\rho_0}(\Omega)$, $W^1_{2,\rho_0}(\Omega) := W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Кроме того, имеет место неравенство:*

$$\exists\, c_l > 0 : \quad \|B\vec{u}\|_{W^1_{2,\rho_0}(\Omega)} \le c_l \|A_l \vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{D}(A_l) \ \ (l = \overline{0, m}).$$

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in \mathcal{D}(B)$. Вычислим

$$(B\vec{u}, \rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = \int_\Omega a_\infty \rho_0^{-1/2} \mathrm{div}(\rho_0 \vec{u}) \overline{\rho}\, d\Omega = -\int_\Omega \rho_0 \vec{u} \cdot \overline{\nabla\big(a_\infty \rho_0^{-1/2} \rho\big)}\, d\Omega +$$
$$+ \int_S a_\infty \rho_0^{1/2} \overline{\rho} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = -\int_\Omega \rho_0 \vec{u} \cdot \overline{\nabla\big(a_\infty \rho_0^{-1/2} \rho\big)}\, d\Omega = \big(\vec{u}, -\nabla\big(a_\infty \rho_0^{-1/2} \rho\big)\big)_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)}.$$

Отсюда и из определения сопряженного оператора следуют формулы для B^*.

Для доказательства неравенств в лемме понадобятся некоторые вспомогательные оценки и рассуждения. Для $l = \overline{0, m}$ рассмотрим задачи

$$L_l \vec{u} := -\mu_l \Delta \vec{u} - (\eta_l + 3^{-1} \mu_l) \nabla \mathrm{div} \vec{u} = \vec{f} \ (\text{в } \Omega), \quad B_{L,l} \vec{u} := \vec{u} = \vec{g} \ (\text{на } S). \tag{2.1}$$

Можно проверить, что матричные дифференциальные выражения L_l определяют невырожденные правильно эллиптические по Дуглису-Ниренбергу системы, а граничные условия $B_{L,l}$ удовлетворяют условию дополнительности (см. [11]). Из теоремы о нормальной разрешимости из [11] (см. с. 241) следует, что существуют константы $c_{1,l} > 0$, $c_{2,l} > 0$ $(l = \overline{0, m})$, не зависящие от $\vec{u}$, такие, что

$$c_{1,l} \|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)} \le \|L_l \vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} \le c_{2,l} \|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)} \quad \forall \vec{u} \in \vec{W}_2^2(\Omega, B_{L,l}), \tag{2.2}$$
$$\vec{W}_2^2(\Omega, B_{L,l}) := \{\vec{u} \in \vec{W}_2^2(\Omega) \big| B_{L,l} \vec{u} = \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S)\} = \mathcal{D}(A_l),$$
$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)} := \sum_{k=1}^3 \Big[\|u_k\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u_k\|^2_{L_2(\Omega)}\Big].$$

Далее, из неравенства Эрлинга-Ниренберга (см. [2], с. 33) следует, что существует константа $c_3 > 0$, не зависящая от $\vec{u}$, такая, что

$$\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_3 \|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)} \quad \forall \vec{u} \in \vec{W}_2^2(\Omega), \quad k, j = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Пусть теперь $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_l) = \vec{W}_2^2(\Omega, B_{L,l})$ $(l = \overline{0, m})$. С использованием неравенств (2.2), (2.3) проведем следующие оценки

$$\|B\vec{u}\|^2_{W^1_{2,\rho_0}(\Omega)} = a_\infty^2 \int_\Omega \big(|\nabla \rho_0^{-1/2} \mathrm{div}(\rho_0 \vec{u})|^2 + |\rho_0^{-1/2} \mathrm{div}(\rho_0 \vec{u})|^2\big)\, d\Omega \le c_4 \|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)} \le$$
$$\le c_4 c_{1,l}^{-1} \|L_l \vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} \le c_4 c_{1,l}^{-1} \max_{x \in \overline{\Omega}} \rho_0 \int_\Omega \rho_0 |\rho_0^{-1} L_l \vec{u}|^2\, d\Omega = c_l \|A_l \vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)},$$

где $c_l = c_l(c_{1,l}, c_3, \rho_0, a_\infty, \Omega) > 0$ — некоторая абсолютная константа. □

2.2. Переход к дифференциально-операторному уравнению. Теорема о сильных решениях в исследуемой задаче

С использованием введенных операторов задачу (1.10)-(1.12) запишем в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}+(2\omega_0 iS+A_0)\vec{u}-B^*\rho+\displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l\vec{u}(s)\,ds=\vec{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt}+B\vec{u}=0, \quad (\vec{u}(0);\rho(0))^\tau:=(\vec{u}^0;\rho^0)^\tau. \end{cases} \tag{2.4}$$

Осуществим в системе (2.4) следующие замены:

$$\vec{v}_l(t):=\int_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l^{1/2}\vec{u}(s)\,ds \quad (l=\overline{1,m}). \tag{2.5}$$

Преобразованную систему (2.4) вместе с продифференцированными соотношениями (2.5) запишем в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}:=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus\mathcal{H}_\oplus$, где $\mathcal{H}_\oplus:=L_{2,\rho_0}(\Omega)\oplus\big(\oplus_{l=1}^m\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\big)$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ w\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}A_0+2\omega_0 iS & \mathcal{C}^*\\ -\mathcal{C} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{f}(t)\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\vec{u}(0)\\ w(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u}^0\\ w^0\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Здесь $w:=(\rho;\vec{v}_1;\ldots;\vec{v}_m)^\tau$, $w^0:=(\rho^0;\vec{0};\ldots;\vec{0})^\tau$, $\mathcal{C}:=\big(-B,A_1^{1/2},\ldots,A_m^{1/2}\big)^\tau$, $\mathcal{C}^*=\big(-B^*,A_1^{1/2},\ldots,A_m^{1/2}\big)$, $\mathcal{G}:=\operatorname{diag}\big(0,b_1I,\ldots,b_mI\big)$.

Задачу (2.6) запишем более коротко:

$$\frac{dy}{dt}=-\mathcal{A}y+\mathcal{F}(t), \quad y(0)=y^0, \tag{2.7}$$

где $y:=(\vec{u};w)^\tau$, $y^0:=(\vec{u}^0;w^0)^\tau$, $\mathcal{F}(t):=(\vec{f}(t);0)^\tau$ и дадим следующее

Определение. Назовем сильным решением начально-краевой задачи (1.10)-(1.12) такие функции $\vec{u}$ и ρ, для которых функция $y(t)$ является сильным решением задачи Коши (2.7). В свою очередь, сильным решением задачи Коши (2.7) (см. [6], с. 38) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из $\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$, $\mathcal{A}y(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, $y(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, $y(0)=y^0$ и выполнено уравнение из (2.7) для любого $t\in\mathbb{R}_+$.

Для $l=\overline{1,m}$ определим следующие операторы:

$$Q_{l,0}:=A_l^{1/2}A_0^{-1/2}, \quad Q_{l,0}^+:=A_0^{-1/2}A_l^{1/2}, \quad Q_{B,0}:=BA_0^{-1/2}, \quad Q_{B,0}^+:=A_0^{-1/2}B^*. \tag{2.8}$$

Лемма 4. $Q_{l,0} \in \mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega,\rho_0))$, $Q_{B,0} \in \mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega,\rho_0), L_{2,\rho_0}(\Omega))$. *Операторы* $Q_{l,0}^+$, $Q_{B,0}^+$ *расширяются по непрерывности до ограниченных операторов* $Q_{l,0}^*$, $Q_{B,0}^*$ *соответственно. При этом* $Q_{l,0}^+ = Q_{l,0}^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ $(l=\overline{1,m})$, $Q_{B,0}^+ = Q_{B,0}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$.

Доказательство. Доказательство проведем для оператора $Q_{l,0}$. Ограниченность $Q_{l,0}$ следует из равенства $\mathcal{D}(A_l) = \mathcal{D}(A_0)$ $(l=\overline{1,m})$, а значит $Q_{l,0}^* \in \mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega,\rho_0))$. Далее, для любого $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\vec{v} \in \mathcal{D}(A_l^{1/2})$ имеем

$$(Q_{l,0}\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = (A_l^{1/2}A_0^{-1/2}\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = (\vec{u},Q_{l,0}^+\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = (\vec{u},Q_{l,0}^*\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}.$$

Отсюда следует, что $Q_{l,0}^+ = Q_{l,0}^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$, $\overline{Q_{l,0}^+} = Q_{l,0}^*$ $(l=\overline{1,m})$. □

Определим операторы $\mathcal{Q}_0 := \mathcal{C}A_0^{-1/2}$, $\mathcal{Q}_0^+ := A_0^{-1/2}\mathcal{C}^*$, которые строятся с помощью операторов из (2.8). Оператор $\mathcal{Q}_0 \in \mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega,\rho_0),\mathcal{H}_\oplus)$, а оператор $\mathcal{Q}_0^+$ допускает расширение по непрерывности до оператора $\mathcal{Q}_0^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\oplus,\vec{L}_2(\Omega,\rho_0))$. Свойства операторов $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_0^+$ доказывается как и в лемме 4.

Лемма 5. *Оператор уравнения из* (2.6) *(или* (2.7)*) не замкнут, однако допускает замыкание до максимального диссипативного оператора, который может быть представлен в симметричной форме:*

$$-\overline{\mathcal{A}} = -\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2},\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}_0^* \\ -\mathcal{Q}_0 & \mathcal{G}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2},\mathcal{I}\big) - \mathrm{diag}\big(2\omega_0 iS,0\big),$$

где $\mathcal{I}$ *— единичный оператор в* $\mathcal{H}_\oplus$, *и в форме Шура-Фробениуса:*

$$-\overline{\mathcal{A}} = -\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}_0A_0^{-1/2} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(A_0,\mathcal{G}+\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_0^*\big)\begin{pmatrix} I & A_0^{-1/2}\mathcal{Q}_0^* \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} - \mathrm{diag}\big(2\omega_0 iS,0\big).$$

При этом $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}}) = \{(\vec{u};w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{u} + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}_0^* w \in \mathcal{D}(A_0)\}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $-\overline{\mathcal{A}} - \mathrm{diag}(0,\mathcal{I})$. Непосредственно проверяется, что для него справедливы приведенные в лемме факторизации с заменой $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}+\mathcal{I}$. Этот оператор замкнут, поскольку является суммой ограниченного оператора и произведения трех замкнутых и ограниченно обратимых операторов; равномерно диссипативен, а область его значений — все пространство $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что рассматриваемый оператор максимальный и равномерно диссипативный. Следовательно, оператор $-\overline{\mathcal{A}}$, который является диссипативным оператором, замкнут и максимален.

Оператор уравнения (2.6), определенный на множестве $\mathcal{D}(A_0) \oplus \mathcal{D}(\mathcal{C}^*)$ является диссипативным и для него справедливы факторизации из леммы с заменой " $*$ " на " $+$ ". Отсюда следует, что он допускает замыкание, которое совпадает с $-\overline{\mathcal{A}}$. □

Рассмотрим наряду с задачей (2.7) задачу Коши с замкнутым оператором

$$\frac{dy}{dt} = -\overline{\mathcal{A}}y + \mathcal{F}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{2.9}$$

Относительно задачи Коши (2.9) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $y^0 \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}})$, *а функция* $\mathcal{F}(t)$ *удовлетворяет условию Гельдера:* $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+ \ \exists\, K = K(\tau) > 0,\ k(\tau) \in (0,1]$, *что*

$$\|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} \le K|t-s|^k \quad \textit{при} \quad 0 \le s,t \le \tau.$$

Тогда сильное решение задачи Коши (2.9) *существует и единственно.*

Доказательство. Рассмотрим факторизацию оператора $-\overline{\mathcal{A}}$ в форме Шура-Фробениуса и по ней введем обозначение: $-\overline{\mathcal{A}} =: -(\mathcal{I}+\mathcal{D}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{I}+\mathcal{D}_2) - \mathcal{S}$. Осуществим в задаче Коши (2.9) замену искомой функции $(\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)y(t) =: z(t)$, в результате получим следующую задачу Коши:

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{B}z + (\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)\mathcal{F}(t), \;\; z(0) = (\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)y^0, \tag{2.10}$$

где $-\mathcal{B} := -(\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{D}_1)\mathcal{A}_0 - (\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)\mathcal{S}(\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)^{-1}$.

Оператор $-\mathcal{A}_0 = -\mathrm{diag}\big(A_0, \mathcal{G}+\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_0^*\big)$, определенный на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A_0) \oplus \mathcal{H}_\oplus$, является самосопряженным и неотрицательным. По лемме 2 $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, следовательно, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а значит $(\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{D}_1) = (\mathcal{I}+\mathcal{D}_3)$, где $\mathcal{D}_3 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Отсюда и из $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ следует (см. [6]), что оператор $-\mathcal{B}$, определенный на $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $\mathcal{U}(t) := \exp(-t\mathcal{B})$ в $\mathcal{H}$, аналитической в некотором секторе, содержащем положительную полуось.

Из условий теоремы следует, что функция $(\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. Из $y^0 \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}})$ и факторизации оператора $-\overline{\mathcal{A}}$ в форме Шура-Фробениуса следует, что $z(0) = (\mathcal{I}+\mathcal{D}_2)y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$. По теореме 1.4 из [3] (см. [3], с. 130) задача (2.10) имеет единственное сильное решение. Осуществление обратной замены в (2.10) завершает доказательство. □

Следствием теоремы 1 является следующая основная теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, *а поле* $\vec{f}(t,x)$ *удовлетворяет условию Гельдера:* $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+ \ \exists\, K = K(\tau) > 0,\ k(\tau) \in (0,1]$, *что*

$$\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \le K|t-s|^k \quad \textit{при} \quad 0 \le s,t \le \tau.$$

Тогда сильное решение задачи (1.10)-(1.12) *существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, тогда $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}})$. Из условий теоремы следует, что функция $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. По теореме 1 задача Коши (2.9) имеет единственное сильное решение $y(t)$. Запишем уравнение (2.9) в виде системы:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -A_0\big(\vec{u} + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}_0^* w\big) - 2\omega_0 iS\vec{u} + \vec{f}(t), \quad \frac{dw}{dt} = \mathcal{Q}_0 A_0^{1/2}\vec{u} - \mathcal{G}w,$$

или, учитывая вид элемента w и операторов $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_0^*$, $\mathcal{G}$, в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \vec{u}' = -A_0\Big[\vec{u} - A_0^{-1/2}Q_{B,0}^*\rho + \sum\limits_{l=1}^{m} A_0^{-1/2}Q_{l,0}^*\vec{v}_l\Big] - 2\omega_0 iS\vec{u} + \vec{f}(t), \\ \rho' = -Q_{B,0}A_0^{1/2}\vec{u}, \quad \vec{v}_l' = Q_{l,0}A_0^{1/2}\vec{u} - b_l\vec{v}_l, \quad (l = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.11}$$

Если удастся раскрыть квадратные скобки в первом уравнении системы (2.11), то мы получим, что найденное сильное решение задачи Коши (2.9) является сильным решением задачи (2.7) с незамкнутым оператором и теорема будет доказана.

Учитывая, что $\vec{v}_l(0) = \vec{0}$ $(l = \overline{1,m})$ из второго и последующих уравнений системы (2.11) последовательно найдем:

$$\rho(t) = -\int_0^t Q_{B,0}A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds + \rho^0, \quad \vec{v}_l(t) = \int_0^t e^{-b_l(t-s)}Q_{l,0}A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds, \quad l = \overline{1,m}.$$

По условию теоремы $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, следовательно, $A_0^{-1/2}Q_{B,0}^*\rho^0 = A_0^{-1/2}Q_{B,0}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0 = A_0^{-1/2}Q_{B,0}^+\rho^0 = A_0^{-1}B^*\rho^0 \in \mathcal{D}(A_0)$. Отсюда следует, что выражение в квадратных скобках в уравнении из системы (2.11) будет из $\mathcal{D}(A_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{u}(t) + \int_0^t R(t-s)\vec{u}(s)\,ds =: \vec{r}(t) \in \mathcal{D}(A_0), \tag{2.12}$$

$$R(t-s) := A_0^{-1/2}\Big[Q_{B,0}^*Q_{B,0} + \sum_{l=1}^{m} e^{-b_l(t-s)}Q_{l,0}^*Q_{l,0}\Big]A_0^{1/2},$$

где $\vec{r}(t)$ непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция со значениями в $\mathcal{D}(A_0)$.

Введем пространство $H(A_0) := (\mathcal{D}(A_0), \|\cdot\|_{H(A_0)})$, где $\|\vec{u}\|_{H(A_0)} := \|A_0\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}$ для любого $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_0)$. Известно, что $H(A_0)$ — банахово пространство. Будем рассматривать (2.12) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в $H(A_0)$. Покажем, что ядро $R(t-s)$ этого интегрального уравнения непрерывно в равномерной операторной топологии при $0 \le s \le t < +\infty$ со значениями в $H(A_0)$. Для этого достаточно показать, что $A_0^{-1/2}Q_{B,0}^*Q_{B,0}A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(H(A_0))$, $A_0^{-1/2}Q_{l,0}^*Q_{l,0}A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(H(A_0))$ $(l = \overline{1,m})$. Докажем первое включение, оставшиеся включения доказываются похожим образом.

Из леммы 3 заключаем, что $Q_{B,0}A_0^{-1/2} = BA_0^{-1} \in \mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega,\rho_0), W_{2,\rho_0}^1(\Omega))$. Учитывая, что $\mathcal{D}(B^*) = W_{2,\rho_0}^1(\Omega)$ и $B^* \in \mathcal{L}(W_{2,\rho_0}^1(\Omega), \vec{L}_2(\Omega,\rho_0))$, вычислим

$$\begin{aligned}
&\|A_0^{-1/2}Q^*_{B,0}Q_{B,0}A_0^{1/2}\vec{u}\|_{H(A_0)} = \|A_0^{1/2}Q^*_{B,0}Q_{B,0}A_0^{-1/2}(A_0\vec{u})\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \\
&\quad = \|A_0^{1/2}Q^*_{B,0}|_{\mathcal{D}(B^*)}BA_0^{-1}(A_0\vec{u})\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \|B^*BA_0^{-1}(A_0\vec{u})\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \leq \\
&\quad \leq \|B^*\|_{\mathcal{L}(W^1_{2,\rho_0}(\Omega),\vec{L}_2(\Omega,\rho_0))}\|BA_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega,\rho_0),W^1_{2,\rho_0}(\Omega))}\|\vec{u}\|_{H(A_0)}, \quad \forall\vec{u}\in H(A_0).
\end{aligned}$$

Таким образом, ядро уравнения (2.12) непрерывно при $0 \leq s \leq t < +\infty$ со значениями в $H(A_0)$. Если $\vec{r}(t) \in C(\mathbb{R}_+, H(A_0))$, то уравнение (2.12) имеет единственное решение $\vec{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+, H(A_0) = \mathcal{D}(A_0))$. Следовательно, в системе (2.11) можно раскрыть квадратные скобки и заменить " $*$ " на " $+$ ", в результате получим, что найденное сильное решение задачи Коши (2.9) является сильным решением задачи (2.7) с незамкнутым оператором. Ссылка на определение завершает доказательство. □

2.3. О спектральной задаче

Будем разыскивать решения однородного уравнения (при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$) из (2.9) в виде $y(t) = \exp(-\lambda t)y$, где λ — спектральный параметр, а y — амплитудный элемент. В результате получим корректную спектральную задачу с замкнутым оператором:

$$\overline{\mathcal{A}}y = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}}), \tag{2.13}$$

которую будем ассоциировать с нормальными колебаниями баротропной жидкости Олдройта, заполняющей ограниченную равномерно вращающуюся область.

Исследование спектральной задачи, а также моделей баротропных жидкостей Максвелла и Кельвина-Фойгта будет проведено в следующих работах.

Для приведенной спектральной задачи будут доказаны утверждения о существенном и дискретном спектрах, утверждения о локализации и асимптотике спектра. В случае, когда система не вращается, находится в невесомости и обладает достаточно большой вязкостью решение эволюционной задачи (2.4) будет разложено по специальной $\mathcal{J}$-ортонормированной системе собственных элементов задачи (2.13).

Заключение

В работе предложены новые модели сжимаемых вязкоупругих жидкостей Олдройта, Максвелла и Кельвина-Фойгта, описываемые системами интегродифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрена задача о малых движениях жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело и подчиняющейся уравнению состояния баротропной жидкости. Для исследуемой начально-краевой задачи доказана теорема об однозначной сильной разрешимости. Сформулирована корректная спектральная задача о нормальных колебаниях изучаемой системы.

Список цитируемых источников

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости // Труды Санкт-Петербургского математического общества. — 1998. — Т.6. — С. 5–33.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — К.: Наукова думка, 1965. — 798 с.
3. *Голдстейн Дж. А.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.: Выща школа, 1989. — 347 с.
4. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т.31. — С. 3–144.
5. *Копачевский Н. Д, Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 412 с.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
7. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде // Успехи матем. наук. — 1989. — Т.44, №4.
8. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды // ДАН СССР. — 1989. — Т.309, №3. — С. 532–536.
9. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1987. — Т.179. — С. 126–164.
10. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 590 с.
11. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А.Дуглиса и Л.Ниренберга. II // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1966. — С. 233–297.
12. *Kelvin (Thomson) W.* On the theory viscoelastic fluids // Math. a. Phys. Pap. — 1875. — Vol. 3. — P. 27–84.
13. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases // Philos. Trans. Roy. Soc. London. — 1867. — Vol. 157. — P. 49–88.
14. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases // Philos. Mag. London. — 1868. — Vol. 35. — P. 129–145.
15. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state // Proc. Roy. Soc. London. — 1950. — A200. — P. 523–541.
16. *Oldroyd J. G.* The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions // Proc. Roy. Soc. London. — 1953. — A218. — P. 122–137.
17. *Voight W.* Uber die innere Reibung der fasten Korper, inslesondere der krystalle // Gottinden Abh. — 1889. — Bd. 36, №1. — S. 3–47.
18. *Voight W.* Uber innex Reibung faster Korper, insbesondere der Metalle // Ann. Phys. u. Chem. — 1892. — Bd. 47, №9. — S. 671–693.

Получена 29.05.2012