Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 69–88

УДК 517.977.1

Асимптотичне розв'язання задачі оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь

О. В. Тарасенко*, **В. П. Яковець****

*Ніжинський державний університет ім. М. Гоголя,
Ніжин 16600. *E-mail: sanya2167@rambler.ru*
**Державний вищий навчальний заклад "Університет менеджменту освіти
Київ. *E-mail: vasyl.yakovets@gmail.com*

Анотація. Розглядається задача оптимального керування процесом, який описується лінійною системою диференціальних рівнянь з малим параметром при похідних, у випадку кратного кореня відповідного характеристичного рівняння. Застосувавши принцип максимуму Понтрягіна та методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, побудовано асимптотичний розв'язок даної задачі.

Ключові слова: оптимальне керування, асимптотичні розвинення, гранична в'язка матриць.

1. Постановка задачі

Розглянемо оптимальний процес

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h} \int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u, u)\, dt \to \min_u, \tag{2}$$

який переводить систему із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{3}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{4}$$

за фіксований проміжок часу T, де $A(t,\varepsilon)$ — дійсна квадратна матриця n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ — $(n\times m)$ та $(m\times m)$-матриці відповідно, $x(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор стану, $u(t,\varepsilon)$ — m-вимірний вектор керування, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Подібна задача, яка описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, розглядалась в [7], [8], де передбачалось, що всі власні значення головної матриці $A(t,0)$ уявні. У більш загальній постановці задача (1), (2) вивчалась у роботі [6] за умови, що всі власні значення матриці $A(t,0)$ прості.

У даній роботі вивчається можливість побудови асимптотичного розв'язку цієї задачі у більш складному випадку, коли матриця $A(t,0)$ має кратний спектр. При цьому використовуються результати асимптотичного аналізу лінійних сингулярно збурених систем, проведеного в [9], [4].

Будемо припускати, що виконуються такі умови:

1°. Матриці $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \qquad C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k C_k(t), \qquad D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k D_k(t). \tag{5}$$

2°. $A_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

3°. Вектори початкового і кінцевого станів зображаються у вигляді розвинень

$$x_1(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^{(1)}, \qquad x_2(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^{(2)}. \tag{6}$$

4°. Головна матриця $A_0(t)$ системи (1) має кратне власне значення $\lambda_0(t)$, кратності n, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності.

5°.

$$Re\lambda_0(t) < 0, \qquad \forall t \in [0;T].$$

6°. Матриця $D(t,\varepsilon)$ додатно визначена, причому

$$\det D_0(t) \neq 0, \qquad \forall t \in [0;T].$$

7°. Область допустимих значень для керування $u(t,\varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

За виконання цих умов будемо досліджувати питання про побудову асимптотики оптимального керування $u(t,\varepsilon)$, за допомогою якого дана система може бути переведена із стану $x_1(\varepsilon)$ у стан $x_2(\varepsilon)$, та вектор-функції $x(t,\varepsilon)$, яка задає відповідну траєкторію.

2. Побудова формального розв'язку

Застосувавши принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [3], приходимо до крайової задачі

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u,$$

$$\varepsilon^h \frac{dp}{dt} = -A^*(t,\varepsilon)p,$$

$$0 = C^*(t,\varepsilon)p - D(t,\varepsilon)u,$$
$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon), \qquad x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon). \tag{7}$$

Позначивши
$$y(t,\varepsilon) = col(x(t,\varepsilon), p(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon)), \tag{8}$$
цю задачу подамо у вигляді

$$\varepsilon^h \tilde{B}\frac{dy}{dt} = \tilde{A}(t,\varepsilon)y, \tag{9}$$

$$My(0,\varepsilon) + Ny(T,\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon), \tag{10}$$

де

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & 0 & C(t,\varepsilon) \\ 0 & -A^*(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & C^*(t,\varepsilon) & -D(t,\varepsilon) \end{pmatrix};$$

$$M = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{x}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(\varepsilon) \\ x_2(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

E — одинична матриця n-го порядку, а нулями позначено нульові блоки відповідних розмірів. При цьому
$$\tilde{A}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{A}_k(t),$$

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_k(t) & 0 & C_k(t) \\ 0 & -A_k^*(t) & 0 \\ 0 & C_k^*(t) & -D_k(t) \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Таким чином, задача оптимального керування (1)–(4) звелась до виродженої крайової задачі (9), (10).

Оскільки

$$\det\left(\tilde{A}(t,\varepsilon) - \lambda\tilde{B}(t)\right) = (-1)^{n+m}\det(A(t,\varepsilon) - \lambda E)\det\left(A^*(t,\varepsilon) + \lambda E\right)\det D(t,\varepsilon),$$

а $\det D_0(t) \neq 0$, $\forall t \in [0;T]$ при досить малих $\varepsilon \geq 0$, то $deg\det(\tilde{A}(t,\varepsilon) - \lambda B) = 2n = rank B$. Отже, вироджена система (9) задовольняє критерій "ранг-степінь"[1], а тому її загальний розв'язок являє собою лінійну комбінацію $2n$ лінійно незалежних розв'язків, які необхідно знайти.

Гранична в'язка матриць

$$\tilde{A}_0(t) - \lambda\tilde{B} = \begin{pmatrix} A_0(t) - \lambda E & 0 & C_0(t) \\ 0 & -A_0^*(t) - \lambda E & 0 \\ 0 & C_0^*(t) & -D_0(t) \end{pmatrix}$$

регулярна і має два кратні скінченні елементарні дільники $(\lambda-\lambda_0(t))^n$ і $\left(\lambda+\bar\lambda_0(t)\right)^n$ та m простих нескінченних. Згідно з теорією асимптотичного інтегрування лінійних вироджених сингулярно збурених систем, розробленого в [4], у даному випадку скінченним елементарним дільникам відповідають асимптотичні розв'язки вигляду

$$y_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t(\lambda_0(\tau)+\lambda_i(\tau,\varepsilon))d\tau\right),\qquad i=\overline{1,n};\tag{11}$$

$$y_j(t,\varepsilon)=v_j(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(-\bar\lambda_0(\tau)+\tilde\lambda_j(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right),\qquad j=\overline{1,n},\tag{12}$$

(де $u_i(t,\varepsilon)$, $v_j(t,\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$, — $2n$-вимірні вектор-функції, $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $\tilde\lambda_j(t,\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$, — скалярні функції, які зображаються у вигляді розвинень за дробовими степенями параметра ε, показники яких залежать від структурних особливостей матриць $\tilde A_k(t)$, $k=1,2,\ldots$), а розв'язки другої групи, що відповідають нескінченним елементарним дільникам, відсутні. Тому вектор-функції (11), (12) утворюють фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (9).

Для побудови цих розв'язків застосуємо теорію, викладену в [4].

Підставивши (11) у (9), дістанемо

$$\tilde A(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon)=(\lambda_0(t)+\lambda_i(t,\varepsilon))\tilde Bu_i(t,\varepsilon)+\varepsilon^h\tilde Bu_i'(t,\varepsilon).$$

Поклавши

$$u_i(t,\varepsilon)=col\left(u_i^{(1)}(t,\varepsilon),u_i^{(2)}(t,\varepsilon),u_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right),$$

де $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$, $u_i^{(2)}(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, а $u_i^{(3)}(t,\varepsilon)$ — m-вимірні, і взявши до уваги структуру матриці $\tilde A(t,\varepsilon)$, отримаємо систему трьох векторних рівнянь

$$\begin{aligned}&A(t,\varepsilon)u_i^{(1)}(t,\varepsilon)+C(t,\varepsilon)u_i^{(3)}(t,\varepsilon)=(\lambda_0(t)+\lambda_i(t,\varepsilon))u_i^{(1)}(t,\varepsilon)+\varepsilon^h\left(u_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)';\\&-A^*(t,\varepsilon)u_i^{(2)}(t,\varepsilon)=\left(\lambda_0(t)+\lambda_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)u_i^{(2)}+\varepsilon^h\left(u_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)';\\&C^*(t,\varepsilon)u_i^{(2)}(t,\varepsilon)-D(t,\varepsilon)u_i^{(3)}(t,\varepsilon)=0.\end{aligned}$$

Розглянемо кожне з цих рівнянь окремо. Запишемо друге з них у вигляді

$$\left(A^*(t,\varepsilon)+\left(\lambda_0(t)+\lambda_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)E+\varepsilon^h\frac{d}{dt}\right)u_i^{(2)}(t,\varepsilon)=0.$$

Оскільки $A^*(t,\varepsilon)+\left(\lambda_0(t)+\lambda_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)E+\varepsilon^h\frac{d}{dt}=A_0^*(t)+\lambda_0(t)E+O\left(\varepsilon^\alpha\right)$, де α — деяке додатне число і $\det(A_0^*(t)+\lambda_0(t)E)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, то звідси випливає, що $u_i^{(2)}(t,\varepsilon)\equiv 0$. Тоді з умови 6° випливає, що й $u_i^{(3)}(t,\varepsilon)\equiv 0$. Таким чином,

$$u_i(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}u_i^{(1)}(t,\varepsilon)\\0\\0\end{pmatrix},\qquad i=\overline{1,n},\tag{13}$$

а вектор $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$A(t,\varepsilon)u_i^{(1)}(t,\varepsilon) = (\lambda_0(t)+\lambda_i(t,\varepsilon))u_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \left(u_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)',$$

до якого [4] зводиться задача про побудову асимптотичних розв'язків однорідної системи

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x. \tag{14}$$

Як показано в [4], за виконання умови 4° система (14) має розв'язок вигляду (11) (де замість $u_i(t,\varepsilon)$ покладаємо $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$) тоді і тільки тоді, коли функція $\lambda_i(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння розгалуження

$$\lambda_i^n + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Ł_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}\left[\lambda_i^k\right] = 0, \tag{15}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \left(P_j^s(H\Gamma)\varphi,\psi\right), \qquad s = 1,2,\ldots, \tag{16}$$

$$L_{ks}\left[\lambda_i^k\right] = \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-i_1h} (-1)^j D^{i_1}\left[\lambda_i^k\right]\left(P_{i_1+k,j}^{s-hi_1}(H;H\Gamma)\varphi,\psi\right), \qquad k,s = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

де $\varphi(t)$ — власний вектор матриці $A_0(t)$, що відповідає її власному значенню $\lambda_0(t)$, $\psi(t)$ – нуль матриці $(A_0(t)-\lambda_0(t)E)^*$, $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $(A_0(t)-\lambda_0(t)E)$. Символом $P_j^s(H\Gamma)$ позначена сума всіх можливих "добутків"j операторних "множників"$H\Gamma_{k_1},\ldots,H\Gamma_{k_j}$ з натуральними індексами, сума яких $k_1+\ldots+k_j = s$, Γ_k — оператори вигляду

$$\Gamma_k = A_k(t) - \delta_{k,h}\frac{d}{dt}, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

$\delta_{k,h}$ — символ Кронекера. При цьому в усіх доданках перший множник H "відбирається":

$$P_j^s(H\Gamma) = \sum_{k_1+\ldots k_j = s} \Gamma_{k_1}H\Gamma_{k_2}\ldots H\Gamma_{k_j}. \tag{18}$$

Вираз $P_{k,j}^s(H;H\Gamma)$ являє собою суму всіх можливих "добутків"k множників H і j множників $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2},\ldots,H\Gamma_{k_j}$, сума індексів яких дорівнює s; при цьому, як і в (18), перший множник H у всіх доданках цього виразу відсутній.

Нарешті, $D^j[\lambda_i^k]$ — це сума "всеможливих"добутків k множників λ_i і j "множників"$D = \frac{d}{dt}$, причому останнім множником у всіх доданках цього виразу є λ, а оператор диференціювання D діє на весь вираз, розміщений праворуч від нього, наприклад, $D^2\left[\lambda_i^2\right] = D^2\lambda_i^2 + D\lambda_i D\lambda_i + \lambda_i D^2\lambda_i = (2\lambda_i\lambda_i')' + (\lambda_i\lambda_i')' + \lambda_i\lambda_i'' = 3\left(\lambda_i'\right)^2 + 4\lambda_i\lambda_i''$.

Відповідний вектор $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ зображається розвиненням

$$u_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{h-1} \lambda_i^k H^k \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H \tilde{L}_{0s} \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H \tilde{L}_{ks} \left[\lambda_i^k\right] \varphi, \tag{19}$$

де

$$\tilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s(H\Gamma), \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{L}_{ks} \left[\lambda_i^k\right] = \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]} \sum_{j=0}^{s-hi_1} (-1)^j D^{i_1} \left[\lambda_i^k\right] P_{i_1+k,j}^{s-hi_1}(H, H\Gamma), \qquad k, s = 1, 2 \ldots.$$

Згідно з теорією, розробленою в [4], формули (16), (17), за якими визначаються коефіцієнти рівняння розгалуження (15), містять певну інформацію про структуру асимптотичних розвинень для шуканих функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$ і відповідних вектор-функцій $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ в залежності від поведінки збурювальних матриць $A_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для спрощення викладок розглянемо найпростіший випадок, коли відмінний від нуля головний коефіцієнт L_{01} рівняння розгалуження, тобто виконується умова

$$(\Gamma_1\varphi, \psi) = (A_1(t)\varphi(t), \psi(t)) - (\varphi'(t), \psi(t)) \neq 0, \qquad \forall t \in [0; T]. \tag{20}$$

Тоді відповідна діаграма Ньютона, побудована на координатній площині O_{ks} за коефіцієнтами рівняння (15), являє собою відрізок, що з'єднує точки $(0; 1)$ і $(n; 0)$.

Оскільки тангенс кута нахилу цієї діаграми до від'ємного напряму осі абсцис дорівнює $\frac{1}{n}$, то згідно з методом діаграм [2] функції $\lambda_i(t,\varepsilon)$ і відповідні вектори $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ можна знайти у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$:

$$\lambda_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \tag{21}$$

$$u_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_{ki}^{(1)}(t), \qquad \mu = \varepsilon^{\frac{1}{n}}. \tag{22}$$

При цьому перший коефіцієнт $\lambda_1^{(i)}(t)$ розвинення (21) знаходиться із визначального рівняння

$$L_{01} + \left(\lambda_1^{(i)}(t)\right)^n = 0, \tag{23}$$

звідки

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[n]{|(\Gamma_1\varphi, \psi)|} \left(\cos \tfrac{arg(\Gamma_1\varphi,\psi)+2\pi(j-1)}{n} + i \sin \tfrac{arg(\Gamma_1\varphi,\psi)+2\pi(j-1)}{n}\right), \quad j = \overline{1, n}. \tag{24}$$

Для знаходження наступних коефіцієнтів розвинення (21) підставимо ряд (21) у рівняння (15). Перегрупувавши доданки, після нескладних перетворень, пов'язаних із зміною індексів, маємо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^k P_n^k(\lambda_i) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k L_{0,\frac{k}{n}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{n}\right]} \sum_{j=1}^{k-sn} \mu^k L_{js}\left[P_j^{k-ns}(\lambda_i)\right] = 0, \tag{25}$$

де $L_{0,\frac{k}{n}} = 0$, якщо k не ділиться на n,

$$P_k^s(\lambda_i) = \sum_{j_1+\ldots+j_k=s} \lambda_{j_1}^{(i)}, \lambda_{j_2}^{(i)}, \ldots, \lambda_{j_k}^{(i)},$$

а оператор L_{js} діє на кожний доданок виразу $P_j^{k-ns}(\lambda_i)$ за тим же правилом, що й на $\lambda_i^{(j)}$.

Прирівнявши в (25) коефіцієнти при однакових степенях μ, дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$P_n^k(\lambda_i) + L_{0,\frac{k}{n}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{n}\right]} \sum_{j=1}^{k-sn} L_{js}\left[P_j^{k-ns}(\lambda_i)\right] = 0, \qquad k = -n, n+1, \ldots. \tag{26}$$

Перше рівняння цієї системи (при $k = n$) збігається з визначальним рівнянням (23), з якого визначається $\lambda_1^{(i)}(t)$. З наступних рівнянь можна послідовно знайти будь-які $\lambda_k^{(i)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$. Дійсно, якщо $\lambda_s^{(i)}(t)$ відомі при $s \leq k$, то, поклавши в (26) $n + k$ замість k, матимемо

$$P_n^{n+k}(\lambda_i) + L_{0,\frac{n+k}{n}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+k-1}{n}\right]} \sum_{j=1}^{n+k-sn} L_{js}\left[P_j^{n+k-ns}(\lambda_i)\right] = 0. \tag{27}$$

Взявши до уваги, що

$$P_n^{n+k}(\lambda_i) = n\left(\lambda_1^{(i)}\right)^{n-1} \lambda_{k+1}^{(i)} + \tilde{P}_n^{n+k}(\bar{\lambda}_i),$$

де $\tilde{P}_n^{n+k}(\lambda_i)$ — та частина виразу $P_n^{n+k}(\lambda_i)$, яка не містить $\lambda_{k+1}^{(i)}$, а два інші доданки в (27) містять лише ті $\lambda_j^{(i)}(t)$, індекси яких не перевищують k, дістанемо

$$\begin{aligned}&\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{\tilde{P}_n^{n+k}(\lambda_i) + L_{0,\frac{n+k}{n}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+k-1}{n}\right]} \sum_{j=1}^{n+k-sn} L_{js}\left[P_j^{n+k-ns}(\lambda_i)\right]}{n(\lambda^{(i)}(t))^{n-1}},\\ &k = 1, 2, \ldots.\end{aligned} \tag{28}$$

Підставивши ряд (21) у (19) і згрупувавши доданки з однаковими степенями μ, отримаємо такі формули для коефіцієнтів розвинення (22):

$$u_{0i}^{(1)}(t) = \varphi(t), \tag{29}$$

$$u_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k} P_j^k(\lambda_i) H^j \varphi + H\tilde{L}_{0,\frac{k}{n}}\varphi + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{k-sn} \tilde{L}_{js}\left[P_j^{k-ns}(\lambda_i)\right]\varphi, \qquad k = 1, 2, \ldots. \quad (30)$$

Цим самим побудовано серію із n лінійно незалежних розв'язків системи (9) вигляду (11), де вектори $u_i(t,\varepsilon)$ мають вигляд (13), а відповідні функції $\lambda_i(t,\varepsilon)$ і вектор-функції $u_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ зображаються розвиненнями (21), (22), коефіцієнти яких визначаються за рекурентними формулами (24), (28), (29), (30).

Підставивши в систему (9) вектор-функцію (12), маємо

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)v_j(t,\varepsilon) = \left(\bar{\lambda}_0(t) + \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)\right)\tilde{B}v_j(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \tilde{B}v_j'(t,\varepsilon).$$

Позначивши

$$v_j(t,\varepsilon) = col\left(v_j^{(1)}(t,\varepsilon), v_j^{(2)}(t,\varepsilon), v_j^{(3)}(t,\varepsilon)\right), \quad (31)$$

приходимо до системи трьох рівнянь

$$\begin{aligned} &A(t,\varepsilon)v_j^{(1)}(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)v_j^{(3)}(t,\varepsilon) = \left(-\bar{\lambda}_0(t) + \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)\right)v_j^{(1)}(t,\varepsilon) + \\ &+\varepsilon^h\left(v_j^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \\ &-A^*(t,\varepsilon)v_j^{(2)}(t,\varepsilon) = \left(-\bar{\lambda}_0(t) + \tilde{\lambda}(t,\varepsilon)\right)v_j^{(2)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\left(v_j^{(2)}(t,\varepsilon)\right)'; \\ &C^*(t,\varepsilon)v_j^{(2)}(t,\varepsilon) - D(t,\varepsilon)v_j^{(3)}(t,\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Розглянемо спочатку друге рівняння цієї системи. Це рівняння не пов'язане з двома іншими і містить лише вектор $v_j^{(2)}(t,\varepsilon)$ і функцію $\tilde{\lambda}_j(t,\varepsilon)$. Оскільки $-\bar{\lambda}_0(t)$ — власне значення матриці $-A_0^*(t)$ кратністю n і йому відповідає елементарний дільник такої ж кратності, то згідно з [4] до цього рівняння зводиться задача про побудову асимптотичних розв'язків вигляду

$$x_j(t,\varepsilon) = v_j^{(2)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_T^t\left(-\bar{\lambda}_0(\tau) + \tilde{\lambda}(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right)$$

системи, спряженої з (14)

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = -A^*(t,\varepsilon)x. \quad (33)$$

Оскільки (33) утворюється з (14) заміною матриці $A(t,\varepsilon)$ на $-A^*(t,\varepsilon)$, то функція $\tilde{\lambda}(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння розгалуження, аналогічне (15):

$$(-1)^{n-1}\tilde{\lambda}_j^n + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{ks}\left[\tilde{\lambda}_j^k\right] = 0, \quad (34)$$

коефіцієнти якого отримаємо, замінивши в формулах (16), (17) матрицю $A(t,\varepsilon)$ на $-A^*(t,\varepsilon)$, $H(t)$ — на $-H^*(t)$, φ — на ψ, а Γ_k — на $-\Gamma_k^*$, де

$$\Gamma_k^* = A_k^* + \delta_{k,h}E\frac{d}{dt}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Виконавши ці дії, маємо

$$M_{0s} = -\sum_{j=1}^{s}(-1)^j \left(P_j^s(H^*\Gamma^*)\psi, \varphi\right) = -\sum_{j=1}^{s}(-1)^j \left(\overline{P_j^s(H\Gamma)\varphi, \psi}\right) = -\bar{L}_{0s},$$
$$s = 1, 2, \ldots,$$

$$M_{ks}\left[\tilde{\lambda}_j^k\right] = \sum_{i=0}^{[\frac{s}{h}]} \sum_{j_1=0}^{s-ih}(-1)^{j_1+k+1} D^i \left[\tilde{\lambda}_j^k\right] \left(P_{i+k,j_1}^{s-ih}(H^*, H^*\Gamma^*)\psi, \varphi\right),$$
$$k, s = 1, 2, \ldots.$$

Вираз аналогічний до (19), отримаємо і для відповідного вектора $v_j^{(2)}(t, \varepsilon)$:

$$v_j^{(2)}(t) = \psi - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H^* \tilde{M}_{0s}\psi - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^h H^* \tilde{M}_{ks}\left[\tilde{\lambda}_j^k\right]\psi, \tag{35}$$

де

$$\tilde{M}_{0s} = -\sum_{j=1}^{s}(-1)^j P_j^s(H^*\Gamma^*); \qquad s = 1, 2, \ldots;$$

$$\tilde{M}_{ks}[\tilde{\lambda}_j^k] = -\sum_{i=0}^{[\frac{s}{h}]} \sum_{j_1=0}^{s-ih}(-1)^{j_1} D^i \left[\tilde{\lambda}_j^k\right] \left(P_{i+k,j_1}^{s-ih}(H^*, H^*\Gamma^*)\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots, \qquad s = 0, 1, \ldots.$$

Оскільки згідно з умовою (20)

$$M_{01} = -\bar{L}_{01} = -\left(\overline{\Gamma_1\varphi, \psi}\right) \neq 0, \qquad \forall t \in [0; T], \tag{36}$$

то рівнянню розгалуження (34) відповідає така сама діаграма Ньютона, що й рівнянню (15). Тому, як і для системи (14), функції $\tilde{\lambda}_j(t, \varepsilon)$ і відповідні вектори $v_j^{(2)}(t, \varepsilon)$ можна знайти у вигляді розвинень за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$:

$$\tilde{\lambda}_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \tilde{\lambda}_k^{(j)}(t); \tag{37}$$

$$v_j^{(2)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_{kj}^{(2)}(t). \tag{38}$$

При цьому визначальне рівняння матиме вигляд

$$(-1)^{n-1}\left(\tilde{\lambda}_1^{(j)}\right)^n - \bar{L}_{01} = 0,$$

звідки випливає, що

$$\tilde{\lambda}_1^{(j)}(t) = -\bar{\lambda}_1^{(j)}(t), \qquad j = \overline{1, n}. \tag{39}$$

Підставивши ряд (37) у рівняння розгалуження (34) і прирівнявши вирази при однакових степенях μ, дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$(-1)^{n-1} P_n^k\left(\tilde{\lambda}_j\right) + M_{0,\frac{k}{n}} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]} \sum_{j_1=1}^{k-sn} M_{j_1 s}\left[P_{j_1}^{k-sn}\left(\tilde{\lambda}_j\right)\right] = 0, \qquad k = n, n+1, \ldots,$$

з якої рекурентним чином визначаються всі наступні коефіцієнти цього ряду:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_{k+1}^{(j)}(t) = -\tfrac{1}{(-1)^{n-1}n\tilde{\lambda}_1^{n-1}}\Big[(-1)^{n-1}\tilde{P}_n^{n+k}\left(\tilde{\lambda}_j\right) + \\ + \textstyle\sum_{s=1}^{\left[\frac{n+k-1}{n}\right]}\sum_{j_1=1}^{n+k-sn} M_{j_1 s}\left[P_{j_1}^{n+k-sn}\left(\tilde{\lambda}_j\right)\right]\Big], \qquad k = 1, 2, \ldots .\end{aligned} \tag{40}$$

Порівнюючи формули (40) і (28), неважко переконатися, що

$$\tilde{\lambda}_k^{(j)}(t) = -\bar{\lambda}_k^{(j)}(t), \qquad k = 2, 3, \ldots . \tag{41}$$

Підставивши ряд (37) у (35) і згрупувавши доданки з однаковими степенями μ та врахувавши (41), отримаємо такі формули для визначення векторних коефіцієнтів розвинення (38):

$$v_{0j}^{(2)}(t) = \psi(t); \tag{42}$$

$$\begin{aligned}v_{kj}^{(2)}(t) = \textstyle\sum_{i=0}^{k} P_i^k\left(\bar{\lambda}^{(j)}\right)(H^*)^i\psi(t) - H^*\tilde{M}_{0,\frac{k}{n}}\psi - \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{n}\right]}\sum_{i=1}^{s-kn}(-1)^i H^* \times \\ \times \tilde{M}_{is}\left[P_i^{k-ns}\left(\bar{\lambda}_i\right)\right]\psi, \qquad k = 1, 2, \ldots .\end{aligned} \tag{43}$$

Розглянемо тепер третє рівняння системи (32). Вектор $v_j^{(3)}(t,\varepsilon)$ знайдемо з нього у вигляді розвинення

$$v_j^{(3)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k v_{kj}^{(3)}(t). \tag{44}$$

Підставивши в це рівняння ряди (44), (5) і прирівнявши в одержаній тотожності вирази при однакових степенях μ, матимемо

$$D_0(t)v_{kj}^{(3)}(t) + \sum_{i=1}^{\frac{k}{n}} D_i(t)v_{k-ni,j}^{(3)}(t) = \sum_{i=0}^{\frac{k}{n}} C_i^*(t)v_{k-ni,j}^{(2)}(t), \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Взявши до уваги умову 6°, звідси знаходимо

$$v_{0j}^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t)C_0^*(t)\psi(t); \tag{45}$$

$$\begin{aligned}v_{kj}^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t)\left[\textstyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{n}\right]} C_i^*(t)v_{k-ni,j}^{(2)}(t) - \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} D_i(t)v_{k-ni,j}^{(2)}(t)\right], \\ k = 1, 2, \ldots .\end{aligned} \tag{46}$$

Знайшовши вектори $v_j^{(2)}(t,\varepsilon)$, $v_j^{(3)}(t,\varepsilon)$, для визначення вектора $v_j^{(1)}(t,\varepsilon)$ використаємо перше рівняння системи (32). Покладемо

$$v_j^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k v_{kj}^{(1)}(t). \tag{47}$$

Підставивши цей ряд, а також (44), (5) у перше рівняння системи (32) і прирівнявши в одержаній тотожності коефіцієнти при однакових степенях μ, дістанемо

$$\begin{aligned}&\left(A_0(t)+\bar{\lambda}_0(t)E\right)v_{kj}^{(1)}(t)=-\sum_{i=0}^{[\frac{k}{n}]}C_i(t)v_{k-ni,j}^{(3)}(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{\lambda}_i^{(j)}(t)v_{k-i,j}^{(1)}(t)-\\&-\sum_{i=1}^{[\frac{k}{n}]}A_i(t)v_{k-ni,j}^{(1)}(t)+\left(v_{k-nh,j}^{(1)}(t)\right)', \qquad k=0,1,\ldots.\end{aligned}$$

Оскільки $\bar{\lambda}_0(t)\neq-\lambda_0(t)$ завдяки умові 5°, то $\det\left(A_0(t)+\bar{\lambda}_0(t)E\right)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$. Тому, позначивши

$$R_0(t)=A_0(t)+\bar{\lambda}_0(t)E$$

і взявши до уваги (41), (45) для визначення коефіцієнтів розвинення (47) отримаємо рекурентні формули:

$$v_{0j}^{(1)}(t)=-R_0^{-1}(t)C_0(t)D_0^{-1}(t)C_0^*(t)\psi(t); \tag{48}$$

$$\begin{aligned}&v_{kj}^{(1)}(t)=-R_0^{-1}(t)\Big[\sum_{i=0}^{[\frac{k}{n}]}C_i(t)v_{k-ni,j}^{(3)}(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{\lambda}_i^{(j)}(t)v_{k-i,j}^{(1)}(t)-\\&-\sum_{i=1}^{[\frac{k}{n}]}A_i(t)v_{k-ni,j}^{(1)}(t)+\left(v_{k-nh,j}^{(1)}(t)\right)'\Big], \qquad k=1,2,\ldots.\end{aligned} \tag{49}$$

Зокрема, $v_{1j}^{(1)}(t)=-R_0^{-1}(t)\left[C_0(t)v_{1j}^{(3)}+\bar{\lambda}_1^{(j)}v_{0j}^{(1)}\right]$, звідки, знайшовши з (46), (43) $v_{1j}^{(3)}(t)=D_0^{-1}C_0^*v_{1j}^{(2)}$, $v_{1j}^{(2)}(t)=\bar{\lambda}_1^{(j)}H^*\psi$ і врахувавши (48), дістанемо

$$v_{1j}^{(1)}(t)=\bar{\lambda}_1^{(j)}\left[R_0^{-2}C_0D_0^{-1}C_0^*\psi-R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*H^*\psi\right]. \tag{50}$$

Аналогічно, використовуючи формули (49), (46), (43), маємо

$$v_{2j}^{(1)}(t)=-R_0^{-1}\left[C_0v_{2j}^{(3)}+\bar{\lambda}_1^{(j)}v_{1j}^{(1)}+\bar{\lambda}_2^{(j)}v_{0j}^{(1)}\right];$$

$$v_{2j}^{(3)}(t)=D_0^{-1}C_0^*v_{2j}^{(2)} \qquad v_{2j}^{(2)}(t)=\bar{\lambda}_2^{(j)}H^*\psi+\left(\bar{\lambda}_1^{(j)}\right)^2(H^*)^2\psi,$$

звідки, враховуючи (50), (48), отримаємо

$$\begin{aligned}&v_{2j}^{(1)}(t)=\bar{\lambda}_2^{(j)}\left[R_0^{-2}C_0D_0^{-1}C_0^*\psi-R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*H^*\psi\right]+\left(\bar{\lambda}_1^{(j)}\right)^2\Big[-R_0^{-3}C_0D_0^{-1}C_0^*\psi+\\&+R_0^{-2}C_0D_0^{-1}C_0^*H^*\psi-R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*(H^*)^2\psi\Big].\end{aligned}$$

Продовжуючи так і далі, методом математичної індукції встановимо, що

$$\begin{aligned}&v_{kj}^{(1)}(t)=\sum_{s=0}^{k}P_s^k\left(\bar{\lambda}^{(j)}\right)\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^iR_0^{-i}C_0D_0^{-1}C_0^*(H^*)^{s+1-i}\psi,\\&k=\overline{1,n-1}.\end{aligned} \tag{51}$$

Позначивши

$$\sum_{i=1}^{s}(-1)^iR_0^{-i}C_0D_0^{-1}C_0^*(H^*)^{s-i}\psi=\psi_s, \qquad s=0,1,\ldots, \tag{52}$$

формулу (51) запишемо у вигляді

$$v_{kj}^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{k+1} P_{s-1}^{k}\left(\bar{\lambda}^{(j)}(t)\right)\psi_s(t), \qquad k=\overline{0,n-1}. \tag{53}$$

Перейдемо тепер до побудови розв'язку крайової задачі (9), (10). Використовуючи побудовану вище фундаментальну систему розв'язків (11), (12) системи (9), розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді їх лінійної комбінації

$$\begin{gathered} y(t,\varepsilon) = \mu^{1-n}\Big[\textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i(t,\varepsilon)c^{(i)}(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\left(\lambda_0(\tau)+\lambda_i(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right) + \\ + \textstyle\sum_{j=1}^{n} v_j(t,\varepsilon)\tilde{c}^{(j)}(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\bar{\lambda}_0(\tau)+\bar{\lambda}_j(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right)\Big], \end{gathered} \tag{54}$$

де $c^{(i)}(\varepsilon)$, $\tilde{c}^{(j)}(\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$ — скалярні множники, що зображаються формальними розвиненнями

$$c^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k c_k^{(i)}, \qquad \tilde{c}^{(j)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \tilde{c}_k^{(j)}, \tag{55}$$

коефіцієнти яких визначимо із крайових умов (7).

Враховуючи структуру (8), (13), (31) векторів $y(t,\varepsilon)$, $u_i(t,\varepsilon)$, $v_j(t,\varepsilon)$, підставимо вираз (54) у крайові умови (7):

$$\begin{aligned} &\mu^{1-n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i^{(1)}(0,\varepsilon)c^{(i)}(\varepsilon) + \mu^{1-n}\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(0,\varepsilon)\tilde{c}^{(i)}(\varepsilon)\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T\Big(\bar{\lambda}_0(\tau)+ \\ &+\bar{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)\Big)d\tau\Big) = x_1(\varepsilon); \\ &\mu^{1-n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i^{(1)}(T,\varepsilon)c^{(i)}(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T\left(\lambda_0(\tau)+\lambda_i(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right) + \\ &+\mu^{1-n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(T,\varepsilon)\tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) = x_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Знехтувавши експоненціально малими доданками, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{(1)}(0,\varepsilon)c^{(i)}(\varepsilon) = \mu^{n-1}x^{(1)}(\varepsilon), \tag{56}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(T,\varepsilon)\tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) = \mu^{n-1}x^{(2)}(\varepsilon). \tag{57}$$

Розглянемо кожне з цих рівнянь окремо. Підставивши в рівняння (56) відповідні розвинення (22), (6), (55), прирівнявши вирази при однакових степенях μ, отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно шуканих констант $c_k^{(i)}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} u_{ji}^{(1)}(0)c_{k-j}^{(i)} = x_{\frac{k-(n-1)}{n}}^{(1)}, \qquad k=0,1,\ldots.$$

Підставивши формули (30), якими виражаються вектор-функції $u_{ji}^{(1)}(t)$, і перегрупувавши доданки, цю систему запишемо у вигляді

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=s}^{k}\sum_{i=1}^{n} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right) H^s(0)\varphi(0)c_{k-j}^{(i)} = d_k, \quad k = 0,1,\ldots,$$

$$d_k = x^{(1)}_{\frac{k-(n-1)}{n}} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} H(0)L_{0,\frac{j}{n}}\varphi(0)c_{k-j}^{(i)} -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{s=1}^{[\frac{j-1}{n}]}\sum_{r=1}^{j-sn}\tilde{L}_{rs}\left[P_r^{j-ks}(\lambda_i(0))\right]\varphi(0)c_{k-j}^{(i)}, \qquad k = n-1, n, \ldots$$

(при $k < n-1$ $d_k = 0$).

Звідси, враховуючи лінійну незалежність векторів $H^s\varphi$, $s = \overline{0, n-1}$, дістанемо

$$\sum_{j=s}^{k}\sum_{i=1}^{n} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right) c_{k-j}^{(i)} = 0, \qquad k = \overline{0, n-2}, \qquad s = \overline{0, k}, \tag{58}$$

$$\sum_{j=s}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right) c_{k-j}^{(i)} = d_k^{(s)}, \qquad k = n-1, n\ldots, \qquad s = \overline{0, n-1}, \tag{59}$$

де $d_k^{(s)}$ — коефіцієнти розкладу вектора d_k за базисом $H^s(0)\varphi(0)$, $s = \overline{0, n-1}$:

$$d_k = \sum_{s=0}^{n-1} d_k^{(s)} H^s(0)\varphi(0).$$

Взявши останні рівняння з сукупності рівнянь (58) і рівняння (59) при $k = n-1$, $s = n-1$, отримаємо таку систему рівнянь відносно $c_0^{(i)}$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_0^{(i)} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1^{(i)}(0)c_0^{(i)} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_1^{(i)}(0)\right)^{n-2} c_0^{(i)} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_1^{(i)}(0)\right)^{n-1} c_0^{(i)} = d_{n-1}^{(n-1)},$$

яку, позначивши

$$c_0 = col\left(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, \ldots, c_0^{(n)}\right), \qquad \alpha_0 = col\left(0, 0, \ldots, 0, d_{n-1}^{(n-1)}\right),$$

$$W(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)}(t) & \lambda_1^{(2)}(t) & \dots & \lambda_1^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\lambda_1^{(1)}(t)\right)^{n-1} & \left(\lambda_1^{(2)}(t)\right)^{n-1} & \dots & \left(\lambda_1^{(n)}(t)\right)^{n-1} \end{bmatrix},$$

запишемо у векторно-матричній формі

$$W(0)c_0=\alpha_0.$$

Оскільки згідно з (20) визначник матриці Вандермонда $\det W(t)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, то звідси однозначно визначається вектор c_0:

$$c_0=W^{-1}(0)\alpha_0.$$

Об'єднавши передостанні рівняння з (58) (при $k=\overline{1,n-2}$, $s=k-1$) і рівняння (59) при $k=n-1$, $s=n-2$ та при $k=n$, $s=n-1$), дістанемо аналогічне рівняння для визначення вектора констант $c_1=col(c_1^{(1)},\dots,c_1^{(n)})$:

$$W(0)c_1=\alpha_1,$$

де

$$\begin{aligned}\alpha_1=col\Big(&0;-\textstyle\sum_{i=1}^n P_1^2(\lambda_i(0))c_0^{(i)};-\sum_{i=1}^n P_2^3(\lambda_i(0))c_0^{(i)};\dots;\\ &-\textstyle\sum_{i=1}^n P_{n-3}^{(n-2)}(\lambda_i(0))c_0^{(i)};d_{n-1}^{(n-2)}-\sum_{i=1}^n P_{n-2}^{(n-1)}(\lambda_i(0))c_0^{(i)};d_n^{(n-1)}\Big),\end{aligned}$$

звідки

$$c_1=W^{-1}(0)\alpha_1.$$

Продовжуючи так і далі, визначимо всі необхідні сталі $c_k^{(i)}$, $k=0,1,\dots$, $i=\overline{1,n}$.

Аналогічно, підставивши в рівняння (57) відповідні розвинення (47), (55), (6) і прирівнявши вирази при однакових степенях μ, дістанемо нескінченну систему рівнянь відносно сталих $\tilde{c}_k^{(i)}$:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^k v_{ji}^{(1)}(0)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}=x^{(2)}_{\underline{\frac{k-(n-1)}{n}}},\qquad k=0,1,\dots. \tag{60}$$

Врахувавши формули (51), якими виражаються вектори $v_{ji}^{(1)}(t)$, і перегрупувавши доданки, при $k<n$ цю систему подамо у вигляді

$$\sum_{s=1}^{k+1}\sum_{j=s-1}^{k}\sum_{i=1}^{n}P_{s-1}^{j}\left(\bar{\lambda}^{(i)}(T)\right)\psi^s(T)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}=\delta_{k,n-1}x_0^{(2)},\qquad k=\overline{0,n-1}.$$

Припустимо, що виконується умова:

8°. Вектори

$$\psi_s(T)=\sum_{i=1}^{s}(-1)^iR_0^{-i}(T)C_0(T)D_0^{-1}(T)C_0^*(T)(H^*(T))^{s-i}\psi(T),\qquad s=\overline{1,n}, \tag{61}$$

лінійно незалежні.

Тоді, розклавши вектор $x_0^{(2)}$ за базисом $\psi_s(T)$, $s=\overline{1,n}$:

$$x_0^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(0)} \psi_i(T),$$

з рівнянь (60) маємо

$$\sum_{j=s}^{k} \sum_{i=1}^{n} P_s^j \left(\bar{\lambda}_i(T)\right) \tilde{c}_{k-j}^{(i)} = 0, \qquad k=\overline{0,n-2}, \qquad s=\overline{0,k}; \tag{62}$$

$$\sum_{j=s}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} P_s^j \left(\bar{\lambda}_i(T)\right) \tilde{c}_{n-1-j}^{(i)} = \gamma_{s+1}^{(0)}, \qquad s=\overline{0,n-1}. \tag{63}$$

Взявши останні рівняння з цих сукупностей, дістанемо

$$\bar{W}(T)\tilde{c}_0 = \beta_0,$$

де $\tilde{c}_0 = col\left(\tilde{c}_0^{(1)}, \tilde{c}_0^{(2)}, \ldots, \tilde{c}_0^{(n)}\right)$, $\beta_0 = col\left(0, 0, \ldots, \gamma_n^{(0)}\right)$, звідки

$$\tilde{c}_0 = \bar{W}^{-1}(T)\beta_0.$$

При $k=n$ рівняння (60) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} v_{ji}^{(1)}(T)\tilde{c}_{n-j}^{(i)} = -\sum_{i=1}^{n} v_{ni}^{(1)}(T)\tilde{c}_0^{(i)}.$$

Підставивши в нього формули (53), дістанемо

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=s-1}^{n} \sum_{i=1}^{n} P_{s-1}^{(j)} \left(\bar{\lambda}_i(T)\right) \psi_s(T)\tilde{c}_{n-j}^{(i)} = -\sum_{i=1}^{n} v_{ni}^{(1)}(T)\tilde{c}_0^{(i)},$$

звідки

$$\sum_{j=s}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} P_s^{(j)} \left(\bar{\lambda}_i(T)\right) \tilde{c}_{n-j}^{(i)} = \gamma_{s+1}^{(1)}, \qquad s=\overline{0,n-1}, \tag{64}$$

де $\gamma_s^{(1)}$, $s=\overline{0,n-1}$, — коефіцієнти розкладу вектора $-\sum_{i=1}^{n} v_{ni}^{(1)}(T)\tilde{c}_0^{(i)}$, за базисом $\psi_s(T)$, $s=\overline{1,n}$.

Взявши тепер передостанні рівняння з (62), (63) і останнє рівняння з (64), отримаємо

$$\bar{W}^{-1}(T)\tilde{c}_1 = \beta_1,$$

де $\tilde{c}_1 = col\left(\tilde{c}_1^{(1)}, \tilde{c}_1^{(2)}, \ldots, \tilde{c}_1^{(n)}\right)$,

$$\beta_1 = col\Big(0; -\sum_{i=1}^n P_1^2(\bar{\lambda}_{(i)}(T)\tilde{c}_0^{(i)}, -\sum_{i=1}^n P_2^3(\bar{\lambda}_{(i)}(T))\tilde{c}_0^{(i)}, \ldots,$$
$$-\sum_{i=1}^n P_{n-3}^{n-2}(\bar{\lambda}_{(i)}(T))\tilde{c}_0^{(i)}; \gamma_{n-1}^{(0)} - \sum_{i=1}^n P_{n-2}^{n-1}(\bar{\lambda}_{(i)}(T))\tilde{c}_0^{(i)}; \gamma_n^{(1)}\Big),$$

звідки
$$\tilde{c}_1 = \bar{W}^{-1}(T)\beta_1.$$

Продовжуючи так і далі, знайдемо наступні вектори $\tilde{c}_k = col(c_k^{(1)}, \ldots, c_k^{(n)})$, $k = 2, 3, \ldots$. Цим самим завершено побудову формального розв'язку крайової задачі (9), (10).

3. Асимптотичний характер формального розв'язку

Покажемо тепер, що цей розв'язок має асимптотичний характер при $\varepsilon \to 0$. Побудуємо m–наближення, перемноживши в (54) ряди, якими зображаються $u_i(t,\varepsilon)$, $c^{(i)}(\varepsilon)$ та $v_j(t,\varepsilon)$, $\tilde{c}^{(j)}(\varepsilon)$ і обірвавши утворені розвинення на m–у члені:

$$y_m(t,\varepsilon) = \mu^{1-n}\sum_{i=1}^n\sum_{k=0}^m \mu^k \sum_{j=0}^k u_{ji}(t)c_{k-j}^{(i)} \exp\Big(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Big(\lambda_0(\tau)+$$
$$+\sum_{k=1}^m \mu^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\Big)d\tau\Big) + \mu^{1-n}\sum_{i=1}^n\sum_{k=0}^m \mu^k \sum_{j=0}^k v_{ji}(t)\tilde{c}_{k-j}^{(i)} \exp\Big(\varepsilon^{-h}\int_t^T\Big(\bar{\lambda}_0(\tau)+$$
$$+\sum_{k=1}^r \mu^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\Big)d\tau\Big),$$

де згідно з (13), (31) $u_{ji}(t) = col\left(u_{ji}^{(1)}, 0, 0\right)$, $v_{ji}(t) = col\left(v_{ji}^{(1)}, v_{ji}^{(2)}, v_{ji}^{(3)}\right)$.

За побудовою цей вектор задовольняє крайову задачу (9), (10) з точністю до $O(\mu^{m+2-n})$, тобто

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)y_m(t,\varepsilon) - \varepsilon^h\tilde{B}\frac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt} = \mu^{m+2-n}a(t,\varepsilon), \tag{65}$$

$$\tilde{x}(\varepsilon) - My_m(0,\varepsilon) - Ny_m(T,\varepsilon) = \mu^{m+2-n}b(t,\varepsilon), \tag{66}$$

де $a(t,\varepsilon)$ — деякий $(2n+m)$-вимірний вектор, рівномірно обмежений на $[0;T]$ при досить малих $\varepsilon > 0$, а $b(t,\varepsilon)$ — $2n$-вимірний вектор, також обмежений при досить малих ε, відмінних від нуля.

Точний розв'язок задачі (9), (10) будемо шукати у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = y_m(t,\varepsilon) + z_m(t,\varepsilon), \tag{67}$$

де $z_m(t,\varepsilon)$ — нев'язка, яку треба оцінити за нормою.

Підставивши (67) у (9), (10) і врахувавши (65), (66), для вектора $z_m(t,\varepsilon)$ отримаємо таку крайову задачу:

$$\varepsilon^h\tilde{B}\frac{dz_m}{dt} = \tilde{A}(t,\varepsilon)z_m + \mu^{m+2-n}a(t,\varepsilon);$$

$$Mz_m(0,\varepsilon)+Nz_m(T,\varepsilon)=\mu^{m+2-n}b(\varepsilon).$$

Поклавши відповідно до структури вектора $y_m(t,\varepsilon)$

$$z_m(t,\varepsilon)=col\left(z_m^{(1)}(t,\varepsilon),z_m^{(2)}(t,\varepsilon),z_m^{(3)}(t,\varepsilon)\right), \tag{68}$$

$a(t,\varepsilon)=col\left(a_1(t,\varepsilon),a_2(t,\varepsilon),a_3(t,\varepsilon)\right)$ і визначивши

$$z_m^{(3)}(t,\varepsilon)=D^{-1}(t,\varepsilon)C^*(t,\varepsilon)z_m^{(2)}(t,\varepsilon)+\mu^{m+2-n}D^{-1}(t,\varepsilon)a_3(t,\varepsilon), \tag{69}$$

звідси отримаємо відповідну крайову задачу для $2n$–вимірного вектора

$$\tilde z_m(t,\varepsilon)=col\left(z_m^{(1)}(t,\varepsilon),z_m^{(2)}(t,\varepsilon)\right): \tag{70}$$

$$\varepsilon^h\frac{d\tilde z_m}{dt}=\hat A(t,\varepsilon)\tilde z_m+\mu^{m+2-n}g(t,\varepsilon); \tag{71}$$

$$M_1\tilde z_m(0,\varepsilon)+N_1\tilde z_m(T,\varepsilon)=\mu^{m+2-n}d(\varepsilon), \tag{72}$$

де

$$\hat A(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & C(t,\varepsilon)D^{-1}(t,\varepsilon)C^*(t,\varepsilon)\\ 0 & -A^*(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$M_1=\begin{pmatrix} E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $N_1=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ E & 0\end{pmatrix}$, $g(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — обмежені вектори.

Як показано в [9], фундаментальна матриця однорідної системи

$$\varepsilon^h\frac{dz}{dt}=\hat A(t,\varepsilon)z,$$

яка відповідає (71), виражається асимптотичною формулою

$$Z(t,\varepsilon)=\Big[U_m(t,\varepsilon)+O\left(\mu^{m+2-n(h+1)}\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right);$$
$$V_m(t,\varepsilon)+O\left(\mu^{m+2-n(h+1)}\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\Lambda_m^*(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\Big],$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\left\{\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^m\lambda_k^{(1)}(t)\mu^k;\ldots;\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^m\lambda_k^{(n)}(t)\mu^k\right\}$, а матриці $U_m(t,\varepsilon)$, $V_m(t,\varepsilon)$ утворені з $2n$-вимірних вектор-стовпців:

$$col\left(\sum_{k=0}^m\mu^k u_{ki}^{(1)}(t),0\right),\qquad col\left(\sum_{k=0}^m\mu^k v_{ki}^{(1)}(t),\sum_{k=0}^m\mu^k v_{ki}^{(2)}(t)\right),\qquad i=\overline{1,n}.$$

Розбивши матрицю $Z(t,\varepsilon)$ на дві: $Z(t,\varepsilon)=Z_1(t,\varepsilon)+Z_2(t,\varepsilon)$, де

$$Z_1(t,\varepsilon)=\left[\left(U_m(t,\varepsilon)+O\left(\mu^{m+2-n(h+1)}\right)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right);0\right];$$

$$Z_2(t,\varepsilon)=\left[0;\left(V_m(t,\varepsilon)+O\left(\mu^{m+2-n(h+1)}\right)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\Lambda_m^*(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right],$$

розв'язок задачі (71), (72) шукаємо у вигляді

$$\tilde z_m(t,\varepsilon)=Z(t,\varepsilon)c(\varepsilon)+\mu^{m+2-n(h+1)}\int\limits_0^t Z_1(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau-$$

$$-\mu^{m+2-n(h+1)}\int\limits_t^T Z_2(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau. \quad (73)$$

Підставивши цей вираз у крайову умову (72) і врахувавши структуру матриць M_1, N_1 та взявши до уваги умову 5°, дістанемо таке рівняння відносно $c(\varepsilon)$:

$$\left(\Omega_m(\varepsilon)+O\left(\mu^{m+2-n(h+1)}\right)\right)c(\varepsilon)=\mu^{m+2-n(h+1)}\Big(M_1\int\limits_0^T Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau-$$

$$-N_1\int\limits_0^T Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau\Big)+\mu^{m+2-n}d(\varepsilon), \quad (74)$$

де $\Omega_m(\varepsilon)=\operatorname{diag}\left\{U_m^{(1)}(0,\varepsilon);V_m^{(1)}(T,\varepsilon)\right\}$, а $U_m^{(1)}(0,\varepsilon)$, $V_m^{(1)}(T,\varepsilon)$ — $(n\times n)$-матриці, складені з вектор-стовпців $\sum_{k=0}^m\mu^k u_{ki}^{(1)}(t)$ та $\sum_{k=0}^m\mu^k v_{ki}^{(1)}(t)$, $i=\overline{1,n}$, відповідно.

Згідно з (29), (30), (53) при $m\geq n-1$ ці вектор-стовпці являють собою лінійні комбінації векторів $H^{i-1}(0)\varphi(0)$, $i=\overline{1,n}$, та $\psi_s(T)$, $s=\overline{1,n}$, відповідно. Оскільки вектори $H^{i-1}\varphi$ лінійно незалежні як такі, що утворюють жорданів ланцюжок матриці $A_0(t)$, а вектори ψ_s лінійно незалежні згідно з умовою 8°, то при $m\geq n-1$ матриці $U_m^{(1)}(0,\varepsilon)$, $V_m^{(1)}(T,\varepsilon)$ неособливі при досить малих $\varepsilon>0$. При цьому обернені до них матриці матимуть особливість по μ, а саме полюс $(n-1)$-го порядку в точці $\mu=0$ [9]. Тому існує

$$\left(\Omega_m(\varepsilon)+O\left(\mu^{m+2-n(h+1)}\right)\right)^{-1}=\mu^{1-n}Q(\varepsilon)+O\left(\mu^{m+2-n(h+1)}\right),$$

де $Q(\varepsilon)$ — обмежена за нормою матриця, а рівняння (74) однозначно розв'язне відносно $c(\varepsilon)$.

Знайшовши $c(\varepsilon)$ і підставивши в (73), дістанемо шуканий розв'язок задачі (71), (72), який можна подати у вигляді

$$\tilde z_m(t,\varepsilon)=\mu^{m+3-n(h+2)}\int\limits_0^T G_0(t,\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau+$$

$$+\mu^{m+3-2n}Z(t,\varepsilon)\Big(Q(\varepsilon)+O\left(\mu^{m+1-nh}\right)\Big)d(\varepsilon), \quad (75)$$

де $G_0(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна даної крайової задачі, яка має таку структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases}\left(Q(\varepsilon)+O\left(\mu^{m+1-nh)}\right)\right)\Big[M_1Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)-\\ -N_1Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\Big]+\mu^{n-1}Z_1(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\\ \qquad\text{при } 0\le\tau\le t\le T;\\ \left(Q(\varepsilon)+O\left(\mu^{m+1-nh)}\right)\right)\Big[M_1Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)-\\ -N_1Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\Big]-\mu^{n-1}Z_2(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\\ \qquad\text{при } 0\le t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Виходячи з умови 5°, неважко переконатися, що всі матричні функції, які входять до складу $G_0(t,\tau,\varepsilon)$, рівномірно обмежені при досить малих $\varepsilon>0$ на відповідних відрізках. Враховуючи також обмеженість матриці $Z(t,\varepsilon)$ і вектора $d(\varepsilon)$, з рівності (75) дістанемо, що $\|z_m(t,\varepsilon)\|\le c\mu^{m+3-n(h+2)}$, де c — деяка стала, що не залежить від ε. Звідси на підставі (67), (68), (69), (70) та (8) отримаємо шукані оцінки для вектора керування $u(t,\varepsilon)$ та відповідної траєкторії $x(t,\varepsilon)$:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)\|\le c_1\mu^{m+3-n(h+2)},$$

$$\|u(t,\varepsilon)-u_m(t,\varepsilon)\|\le c_2\mu^{m+3-n(h+2)},$$

де

$$x_m(t,\varepsilon)=\mu^{1-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\mu^k\sum_{j=0}^{k}u_{ji}^{(1)}(t)c_{k-j}^{(i)}\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\Big(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\Big)d\tau\Big)+$$
$$+\mu^{1-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\mu^k\sum_{j=0}^{k}v_{ji}^{(1)}(t)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\Big(\bar\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{m}\mu^k\bar\lambda_k^{(i)}(\tau)\Big)d\tau\Big),\quad(76)$$

$$u_m(t,\varepsilon)=\mu^{1-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\mu^k\sum_{j=0}^{k}v_{ji}^{(3)}(t)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\Big(\bar\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{m}\mu^k\bar\lambda_k^{(i)}(\tau)\Big)d\tau\Big).\quad(77)$$

4. Висновки

Взявши до уваги умову 6°, підсумовуючи результати проведених досліджень, приходимо до такої теореми.

Теорема. *Якщо виконуються умови* $1^\circ-8^\circ$, *а також* (20), *то існує єдиний вектор керування* $u(t,\varepsilon)$, *який виражається асимптотичною формулою*

$$u(t,\varepsilon)=u_m(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\frac{m+3}{n}-(h+2)}\right),$$

що переводить систему (1) *із стану* $x_1(\varepsilon)$ *в стан* $x_2(\varepsilon)$, *мінімізуючи функціонал* (2), *де* $u_m(t,\varepsilon)$ *зображається у вигляді розвинення* (77). *Відповідна траєкторія, за якою здійснюється цей перехід, виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{m+3}{n}-(h+2)}\right),$$

де вектор $x_m(t,\varepsilon)$ *зображається розвиненням* (76).

Аналогічно, використовуючи рівняння розгалуження (15), (34) і метод діаграм Ньютона, розглядаються й більш складні випадки, коли умова (20) не виконується.

Перелік цитованих джерел

1. *Бояринцев Ю. Е.* Численные методы решения сингулярных систем / Ю. Е. Бояринцев, В. А. Данилов, А. А. Логинов, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. — 223 с.
2. *Вайнберг М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
3. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
4. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.
5. *Самойленко А. М.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме / А. М. Самойленко, В. П. Яковец // Докл. АН Украины. — 1993. – № 4. – С. 10 – 15.
6. *Шкиль Н. И.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях / Н. И. Шкиль, А. Н. Вороной, В. Н. Лейфура. — К.: Вища шк., 1985. — 248 с.
7. *Шкиль Н. И.* Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленноменяющимися коэффициентами / Н. И. Шкиль, В. Н. Лейфура // Докл. АН УССР. Сер. А — 1976. — №7. — С. 604 – 608.
8. *Шкиль Н. И.* К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленноменяющимися коэффициентами в случае кратных корней / Н. И. Шкиль, В. Н. Лейфура // Межвед. респ. сб.: Вычисл. и прикл. математика. — К., 1977. — Вып. 31. — С. 81 – 92.
9. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. — К.: Вища шк., 1989. — 287 с.
10. *Яковець В. П.* Побудова асимптотичного розв'язку однієї задачі оптимального керування / В. П. Яковець, О. В. Тарасенко // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13. — №3. — С. 420–437.

Получена 27.12.2010