

УДК 517.9

Распространение поверхностных волн в слое жидкости над упругим полупространством

И.Т. Селезов, С.А. Савченко, З.В. Хатунцева

Институт гидромеханики НАН Украины,
Киев

Аннотация. Исследуется распространение поверхностных гравитационных волн над упругим полупространством в рамках модели жидкости конечной глубины. Задача формулируется в терминах потенциала скорости и отклонения свободной поверхности для жидкости и скалярного и векторного потенциалов для упругого полупространства. Выведено дисперсионное уравнение и анализируется влияние упругого полупространства на фазовую и групповую скорости.

Введение

Исследование распространения поверхностных гравитационных волн над податливым дном представляет большой интерес как в волновой гидродинамике шельфа, так и в сейсмологии. Актуальность данной проблемы определяется необходимостью прогнозирования поведения волнового поля в прибрежной зоне, при распространении волн цунами, течениях воды в канале и др. Влияние на распространение поверхностных волн упругого подстилающего слоя на донной поверхности исследовалось в [1, 2]. В длинноволновом приближении (мелкая вода) в нелинейной постановке задача о распространении поверхностных волн над податливым основанием рассматривалась в [3]. Здесь рассматривается задача в линейной постановке о распространении волн над упругим полупространством, но в рамках модели жидкости конечной глубины. Задача формулируется в терминах потенциала скорости для жидкости сверху и скалярного и векторного потенциалов для упругого полупространства.

1. Постановка задачи

В невозмущенном состоянии невязкая несжимаемая жидкость занимает область $\Omega^f = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, -H \leq z \leq 0\}$, упругая среда занимает область $\Omega^e = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, -\infty < z < -H\}$.

В безразмерном виде система уравнений, описывающая потенциальное движение жидкости над упругим полупространством, представляется в виде

$$\beta \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^f, \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \vec{u} + \left(\frac{\lambda}{G} + 1 \right) \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) = c_s^{-2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \vec{F} \quad \text{в} \quad \Omega^e, \quad (1.2)$$

$$\eta_t + \alpha \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \eta - \frac{1}{\beta} \varphi_z = 0 \quad \text{при} \quad z = \alpha \eta(x, y, t), \quad (1.3)$$

$$\eta + \varphi_t + \frac{\alpha}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi \right)^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 0 \quad \text{при} \quad z = \alpha \eta(x, y, t), \quad (1.4)$$

$$\gamma \left(\xi_t + \alpha \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \xi \right) - \alpha \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} H = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = -H(x, y) + \gamma \xi(x, y, t), \quad (1.5)$$

$$-\frac{\rho^f}{\rho^e} \left(\frac{c_{sh}}{c_s} \right)^2 p \delta_{ik} = \sigma_{ik} \quad \text{при} \quad z = -H(x, y) + \gamma \xi(x, y, t), \quad (1.6)$$

$$i, k = 1, 2, 3.$$

Безразмерные величины в (1.1)–(1.6) введены по аналогии с [3] по формулам (звездочки всюду опущены):

для жидкой среды

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= \frac{1}{\ell} (x, y), & z^* &= \frac{z}{h_0}, & t^* &= \frac{\sqrt{gh_0}}{\ell} t, & \varphi^* &= \frac{\sqrt{gh_0}}{\ell g a} \varphi, \\ \alpha &= \frac{\eta_{\max}}{h_0}, & \beta &= \left(\frac{h_0}{\ell} \right)^2, & p^* &= \frac{p}{\rho^f g h_0}, & \eta^* &= \frac{\eta}{a}, \\ \xi^* &= \frac{\xi}{\xi_0}, & H^* &= \frac{H}{h_0}, & k^* &= k \ell, & \omega^* &= \frac{\ell}{\sqrt{gh_0}} \omega, \end{aligned} \quad (1.7)$$

для упругой среды

$$\begin{aligned} (x^*, y^*, z) &= \frac{1}{\ell} (x, y, z), & (u_x^*, u_y^*, u_z^*) &= \frac{1}{\ell} (u_x, u_y, u_z), & t^* &= \frac{\sqrt{gh_0}}{\ell} t, \\ \psi^* &= \frac{\psi}{\ell^2}, & \vec{a}^* &= \frac{\vec{a}}{\ell^2}, & \sigma_{ik}^* &= \frac{\sigma_{ik}}{\rho^e c_s^2}, \\ (c_s^*, c_e^*) &= \frac{1}{\sqrt{gh_0}} (c_s, c_e), & k^* &= k \ell, & \omega^* &= \frac{\ell}{\sqrt{gh_0}} \omega. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В (1.1)–(1.8) t — время, p — давление, $\eta(x, y, t)$ — отклонение свободной поверхности, \vec{u} — вектор упругих перемещений, h_0 — глубина жидкости, ρ^f и ρ^e — плотности жидкости и упругой среды, G и λ — сдвиговой и дилатационный модули упругости, \vec{F} — массовая сила, ∇^2 — лапласиан,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \hat{\nabla}^2 = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$\vec{\nabla}$ — гамильтониан,

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

g — гравитационная постоянная, $\alpha = \eta_{\max}/h_0$, $\beta = h_0^2/\ell^2$, $\gamma \sim \alpha$.

2. Распространение волн в жидкости конечной глубины

В дальнейшем рассматриваем линеаризованную задачу для жидкости конечной постоянной глубины при отсутствии массовой силы ($\vec{F} = 0$), которая следует из постановки (1.1)–(1.6), если принять $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 1$ и $H(x, y) = h_0$.

Векторное поле представляется согласно теореме Гельмгольца в виде суммы градиента скалярной функции ψ и ротора векторного потенциала \vec{a} : $\vec{u} = \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla} \times \vec{a}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$, и в результате уравнение (1.2) сводится к двум волновым уравнениям

$$\hat{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \hat{\nabla}^2 \vec{a} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Тензор напряжений σ_{ik} в (1.6) представляется в терминах компонент вектора перемещений

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{n,n} + G(u_{i,k} + u_{k,i}), \quad i, k, n = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

При рассмотрении плоской задачи компонента $u_y = 0$ и производные по y от искомых функций равны нулю. Векторный потенциал \vec{a} в этом случае имеет одну компоненту a_y . В результате задача (1.1)–(1.6) сводится к определению трех скалярных функций φ , ψ , a_y .

С учетом указанных выше предположений система уравнений (1.1)–(1.6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega^f, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega^e, \\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 a_y}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega^e, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ \beta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial t} \right) &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = -h_0, \\ \frac{\rho^f}{\rho^e} \left(\frac{c_{sh}}{c_s} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\lambda}{G} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} \right) \quad \text{при} \quad z = -h_0, \\ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{при} \quad z = -h_0, \\ u_z(x, z, t) &= 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Кроме того, u_z , т.е. ψ и a_y должны убывать на бесконечности.

Решения задачи (2.3) разыскиваются в классе бегущих волн представлением искомых функций в виде

$$\varphi(x, z, t) = \Phi(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad (2.4)$$

$$\psi(x, z, t) = \Psi(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad (2.5)$$

$$a_y(x, z, t) = A_y(z)e^{i(kx-\omega t)}. \quad (2.6)$$

В результате после подстановки (2.4)–(2.6) система уравнений (11) приводится к системе уравнений относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3,$ и C_4

$$C_1 \left(\frac{k\sqrt{\beta}}{\beta} - \omega^2 \right) + C_2 \left(-\frac{k\sqrt{\beta}}{\beta} - \omega^2 \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} & C_1 \left(k\sqrt{\beta}e^{-k\sqrt{\beta}} \right) + C_2 \left(-k\sqrt{\beta}e^{-k\sqrt{\beta}} \right) + \\ & + C_3 \left(i\beta\omega\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2}}e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2}}} \right) + C_4 \left(-k\beta\omega e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & C_1 i\alpha\omega \frac{c_{sh}^2}{c_s^2} \frac{\rho^f}{\rho^e} e^{-k\sqrt{\beta}} + C_2 i\alpha\omega \frac{c_{sh}^2}{c_s^2} \frac{\rho^f}{\rho^e} e^{k\sqrt{\beta}} + \\ & + C_3 \sqrt{\beta} e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2}}} \left[-\frac{\lambda}{G} \frac{\omega^2}{c_e^2} + 2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2} \right) \right] + C_4 2ik\sqrt{\beta} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}} e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}}} = 0, \end{aligned}$$

$$C_3 2ik\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2}} e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2}}} + C_4 \left(-2k^2 + \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}}} = 0.$$

Нетривиальное решение существует, если определитель системы (2.7) равен нулю. Из полученного таким образом дисперсионного уравнения находится зависимость фазовой и групповой скоростей от длины волны. Дисперсионное уравнение имеет два действительных корня. Здесь рассматривается только низший корень, соответствующий распространению поверхностных гравитационных волн с учетом влияния упругого основания.

3. Численные расчеты и анализ результатов

Определение корней дисперсионного уравнения проводилось стандартными численными методами. Результаты расчетов представлены на рис. 1–8.

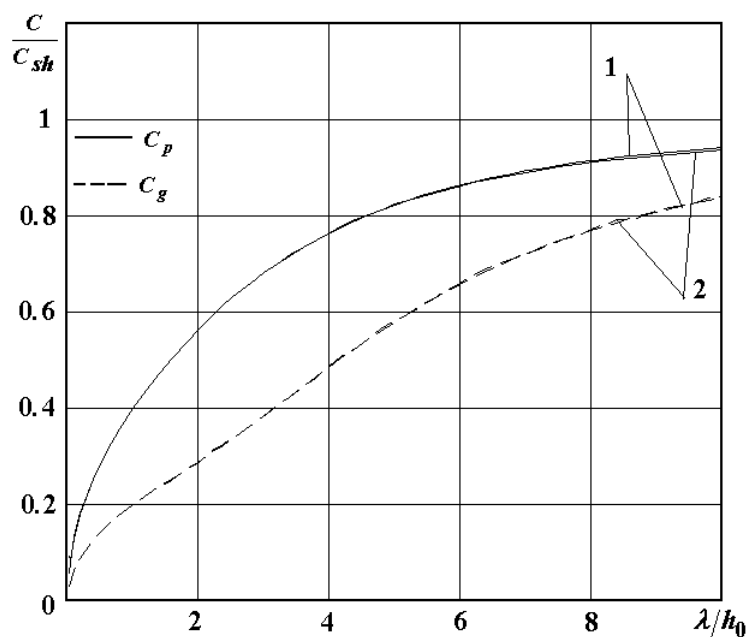


Рис. 1. Зависимость фазовой c_p и групповой c_g скоростей от длины волны λ : 1 — для жесткого дна, 2 — для упругого дна, $h_0 = 10\text{м}$, $G = 62\text{кГ/см}^2$. Фазовые и групповые скорости для жесткого дна и для упругого дна практически сливаются.

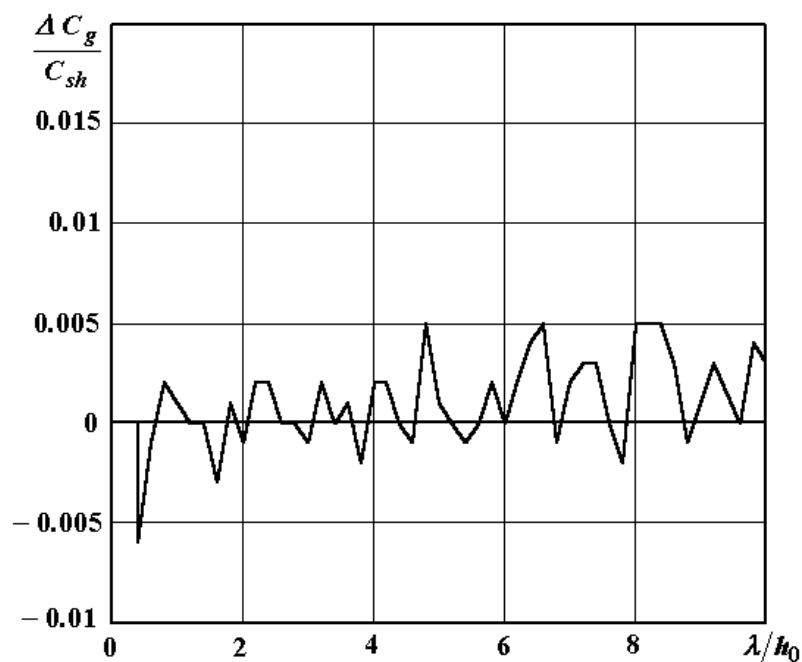


Рис. 2. Приращение групповой скорости, обусловленное упругостью основания ($h_0 = 10\text{м}$, $G = 62\text{кГ/см}^2$).

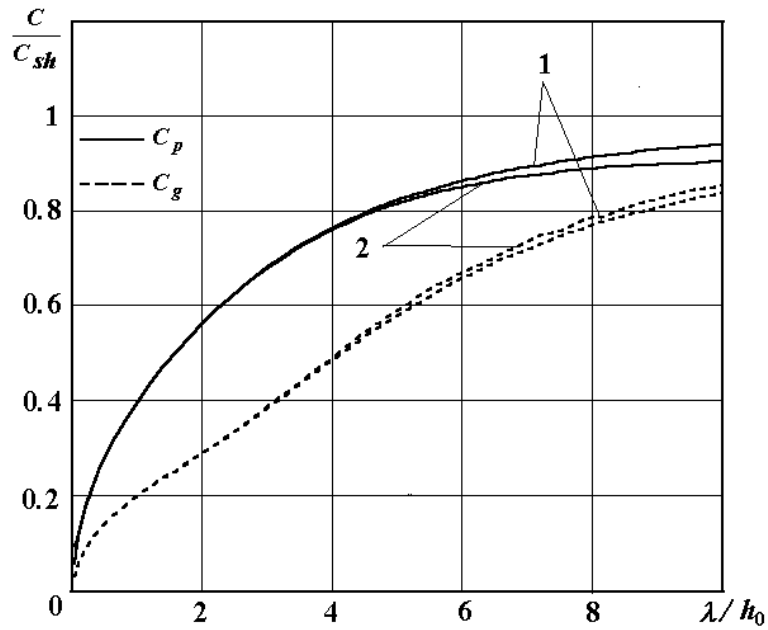


Рис. 3. Зависимость фазовой c_p и групповой c_g скоростей от длины волны λ : 1 — для жесткого дна, 2 — для упругого дна, $h_0 = 10\text{м}$, $G = 10\text{кГ/см}^2$.

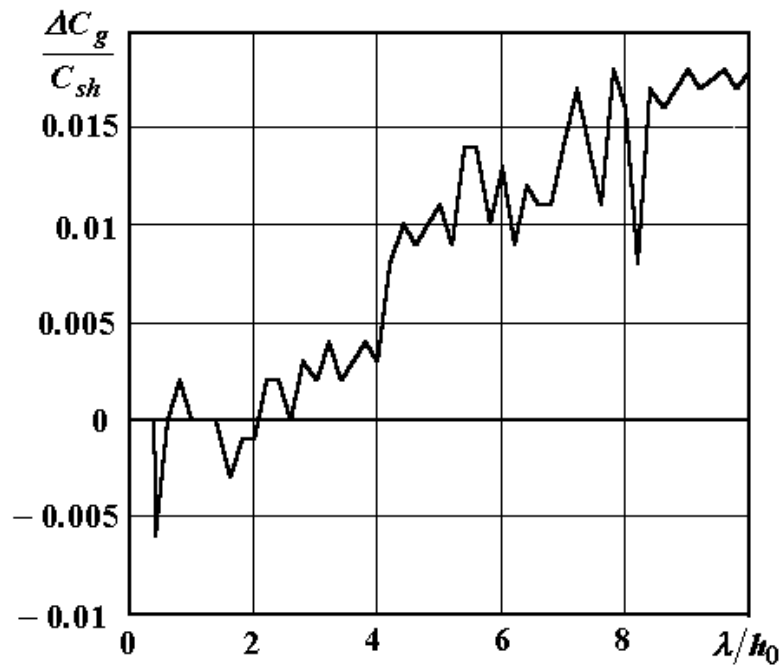


Рис. 4. Приращение групповой скорости, обусловленное упругостью основания ($h_0 = 10\text{м}$, $G = 10\text{кГ/см}^2$).

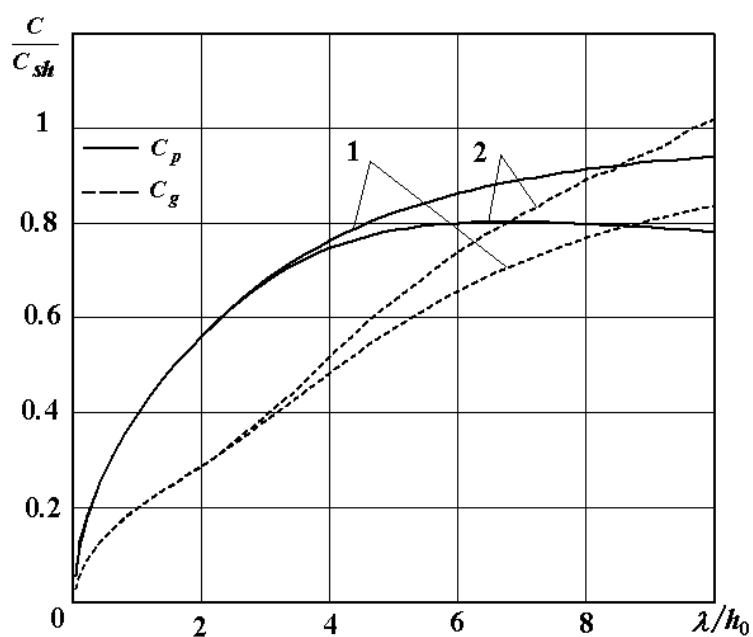


Рис. 5. Зависимость фазовой c_p и групповой c_g скоростей от длины волны λ : 1 — для жесткого дна, 2 — для упругого дна, $h_0 = 20\text{м}$, $G = 5\text{кГ/см}^2$.

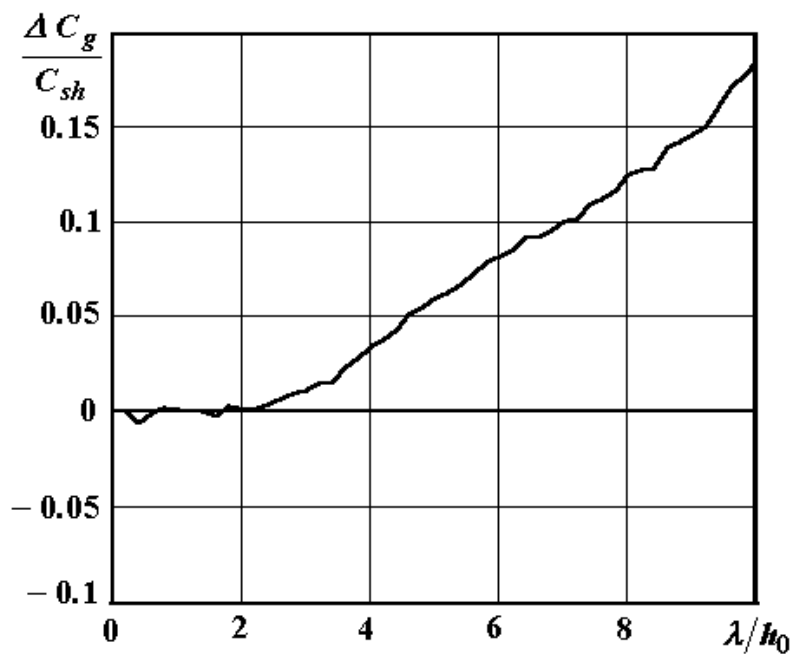


Рис. 6. Приращение групповой скорости, обусловленное упругостью основания ($h_0 = 20\text{м}$, $G = 5\text{кГ/см}^2$).

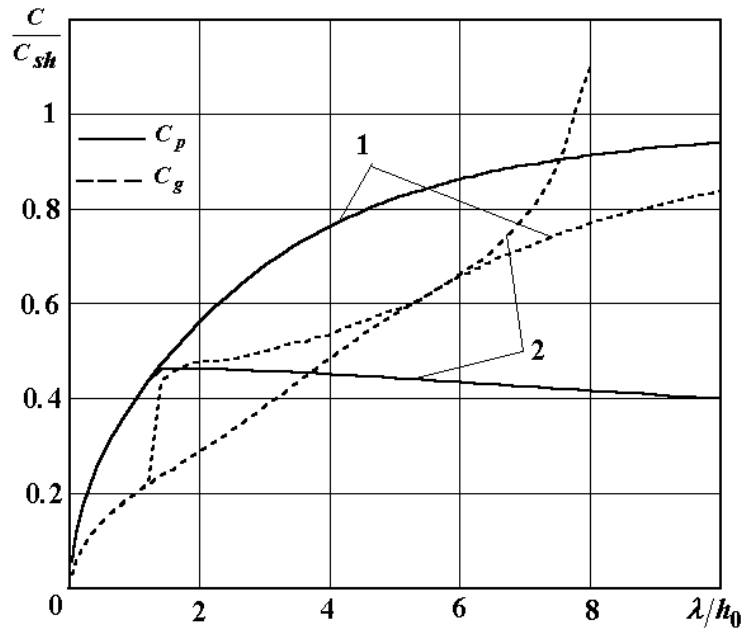


Рис. 7. Зависимость фазовой c_p и групповой c_g скоростей от длины волны λ : 1 — для жесткого дна, 2 — для упругого дна, $h_0 = 500\text{м}$, $G = 20\text{кГ/см}^2$.

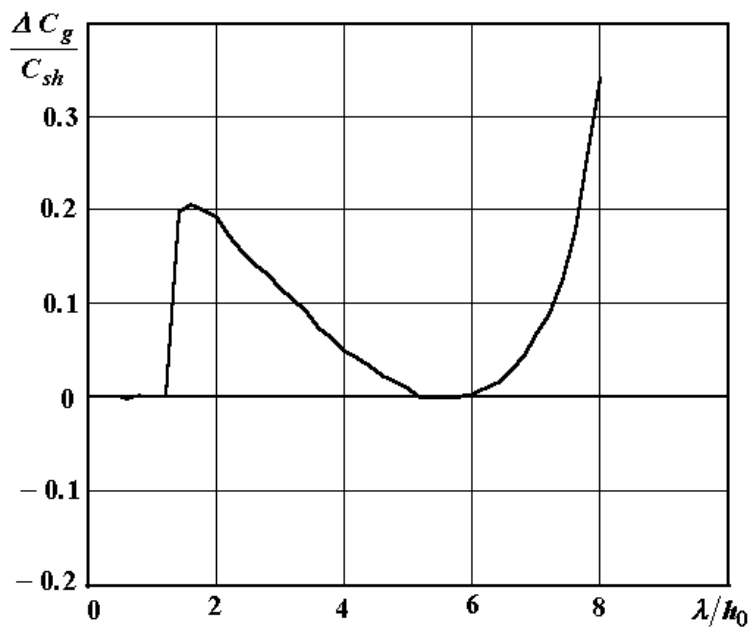


Рис. 8. Приращение групповой скорости, обусловленное упругостью основания ($h_0 = 500\text{м}$, $G = 20\text{кГ/см}^2$).

При проведении расчетов задавалось отношение плотностей упругой ρ^e и жидкой ρ^f сред $\rho^e/\rho^f = 1.2$, коэффициент Пуассона принимался равным $\nu = 0.3$, в этом случае отношение модулей дилатационного λ к сдвиговому G равно $\frac{\lambda}{G} = 1.5$. Модуль сдвига в расчетах принимался в соответствии с реальными условиями [4].

На всех рисунках приведены зависимости фазовой скорости c_p и групповой скорости c_g от длины волны, а также зависимость приращения групповой скорости Δc_g , обусловленного упругостью основания $\Delta c_g = c_g^e - c_g^r$ (c_g^e — групповая скорость, соответствующая упругому основанию, c_g^r — жесткому основанию). При увеличении λ/h_0 все c_p и c_g стремятся асимптотически к 1, т.е. к $c_{sh} = \sqrt{gh_0}$.

На рис. 1 представлены зависимости фазовых скоростей от длины волны для случая глубины $h_0 = 10$ м и модуля сдвига основания $G = 62$ кГ/см². В этом случае, как видно из рис. 2, влияние упругости основания пренебрежимо мало.

В случае более податливого основания $G = 10$ кГ/см² влияние упругости представлено на рис. 3 и 4. В этом случае, как видно из рис. 4, групповая скорость возрастает на 2%.

На рис. 5 и 6 представлены результаты для случая $h_0 = 20$ м и $G = 5$ кГ/см². Как видно из рис. 6 в этом случае влияние упругости на групповую скорость достигает величины 20%. Необходимо отметить также, что в этом случае фазовая скорость c_p имеет экстремум при $\lambda/h_0 = 6$.

На рис. 7 и 8 представлены результаты расчетов для экзотического случая $h_0 = 500$ м и $G = 20$ кГ/см². В этом случае влияние упругости достигает 35% и имеет место запираание волн при $\lambda/h_0 = 8$, т.е. энергия не распространяется.

Таким образом, из проведенного анализа следует, что учет влияния упругости дна может приводить к увеличению групповой скорости, и, следовательно, переносу энергии волн в прибрежной зоне и волн цунами на 20%.

Список цитируемых источников

1. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Распространение длинных волн на воде при наличии нестационарной донной неоднородности. - Докл. АН УССР, Серия А, 1986, № 10. - С. 34-37.
2. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Рассеяние поверхностных гравитационных волн на упругой пластине конечной длины. - Гидромеханика, 1987, Вып. 55. - С. 3-6.
3. Selezov I.T. Modeling of tsunami wave generation and propagation. - Int. J. Fluid Mechanics Research, 2006, 33, N 1.- P. 44-54.
4. Mallard W.W., Dalrymple R.A. Water waves propagating over a deformable bottom. - Proc. Offshore Techn. Conf., OTC 2895. - P. 141-146.

Получено 01.09.2006