Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 255–274

УДК 517.928.2

Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць

С. П. Пафик

Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова,
Київ 01601. *E-mail: procentum35@ukr.net*

Анотація. Використовуючи теорію поліноміальних матричних в'язок, побудовано асимптотику лінійно незалежних розв'язків однорідної сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь довільного m-го порядку з матрицею при старших похідних, яка вироджується з прямуванням малого параметра до нуля. Розглядається випадок кратного спектра характеристичного полінома. А саме, передбачається, що він має кілька скінченних і кілька нескінченних елементарних дільників однакової кратності. Наведено відповідні асимптотичні оцінки.

Ключові слова: поліноміальна в'язка матриць, скінченний елементарний дільник, нескінченний елементарний дільник.

1. Постановка задачі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\varepsilon^{(m-1)h}A_{m-1}(t,\varepsilon)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\cdots+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x=0, \quad (1.1)$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, — дійсні або комплекснозначні $(n\times n)$-матриці, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h\in N, t\in[0;T]$.

Припускаємо, що виконуються наступні умови:

1°. Матриці $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_i^{(k)}(t), i=\overline{0,m}; \quad (1.2)$$

2°. Матриці $A_i^{(k)}(t)$, $i=\overline{0,m}$, $k=0,1,\ldots,$ — нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$;

3°. $\det A_m^{(0)}(t)=0$, $\forall t\in[0;T]$;

4°. Гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda^i A_i^{(0)}(t) \quad (1.3)$$

системи (1.1) регулярна при всіх $t \in [0; T]$ і має $r > 1$ скінченних елементарних дільників $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю $p > 1$ і $s > 1$ нескінченних елементарних дільників кратністю q $(pr + qs = mn)$.

Питання побудови асимптотичних розв'язків системи (1.1) за степенями малого параметра вивчалось різними авторами [3, 6, 7, 8]. Однак ними розглядались в основному системи рівнянь другого порядку. Системи ж рівнянь вищих порядків досліджувались лише в найпростіших випадках і, як правило, за умови, коли матриці $A_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, m-1}$, нульові, а $A_m(t, \varepsilon)$ — одинична [1]. Більш загальна система при $h = 1$ і одиничною матрицею при старшій похідній розглядалась у [2], де для побудови асимптотичних розв'язків використовується розклад характеристичного полінома даної системи на лінійні множники. При цьому вивчався випадок, коли характеристичний поліном має простий спектр.

У даній роботі вперше розглядається випадок кратного спектра, коли характеристичний поліном має кілька скінченних та нескінченних елементарних дільників однакової кратності. Для дослідження асимптотики лінійно незалежних розв'язків системи (1.1) використовується теорія поліноміальних матричних в'язок, викладена в [4]. У пункті 2 доводиться основна теорема, якою визначається вигляд формальних розв'язків системи (1.1). У процесі доведення цієї теореми дається алгоритм, за яким визначаються коефіцієнти відповідних формальних розвинень. У заключному пункті 3 сформульовано умови, за виконання яких побудовані формальні розв'язки мають асимптотичний характер, і наводяться відповідні асимптотичні оцінки.

2. Побудова формальних розв'язків

2.1. Побудова розв'язків першої групи, які відповідають скінченним елементарним дільникам

Розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t, \mu) = u(t, \mu) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau, \mu) d\tau\right), \tag{2.1}$$

де $u(t, \mu)$ — n-вимірний вектор, а $\lambda(t, \mu)$ — скалярна функція, які зображаються у вигляді формальних розвинень

$$u(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u^{(k)}(t), \tag{2.2}$$

$$\lambda(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda^{(k)}(t), \tag{2.3}$$

в яких $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$.

Покажемо, що вектор (2.1) формально задовольняє систему (1.1). Диференціюючи вектор-функцію (2.1) k разів, отримаємо рекурентний вираз

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{-jh} C_k^i \frac{d^{k-i} u(t, \mu)}{dt^{k-i}} D_{i-j}[\lambda^j] \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau, \mu) d\tau\right), k = \overline{0, m}, \tag{2.4}$$

де

$$D_{i-j}[\lambda^j] = \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_j=i-j} \prod_{\alpha=1}^{j} \Gamma_{s_\alpha}[\lambda], j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}, \tag{2.5}$$

— суми всеможливих добутків j операторів $\Gamma_{s_\alpha}[\lambda] = \frac{d^{s_\alpha}}{dt^{s_\alpha}}\lambda(t,\ \mu)$, $\alpha = \overline{1,j}$, з цілими невід'ємними індексами, сума яких дорівнює $i-j$. Оператори диференціювання, які містяться в $\Gamma_{s_\alpha}[\lambda]$, діють на весь вираз праворуч від них.

Наприклад, $D_2[\lambda^2] = \sum_{s_1+s_2=2}\Gamma_{s_1}[\lambda]\Gamma_{s_2}[\lambda]$. Перебравши всі можливі набори індексів s_α, $\alpha = 1,2$, дістанемо $D_2[\lambda^2] = \Gamma_2[\lambda]\Gamma_0[\lambda] + \Gamma_1[\lambda]\Gamma_1[\lambda] + \Gamma_0[\lambda]\Gamma_2[\lambda]$. Згідно зі структурою операторів $\Gamma_s[\lambda],\ s = 0,1,2$, остаточно матимемо

$$D_2[\lambda^2] = \frac{d^2\lambda^2(t,\mu)}{dt^2} + \frac{d}{dt}\Big(\lambda(t,\mu)\frac{d\lambda(t,\mu)}{dt}\Big) + \lambda(t,\mu)\frac{d^2\lambda(t,\mu)}{dt^2}.$$

Підставивши вектори (2.4) у систему (1.1), а потім, виділивши доданки, в яких $k = i = j$, отримаємо

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} D_0[\lambda^k]A_k(t,\varepsilon)u(t,\mu) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(k-j)h}C_k^i D_{i-j}[\lambda^j]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}u(t,\mu)}{dt^{k-i}}-\\ -\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon^{(k-j)h}D_{k-j}[\lambda^j]A_k(t,\ \varepsilon)u(t,\mu).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Оскільки функція $\lambda(t,\mu)$ зображається у вигляді формального розвинення (2.3), то функції $D_{i-j}[\lambda^j]$, $j = \overline{1,i}$, $i = \overline{1,m}$, які визначаються формулою (2.5), теж можна подати у вигляді формальних розвиненнь за степенями μ:

$$D_{i-j}[\lambda^j] = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k D_{i-j}^{(k)}[\lambda^j], j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}, \tag{2.7}$$

де

$$D_{i-j}^{(k)}[\lambda^j] = \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_j=i-j}\ \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_j=k}\ \prod_{\alpha=1}^{j}\Gamma_{s_\alpha}^{(k_\alpha)}[\lambda], j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}, \tag{2.8}$$

(підсумовування здійснюється за всіма можливими наборами цілих невід'ємних індексів s_α, k_α, $\alpha = \overline{1,j}$, причому сума нижніх індексів дорівнює $i-j$, а верхніх — k).

Підставивши в (2.6) розвинення (1.2), (2.2), (2.3), (2.7) та прирівнявши доданки при однакових степенях μ, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$P(t,\lambda^{(0)}(t))u^{(0)}(t) = 0; \tag{2.9}$$

$$P(t,\lambda^{(0)}(t))u^{(\alpha)}(t) = b^{(\alpha)}(t), \alpha = 1,2,\ldots; \tag{2.10}$$

де

$$b^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{\alpha} D_0^{(\beta)}[\lambda^k]A_k^{(0)}(t)u^{(\alpha-\beta)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \alpha = 1,2,\ldots; \tag{2.11}$$

$$g^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{m}\sum_{\beta=0}^{\alpha-p}\sum_{\gamma=1}^{\left[\frac{\alpha-\beta}{p}\right]} D_0^{(\beta)}[\lambda^k]A_k^{(\gamma)}(t)u^{(\alpha-\beta-\gamma p)}(t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\sum_{\beta=0}^{\alpha-(k-j)ph}\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{\alpha-\beta-(k-j)ph}{p}\right]} C_k^i D_{i-j}^{(\beta)}[\lambda^j]A_k^{(\gamma)}(t)\frac{d^{k-i}u^{(\alpha-\beta-\gamma p-(k-j)ph)}(t)}{dt^{k-i}}-$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\beta=0}^{\alpha-(k-j)ph}\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{\alpha-\beta-(k-j)ph}{p}\right]} D_{k-j}^{(\beta)}[\lambda^j]A_k^{(\gamma)}(t)u^{(\alpha-\beta-\gamma p-(k-j)ph)}(t), \alpha = p, p+1, \ldots.$$

Покажемо, що з цієї системи можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.2), (2.3). З рівняння (2.9) одразу дістанемо

$$\lambda^{(0)}(t) = \lambda_0(t), \tag{2.12}$$

де $\lambda_0(t)$ — власне значення в'язки матриць (1.3). Рівняння (2.10) розв'язні тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\big(b^{(\alpha)}(t), \psi_j(t)\big) = 0, j = \overline{1,r}, \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{2.13}$$

де $\psi_j(t), j = \overline{1,r},$ — базисні елементи нуль-простору матриці $P^*(t, \lambda_0(t))$, спряженої з $P(t, \lambda_0(t))$. Символом $(x,\ y)$ тут і надалі позначається скалярний добуток в n-вимірному комплексному просторі. Слідуючи [6] введемо в розгляд оператор проектування Q, який відображає n-вимірний векторний простір E на його r-вимірний підпростір E_0 наступним чином

$$Qu(t) = \sum_{i=1}^{r}\big(u(t), \psi_i(t)\big)\varphi_i(t), \forall u(t) \in E, t \in [0; T],$$

де $\varphi_i(t), i = \overline{1,r},$ — базисні елементи нуль-простору матриці $P(t, \lambda_0(t))$. Підпростір E_0 є лінійною оболонкою векторів $\varphi_i(t),\ i = \overline{1,r}$, які визначимо так, щоб виконувались включення $\varphi_i(t) \in C^\infty[0; T]$, $i = \overline{1,r}$, що згідно з [6] завжди можливо. Тоді умова (2.13) буде еквівалентна наступній:

$$Qb^{(\alpha)}(t) = 0, \alpha = 1, 2, \ldots. \tag{2.14}$$

За виконання цієї умови вектори $u^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 0, 1, \ldots$, визначатимемо за формулами

$$u^{(0)}(t) = y^{(0)}(t), \tag{2.15}$$

$$u^{(\alpha)}(t) = H(t)b^{(\alpha)}(t) + y^{(\alpha)}(t), \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{2.16}$$

де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $P(t, \lambda_0(t))$ (яку виберемо так, щоб $H(t) \in C^\infty[0; T]$, що можлива згідно з [6] та умовою 2°), а $y^{(\alpha)}(t), \alpha = 0, 1, \ldots,$ — вектори з підпростору E_0, які підлягають визначенню. Умову ж (2.14) використаємо для визначення функцій $\lambda^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \dots$ і векторів $u^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \dots$. З цією метою перетворимо вираз для векторів $b^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, підставлятимемо послідовно (2.15), (2.16) в (2.11). При $\alpha = 1$ маємо $b^{(1)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} D_0^{(1)}[\lambda^k] A_k^{(0)}(t) y^{(0)}(t)$. Позначимо

$$P_s^{(k)}(\lambda) = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_s = k} \lambda^{(j_1)}(t) \lambda^{(j_2)}(t) \dots \lambda^{(j_s)}(t) \tag{2.17}$$

суму всеможливих добутків s функцій $\lambda^{(j)}(t)$ з натуральними індексами j_i, $i = \overline{1, s}$, сума яких дорівнює k. Врахувавши (2.8), (2.17), дістанемо

$$D_0^{(j)}[\lambda^k] = \sum_{i=1}^{j} C_k^i (\lambda_0(t))^{k-i} P_i^{(j)}(\lambda), k = \overline{1,\ m}, j = 1, 2, \dots. \tag{2.18}$$

Скориставшись (2.18), вектор $b^{(1)}(t)$ представимо у вигляді

$$b^{(1)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} C_k^1 (\lambda_0(t))^{k-1} P_1^{(1)}(\lambda) A_k^{(0)}(t) y^{(0)}(t).$$

Використавши формулу

$$\sum_{k=i}^{m} C_k^i (\lambda_0(t))^{k-i} A_k^{(0)}(t) = \frac{\partial^i P(t, \lambda_0(t))}{i! \partial \lambda^i}, i = \overline{1, m},$$

остаточно отримаємо

$$b^{(1)}(t) = -P_1^{(1)}(\lambda) \frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1! \partial \lambda} y^{(0)}(t). \tag{2.19}$$

Провівши аналогічні міркування при $\alpha = 2$, дістанемо

$$\begin{gathered} b^{(2)}(t) = -P_2^{(2)}(\lambda) \Big[\frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1! \partial \lambda} H_1(t) + \frac{\partial^2 P(t, \lambda_0(t))}{2! \partial \lambda^2} \Big] y^{(0)}(t) - \\ - P_1^{(2)}(\lambda) \frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1! \partial \lambda} y^{(0)}(t) - P_1^{(1)}(\lambda) \frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1! \partial \lambda} y^{(1)}(t), \end{gathered} \tag{2.20}$$

де

$$H_k(t) = -H(t) \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k! \partial \lambda^k}, k = \overline{1, m}. \tag{2.21}$$

Скориставшись формулами

$$\sigma^1(H_1, H_2, \dots, H_m) = E; \tag{2.22}$$

$$\sigma^i(H_1, H_2, \dots, H_m) = \sum_{j=1}^{\min(i-1, m)} H_j(t) \sigma^{i-j}(H_1, H_2, \dots, H_m), i = 2, 3, \dots, \tag{2.23}$$

рівності (2.19), (2.20) подамо у вигляді

$$b^{(1)}(t) = -P_1^{(1)}(\lambda) \frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1! \partial \lambda} \sigma^1(H_1, H_2, \dots, H_m) y^{(0)}(t),$$

$$b^{(2)}(t) = -P_2^{(2)}(\lambda)\Big[\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{\partial\lambda}\sigma^2(H_1,,\ldots,H_m) + \frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\sigma^1(H_1,\ldots,H_m)\Big]y^{(0)}(t) -$$
$$- P_1^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{\partial\lambda}\sigma^1(H_1,\ldots,H_m)y^{(0)}(t) - P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{\partial\lambda}\sigma^1(H_1,\ldots,H_m)y^{(1)}(t).$$

Взявши до уваги, що $g^{(\alpha)}(t) = 0$ при $\alpha < p$, методом математичної індукції встановимо, що

$$b^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{\alpha-k}\sum_{j=1}^{\min(i,\ m)} P_i^{(\alpha-k)}(\lambda)\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y^{(k)}(t), \tag{2.24}$$
$$\alpha = \overline{1,p-1}.$$

При $\alpha \geq p$ у вираз $b^{(\alpha)}(t)$ входять вектори $g^{(\alpha)}(t)$. Позначимо доданки, які містять ці вектори, через $\widetilde{b}^{(\alpha)}(t)$. Якщо продовжувати підстановку (2.15), (2.16) в (2.11), то отримаємо вираз вигляду (2.24) та доданки $\widetilde{b}^{(\alpha)}(t)$, які містять вектори $g^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = p, p+1, \ldots$. Для останніх маємо

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}^{(p)}(t) &= g^{(p)}(t);\\
\widetilde{b}^{(p+1)}(t) &= -P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H(t)g^{(p)}(t) + g^{(p+1)}(t);\\
\widetilde{b}^{(p+2)}(t) &= P_2^{(2)}(\lambda)\Big[\Big(\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H(t)\Big)^2 - \frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}H(t)\Big]g^{(p)}(t) -\\
&\quad - P_1^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H(t)g^{(p)}(t) -\\
&\quad - P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H(t)g^{(p+1)}(t) + g^{(p+2)}(t).
\end{aligned}\tag{2.25}$$

Ввівши позначення $\widetilde{H}_j(t) = -\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}H(t)$, $j = \overline{1,m}$, та використавши (2.23), вектори $\widetilde{b}^{(p+1)}(t), \widetilde{b}^{(p+2)}(t)$ запишемо у вигляді

$$\widetilde{b}^{(p+1)}(t) = P_1^{(1)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p)}(t) + g^{(p+1)}(t); \tag{2.26}$$
$$\widetilde{b}^{(p+2)}(t) = \Big[P_2^{(2)}(\lambda)\sigma^3(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m) + P_1^{(2)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)\Big]g^{(p)}(t) +$$
$$+ P_1^{(1)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+1)}(t) + g^{(p+2)}(t). \tag{2.27}$$

Проаналізувавши вирази (2.25), (2.26), (2.27) і провівши індукцію по α, дістанемо

$$\widetilde{b}^{(\alpha)}(t) = \sum_{j=0}^{\alpha-p-1}\sum_{i=1}^{\alpha-p-j} P_i^{(\alpha-p-j)}(\lambda)\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = p, p+1, \ldots. \tag{2.28}$$

Об'єднавши вирази (2.24), (2.28), остаточно маємо

$$b^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{\alpha-k}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(\alpha-k)}(\lambda)\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y^{(k)}(t) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\alpha-p-1}\sum_{i=1}^{\alpha-p-j} P_i^{(\alpha-p-j)}(\lambda)\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \alpha = 1,2,\ldots. \tag{2.29}$$

Перейдемо тепер до визначення функцій $\lambda^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, і векторів $y^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$. Оскільки за умовою 4° в'язка матриць (1.3) має $r > 1$ скінченних елементарних дільників кратністю $p > 1$, то, як показано в [4], їм відповідає r жорданових ланцюжків завдовжки p кожний. Ці ланцюжки складаються з власних векторів $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1, r}$, та відповідних приєднаних векторів $\varphi_k^{(i)}(t)$, $k = \overline{1, r}$, $i = \overline{2, p}$, які задовольняють співвідношення

$$P(t, \lambda_0(t))\varphi_k(t) = 0, k = \overline{1, r}; \tag{2.30}$$

$$P(t, \lambda_0(t))\varphi_k^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{\min(i-1,\ m)} \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_k^{(i-j)}(t) = 0, k = \overline{1, r}, i = \overline{2, p}, \tag{2.31}$$

а рівняння

$$P(t, \lambda_0(t))y_k + \sum_{j=1}^{\min(p,m)} \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_k^{(p+1-j)}(t) = 0, k = \overline{1, r},$$

нерозв'язні відносно векторів y_k. Вектори $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, як і власні вектори $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, визначаються неоднозначно, проте при будь-якому їх виборі

$$\det \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)} \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\varphi_i^{(p+1-k)}(t), \psi_j(t) \right) \right\|_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0, \forall t \in [0; T], \tag{2.32}$$

тобто система власних і приєднаних векторів, які відповідають скінченним елементарним дільникам в'язки матриць (1.3), є повною, у цьому неважко переконатися, користуючись методами [6, с. 106 - 108], [4]. Виконання умови (2.32) дає змогу визначити вектори $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, так, щоб виконувались співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)} \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\varphi_i^{(p+1-k)}(t), \psi_j(t) \right) = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, r}, \tag{2.33}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, що ми й будемо передбачати в подальших викладках. Якщо співвідношення (2.33) для векторів $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, не виконується, то, як і в [6, с. 108], замість них можна взяти їх лінійні комбінації $\chi_j(t) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{kj}^{-1}(t)\psi_k(t)$, $j = \overline{1, r}$, де $\alpha_{kj}^{-1}(t)$ — елементи матриці, оберненої до матриці

$$\|\alpha_{ij}(t)\|_1^r = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)} \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\varphi_i^{(p+1-k)}(t), \psi_j(t) \right) \right\|_1^r.$$

Виразимо приєднані вектори $\varphi_k^{(i)}(t)$, $k = \overline{1, r}$, $i = \overline{2, p}$, через власні вектори $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1, r}$. Оскільки $\varphi_k^{(i)}(t) = -\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)} H(t)\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_k^{(i-j)}(t)$, $k = \overline{1, r}$, $i = \overline{2, p}$, то, скориставшись (2.21), дістанемо $\varphi_k^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{\min(i-1,m)} H_j(t)\varphi_k^{(i-j)}(t)$, $k = \overline{1, r}$, $i = \overline{2, p}$, звідки

$$\varphi_k^{(i)}(t) = \sigma^i(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi_k(t), k = \overline{1, r}, i = \overline{2, p}. \tag{2.34}$$

Із врахуванням (2.34) співвідношення (2.33) запишемо у вигляді

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)} \frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\sigma^{p-k+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi_i(t),\psi_j(t)\right) = \delta_{ij}, i,j=\overline{1,r}. \tag{2.35}$$

Виходячи з розв'язності рівнянь (2.30), (2.31) та співвідношень (2.34), (2.35), легко переконатися в таких властивостях оператора Q: якщо вектор $u(t)\in E_0$, то

$$\sum_{k=1}^{\min(i,m)} Q\,\frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\sigma^{i-k+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)u(t) = 0, i=\overline{1,p-1}; \tag{2.36}$$

$$\sum_{k=1}^{\min(p,m)} Q\frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\sigma^{p-k+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)u(t) = u(t). \tag{2.37}$$

Із (2.29), (2.36), (2.37) випливає, що при $\alpha<p$ умова (2.14) виконується, а при $\alpha=p$ запишеться у вигляді

$$P_p^{(p)}(\lambda)y^{(0)}(t) - Qg^{(p)}(t) = 0. \tag{2.38}$$

Оскільки $P_p^{(p)}(\lambda) = (\lambda^{(1)}(t))^p$ і $g^{(p)}(t) = -K(t)y^{(0)}(t)$, де

$$K(t) = \sum_{k=0}^{m}\lambda_0^k(t)A_k^{(1)}(t) + \delta_{1,h}\sum_{k=1}^{m}C_k^{k-1}\lambda_0^{k-1}(t)A_k^{(0)}(t)\frac{d}{dt} + \delta_{1,h}\sum_{k=2}^{m}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_0^{k-1-i}(t)\frac{d\lambda_0^i(t)}{dt}A_k^{(0)}(t),$$

то з рівняння (2.38) дістанемо

$$(\lambda^{(1)}(t))^p y^{(0)}(t) + QKy^{(0)}(t) = 0. \tag{2.39}$$

Оператор QK відображає простір E на r-вимірний підпростір E_0. Позначимо звуження цього оператора на підпростір E_0 через R_1. Виходячи з означення оператора Q, неважко переконатися в тому, що в базисі $\varphi_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, підпростору E_0 оператор R_1 зображається $(r\times r)$-матрицею

$$R_1(t) = \left\|\big(K(t)\varphi_i(t),\psi_j(t)\big)\right\|_{i,j=\overline{1,r}}.$$

Тоді рівняння (2.39) у базисі підпростору E_0 матиме вигляд

$$\big(R_1(t) + (\lambda^{(1)}(t))^p E\big)y^{(0)}(t) = 0,$$

де E — одинична $(r\times r)$-матриця.

Припустимо, що виконується умова:

5°. Матриця $R_1(t)$ має на відрізку $[0;T]$ r простих, відмінних від нуля власних значень $\eta_i(t)$, $i=\overline{1,r}$.

Тоді з останнього рівняння знайдемо pr різних, відмінних від нуля функцій $\lambda^{(1)}(t)$:

$$\lambda^{(1)}(t) = \sqrt[p]{|\eta_k(t)|}\Big[\cos\frac{\arg(-\eta_k(t))+2\pi(j-1)}{p} + i\sin\frac{\arg(-\eta_k(t))+2\pi(j-1)}{p}\Big], \quad k=\overline{1,r},\ j=\overline{1,p}, \tag{2.40}$$

і r відповідних векторів $y^{(0)}(t)$:

$$y^{(0)}(t) = \varphi_k^*(t), k = \overline{1, r}, \tag{2.41}$$

де $\varphi_k^*(t)$, $k = \overline{1, r}$, — власні вектори матриці $R_1(t)$, що відповідають власним значенням $\eta_k(t)$, $k = \overline{1, r}$. Визначивши $y^{(0)}(t)$, за формулою (2.15) знайдемо вектор $u^{(0)}(t)$.

Інші коефіцієнти розвинень (2.2), (2.3) знайдемо рекурентним способом. Зафіксуємо одну з функцій $\lambda^{(1)}(t)$ і відповідну вектор-функцію $y^{(0)}(t)$, які визначаються формулами (2.40), (2.41) відповідно. Власне значення і власний вектор матриці $R_1(t)$, яким вони відповідають, позначимо через $\eta(t)$ і $\varphi^*(t)$. Нехай відповідні функції $\lambda^{(i+1)}(t)$ і вектор-функції $u^{(i)}(t)$ при $i < k$ вже відомі. Тоді для визначення функції $\lambda^{(k+1)}(t)$ та вектора $u^{(k)}(t)$ використаємо умову (2.14) при $\alpha = p + k$. Згідно з (2.29), (2.36), (2.37) ця умова запишеться у вигляді

$$P_p^{(p)}(\lambda)y^{(k)}(t) + P_p^{(p+k)}(\lambda)y^{(0)}(t) + \sum_{\gamma=1}^{k-1} P_p^{(p+k-\gamma)}(\lambda)y^{(\gamma)}(t) +$$
$$+ \sum_{\gamma=0}^{k-1} \sum_{i=p+1}^{p+k-\gamma} \sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(p+k-\gamma)}(\lambda)\, Q \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)y^{(\gamma)}(t) -$$
$$- \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} P_i^{(k-j)}(\lambda)\, Q\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t) - Qg^{(p+k)}(t) = 0.$$

Оскільки $P_p^{(p)}(\lambda) = -\eta(t)$, $g^{(p+k)}(t) = -K(t)y^{(k)}(t) + \widetilde{g}^{(p+k)}(t)$, де $\widetilde{g}^{(p+k)}(t)$ — вже відомий вектор, то з останнього рівняння отримаємо

$$QKy^{(k)}(t) - \eta(t)y^{(k)}(t) = -P_p^{(p+k)}(\lambda)y^{(0)}(t) - \sum_{\gamma=1}^{k-1} P_p^{(p+k-\gamma)}(\lambda)y^{(\gamma)}(t) -$$
$$- \sum_{\gamma=0}^{k-1} \sum_{i=p+1}^{p+k-\gamma} \sum_{j=1}^{\min(i,\ m)} P_i^{(p+k-\gamma)}(\lambda)\, Q \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)y^{(\gamma)}(t) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} P_i^{(k-j)}(\lambda)\, Q\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t) + Q\widetilde{g}^{(p+k)}(t). \tag{2.42}$$

Тоді рівняння (2.42) в базисі підпростору E_0 матиме вигляд

$$\big(R_1(t) - \eta(t)E\big)y^{(k)}(t) = -P_p^{(p+k)}(\lambda)\varphi^*(t) + f_k(t), \tag{2.43}$$

де

$$f_k(t) = - \sum_{\gamma=1}^{k-1} P_p^{(p+k-\gamma)}(\lambda)y^{(\gamma)}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} P_i^{(k-j)}(\lambda)\, Q\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t) -$$
$$- \sum_{\gamma=0}^{k-1} \sum_{i=p+1}^{p+k-\gamma} \sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(p+k-\gamma)}(\lambda)\, Q \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)y^{(\gamma)}(t) + Q\widetilde{g}^{(p+k)}(t)$$

— вже відомий вектор з підпростору E_0.

Нехай $\psi^*(t)$ — елемент нуль-простору матриці $\big(R_1(t)-\eta(t)E\big)^*$, спряженої з матрицею $R_1(t)-\eta(t)E$. Оскільки за умовою 5° власне значення $\eta(t)$ матриці $R_1(t)$ просте, то йому відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1, тобто

$$\big(R_1(t)-\eta(t)E\big)\varphi^*(t)=0,$$

а рівняння

$$\big(R_1(t)-\eta(t)E\big)y=\varphi^*(t)$$

нерозв'язне відносно вектора y, звідки

$$\big(\varphi^*(t),\psi^*(t)\big)\neq 0, \forall t\in[0;T].$$

Вектор $\psi^*(t)$ виберемо так, щоб виконувалось співвідношення

$$\big(\varphi^*(t),\psi^*(t)\big)=1, \forall t\in[0;T].$$

Використавши умову розв'язності рівняння (2.43), матимемо

$$P_p^{(p+k)}(\lambda)=\big(f_k(t),\psi^*(t)\big). \tag{2.44}$$

Вираз $P_p^{(p+k)}(\lambda)$ запишемо у вигляді $P_p^{(p+k)}(\lambda)=p\lambda^{(k+1)}(t)(\lambda^{(1)}(t))^{p-1}+\widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)$, де доданок $\widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)$ містить лише ті функції $\lambda^{(i)}(t)$, в яких $i\leq k$. Тоді з рівняння (2.44) дістанемо

$$\lambda^{(k+1)}(t)=\frac{\big(f_k(t),\psi^*(t)\big)-\widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)}{p(\lambda^{(1)}(t))^{p-1}}. \tag{2.45}$$

Тепер рівняння (2.43) буде розв'язним і з нього знайдемо

$$y^{(k)}(t)=\widetilde{H}(t)\widetilde{f}_k(t), \tag{2.46}$$

де $\widetilde{H}(t)$ — матриця, напівобернена до матриці $R_1(t)-\eta(t)E$, а $\widetilde{f}_k(t)$ — вираз у правій частині рівняння (2.43). Визначивши вектор $y^{(k)}(t)$, за формулою (2.16) знайдемо вектор $u^{(k)}(t)$.

Рекурентні формули (2.41), (2.15), (2.46), (2.16), (2.12), (2.40), (2.45) дають змогу визначити будь-які коефіцієнти формальних розвинень (2.2), (2.3). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 2° та відповідною гладкістю функції $\lambda_0(t)$, вектор-функцій $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$, $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,r}$, та матриць $H(t)$, $\widetilde{H}(t)$. Згідно з (2.40) описаним способом можна знайти pr різних формальних розв'язків системи (1.1).

2.2. Побудова розв'язків другої групи, які відповідають нескінченним елементарним дільникам

Слідуючи [6], другу групу розв'язків системи (1.1), які відповідають нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (1.3), шукатимемо у вигляді

$$x(t,\nu)=v(t,\nu)\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi(\tau,\nu)}\right), \tag{2.47}$$

де n-вимірний вектор $v(t,\nu)$ і скалярна функція $\xi(t,\nu)$ зображаються у вигляді формальних розвинень

$$v(t,\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k v^{(k)}(t), \tag{2.48}$$

$$\xi(t,\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k \xi^{(k)}(t), \tag{2.49}$$

за степенями $\nu=\sqrt[q]{\varepsilon}$.

Використавши формули (2.4), (2.5), матимемо

$$\frac{d^k x}{dt^k}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\nu^{-(qh+1)j}C_k^i\frac{d^{k-i}v(t,\nu)}{dt^{k-i}}D_{i-j}[\xi^{-j}]\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi(\tau,\nu)}\right), k=\overline{0,m}, \tag{2.50}$$

де

$$D_{i-j}[\xi^{-j}]=\sum_{s_1+s_2+\dots+s_j=i-j}\prod_{\alpha=1}^{j}\Gamma_{s_\alpha}[\xi^{-1}], j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}.$$

Підставивши вектори (2.50) у систему (1.1), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\nu^{q(k-j)h-j}C_k^iD_{i-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}v(t,\nu)}{dt^{k-i}}=0.$$

Помноживши цю рівність на функцію $\nu^m\xi^m(t,\nu)$, а потім, виділивши тут доданки, в яких $k=i=j$, та взявши до уваги, що $D_0[\xi^\alpha]=\xi^\alpha(t,\nu)$, дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m}\nu^{m-k}D_0[\xi^{m-k}]A_k(t,\varepsilon)v(t,\nu)+\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\nu^{q(k-j)h+m-j}D_0[\xi^m]D_{k-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\varepsilon)v(t,\nu)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\nu^{q(k-j)h+m-j}C_k^iD_0[\xi^m]D_{i-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}v(t,\nu)}{dt^{k-i}}=0. \tag{2.51}$$

Подамо шукану функцію $\frac{1}{\xi(t,\nu)}=\widetilde{\xi}(t,\nu)$ у вигляді формального ряду за степенями параметра ν:

$$\widetilde{\xi}(t,\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\widetilde{\xi}^{(k)}(t),$$

коефіцієнти якого визначаються за рекурентними формулами

$$\widetilde{\xi}^{(0)}(t)=\frac{1}{\xi^{(0)}(t)},$$

$$\widetilde{\xi}^{(k)}(t)=-\frac{\sum_{j=1}^{k}\xi^{(j)}(t)\widetilde{\xi}^{(k-j)}(t)}{\xi^{(0)}(t)}, k=1,2,\dots.$$

Згідно з (2.7), (2.8) маємо

$$D_{i-j}[\widetilde{\xi}^j] = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k D_{i-j}^{(k)}[\widetilde{\xi}^j], j = \overline{1,i}, i = \overline{1,m}, \tag{2.52}$$

де

$$D_{i-j}^{(k)}[\widetilde{\xi}^j] = \sum_{s_1+\cdots+s_j=i-j} \quad \sum_{k_1+\cdots+k_j=k} \prod_{\alpha=1}^{j} \Gamma_{s_\alpha}^{(k_\alpha)}[\widetilde{\xi}], j = \overline{1,i}, i = \overline{1,m}.$$

Підставивши в (2.51) розвинення (1.2), (2.48), (2.49), (2.52) і прирівнявши вирази при однакових степенях ν, дістанемо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$A_m^{(0)}(t) v^{(0)}(t) = 0; \tag{2.53}$$

$$A_m^{(0)}(t) v^{(\alpha)}(t) = a^{(\alpha)}(t), \alpha = 1, 2, \ldots; \tag{2.54}$$

де

$$a^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{\alpha-m+k} D_0^{(\beta)}[\xi^{m-k}] A_k^{(0)}(t) v^{(\alpha-\beta-m+k)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \alpha = 1, 2, \ldots; \tag{2.55}$$

$$g^{(\alpha)}(t) = g_1^{(\alpha)}(t) + g_2^{(\alpha)}(t) + g_3^{(\alpha)}(t), \alpha = q, q+1, \ldots;$$

$$g_1^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{m} \sum_{\beta=0}^{\alpha-q-m+k} \sum_{\gamma=1}^{\left[\frac{\alpha-\beta-m+k}{q}\right]} D_0^{(\beta)}[\xi^{m-k}] A_k^{(\gamma)}(t) v^{(\alpha-\beta-\gamma q+k-m)}(t), \alpha = q, q+1, \ldots;$$

$$g_2^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=2}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{\alpha-\theta(k,j)} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-\beta-\theta(k,j)} \sum_{\delta=0}^{\left[\frac{\alpha-\beta-\gamma-\theta(k,j)}{q}\right]} D_0^{(\beta)}[\xi^m] D_{k-j}^{(\gamma)}[\widetilde{\xi}_j] A_k^{(\delta)}(t) v^{(\alpha-\beta-\gamma-\delta q-\theta(k,j))}(t),$$

$\alpha = qh + m - 1, qk + m, \ldots;$

$$g_3^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\beta=0}^{\alpha-\theta(k,j)} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-\beta-\theta(k,j)} \sum_{\delta=0}^{\left[\frac{\alpha-\beta-\gamma-\theta(k,j)}{q}\right]} C_k^i D_0^{(\beta)}[\xi^m] D_{i-j}^{(\gamma)}[\widetilde{\xi}^j] A_k^{(\delta)}(t) \times$$

$$\times \frac{d^{k-i} v^{(\alpha-\beta-\gamma-\delta q-\theta(k,j))}(t)}{dt^{k-i}}; \alpha = qh + m, qk + m + 1, \ldots; \theta(k,j) = q(k-j)h + m - j.$$

Покажемо, що з цієї системи можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.48), (2.49). Система (2.54) сумісна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\big(a^{(\alpha)}(t), \widetilde{\psi}_j(t)\big) = 0, j = \overline{1,s}, \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{2.56}$$

де $\widetilde{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, — базисні елементи нуль-простору матриці $\big(A_m^{(0)}(t)\big)^*$, спряженої до матриці $A_m^{(0)}(t)$. Введемо оператор проектування $\widetilde{Q}$, який відображає n-вимірний векторний простір E на його s-вимірний підпростір $\widetilde{E}_0$, наступним чином:

$$\widetilde{Q} v(t) = \sum_{j=1}^{s} \big(v(t), \widetilde{\psi}_j(t)\big) \widetilde{\varphi}_j(t), \forall v(t) \in E,$$

де $\widetilde{\varphi}_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, — базисні елементи нуль-простору матриці $A_m^{(0)}(t)$. Підпростір $\widetilde{E}_0$ є лінійною оболонкою векторів $\widetilde{\varphi}_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, які визначимо так, щоб виконувались включення $\widetilde{\varphi}_j(t) \in C^\infty[0;T]$, $j = \overline{1,s}$. Тоді умова (2.56) буде еквівалентна наступній:

$$\widetilde{Q}a^{(\alpha)}(t) = 0, \alpha = 1, 2, \dots. \tag{2.57}$$

За виконання умови (2.57) вектори $v^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 0, 1, \dots$, визначатимемо за формулами

$$v^{(0)}(t) = z^{(0)}(t), \tag{2.58}$$

$$v^{(\alpha)}(t) = G(t)a^{(\alpha)}(t) + z^{(\alpha)}(t), \alpha = 1, 2, \dots, \tag{2.59}$$

де $G(t)$ — матриця, напівобернена до $A_m^{(0)}(t)$, яку визначимо так, щоб $G(t) \in C^\infty[0;T]$, а $z^{(\alpha)}(t)$ — вектори з підпростору $\widetilde{E}_0$, які необхідно визначити.

Виразимо вектори $a^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, через шукані функції $\xi^{(j)}(t)$ і вектор-функції $z^{(j)}(t)$, $j = 0, 1, \dots$. Підставляючи послідовно (2.58), (2.59) у (2.55) при $\alpha < q$, матимемо

$$a^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]A_{m-1}^{(0)}(t)z^{(0)}(t),$$

$$a^{(2)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^2]\Big[A_{m-1}^{(0)}(t)G(t)A_{m-1}^{(0)}(t) - A_{m-2}^{(0)}(t)\Big]z^{(0)}(t) - D_0^{(1)}[\xi^1]A_{m-1}^{(0)}(t)z^{(0)}(t) -$$
$$- D_0^{(0)}[\xi^1]A_{m-1}^{(0)}(t)z^{(1)}(t).$$

Взявши до уваги, що

$$A_{m-j}^{(0)}(t) = \frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}, j = \overline{1,m},$$

де

$$M(t,\omega) = \sum_{j=0}^{m} \omega^j A_{m-j}^{(0)}(t), \tag{2.60}$$

і ввівши позначення $G_j(t) = -G(t)\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}, j = \overline{1,m}$, вектори $a^{(1)}(t), a^{(2)}(t)$ подамо у вигляді

$$a^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}z^{(0)}(t),$$

$$a^{(2)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^2]\Big[\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}G_1(t) + \frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\omega^2}\Big]z^{(0)}(t) - D_0^{(1)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}z^{(0)}(t) -$$
$$- D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}z^{(1)}(t).$$

Нарешті, скориставшись формулами (2.22), (2.23), дістанемо

$$a^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}\sigma^1(G_1, G_2, \dots, G_m)z^{(0)}(t),$$

$$a^{(2)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^2]\Big[\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}\sigma^2(G_1, G_2, \dots, G_m) + \frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\omega^2}\sigma^1(G_1, G_2, \dots, G_m)\Big]z^{(0)}(t) -$$
$$- D_0^{(1)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}\sigma^1(G_1, G_2, \dots, G_m)z^{(0)}(t) - D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}\sigma^1(G_1, G_2, \dots, G_m)z^{(1)}(t).$$

Методом математичної індукції встановимо, що в загальному випадку

$$a^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{\alpha-k}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} D_0^{(\alpha-k-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\dots,G_m)z^{(k)}(t),\quad \alpha=\overline{1,q-1}. \tag{2.61}$$

При $\alpha \geq q$ у складі $a^{(\alpha)}(t)$ з'являються вирази $g^{(\alpha)}(t), \alpha = q, q+1, \dots$. Тому, продовживши підстановку (2.58), (2.59) у (2.55), дістанемо вирази вигляду (2.61) та вирази, що містять вектори $g^{(\alpha)}(t)$. Позначивши останні через $\widetilde{a}^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = q, q+1, \dots$, виразимо їх через функції $\xi^{(j)}(t)$, $j = 0, 1, \dots$. При $\alpha = q, q+1, q+2$ матимемо

$$\widetilde{a}^{(q)}(t) = g^{(q)}(t),$$

$$\widetilde{a}^{(q+1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}G(t)g^{(q)}(t) + g^{(q+1)}(t),$$

$$\widetilde{a}^{(q+2)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^2]\Big[\Big(\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}G(t)\Big)^2 - \frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\omega^2}G(t)\Big]g^{(q)}(t) - D_0^{(1)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}G(t)g^{(q)}(t) - D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\omega}G(t)g^{(q+1)}(t) + g^{(q+2)}(t).$$

Ввівши позначення $\widetilde{G}_j(t) = -\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}G(t), j = \overline{1,m}$, і, скориставшись формулами (2.22), (2.23), дістанемо

$$\widetilde{a}^{(q+1)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\dots,\widetilde{G}_m)g^{(q)}(t) + g^{(q+1)}(t),$$

$$\widetilde{a}^{(q+2)}(t) = \Big[D_0^{(0)}[\xi^2]\sigma^3(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\dots,\widetilde{G}_m) + D_0^{(1)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\dots,\widetilde{G}_m)\Big]g^{(q)}(t) + D_0^{(0)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\dots,\widetilde{G}_m)g^{(q+1)}(t) + g^{(q+2)}(t).$$

Провівши індукцію по α, встановимо, що в загальному випадку

$$\widetilde{a}^{(\alpha)}(t) = \sum_{j=0}^{\alpha-q-1}\sum_{i=1}^{\alpha-q-j} D_0^{(\alpha-q-j-i)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\dots,\widetilde{G}_m)g^{(q+j)}(t) + g^{(\alpha)}(t),\quad \alpha = q, q+1, \dots. \tag{2.62}$$

Об'єднавши формули (2.61), (2.62), матимемо

$$a^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{\alpha-k}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} D_0^{(\alpha-k-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\dots,G_m)z^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^{\alpha-q-1}\sum_{i=1}^{\alpha-q-j} D_0^{(\alpha-q-j-i)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\dots,\widetilde{G}_m)g^{(q+j)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \alpha = 1, 2, \dots. \tag{2.63}$$

Перейдемо тепер до визначення функцій $\xi^{(j)}(t)$, і векторів $z^{(j)}(t)$, $j = 0, 1, \dots$. Оскільки за умовою 4° в'язка матриць (1.3) має s нескінченних елементарних дільників кратністю q, то згідно з [4] нульовому власному значенню симетричної в'язки матриць (2.60) відповідає s жорданових ланцюжоків векторів завдовжки q кожний. Вектори цих ланцюжків складаються з власних векторів $\widetilde{\varphi}_k(t)$, $k=\overline{1,s}$, та відповідних приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{1,s}$, $i=\overline{2,q}$, які задовольняють співвідношення

$$M(t,0)\widetilde{\varphi}_k(t)=0, k=\overline{1,s}; \tag{2.64}$$

$$M(t,0)\widetilde{\varphi}_k^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}\widetilde{\varphi}_k^{(i-j)}(t)=0, k=\overline{1,s}, i=\overline{2,q}. \tag{2.65}$$

При цьому рівняння

$$M(t,0)\widetilde{z}_k+\sum_{j=1}^{\min(q,m)}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}\widetilde{\varphi}_k^{(q-j+1)}(t)=0, k=\overline{1,s},$$

нерозв'язні відносно векторів $\widetilde{z}_k$. Приєднані вектори цих ланцюжків виражаються через власні вектори за формулою

$$\widetilde{\varphi}_k^{(i)}(t)=\sigma^i(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}_k(t), k=\overline{1,s}, i=\overline{2,q}. \tag{2.66}$$

Жорданів набір власних і приєднаних векторів, які відповідають нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць (1.3) є повним, тобто

$$\det\left\|\left(\sum_{k=1}^{\min(q,m)}\frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\omega^k}\widetilde{\varphi}_i^{(q-k+1)}(t),\widetilde{\psi}_j(t)\right)\right\|_{i,j=\overline{1,s}}\neq 0, \forall t\in[0;T]. \tag{2.67}$$

Виходячи з (2.67), вектори $\widetilde{\psi}_j(t)$, $j=\overline{1,s}$, визначимо так, щоб виконувались співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(q,m)}\frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\omega^k}\widetilde{\varphi}_i^{(q-k+1)}(t),\widetilde{\psi}_j(t)\right)=\delta_{ij}, i,j=\overline{1,s}, \tag{2.68}$$

які, з врахуванням (2.66), запишуться у вигляді

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(q,m)}\frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\omega^k}\sigma^{q-k+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}_i(t),\widetilde{\psi}_j(t)\right)=\delta_{ij}, i,j=\overline{1,s}. \tag{2.69}$$

Виходячи з розв'язності рівнянь (2.64), (2.65) та співвідношень (2.66), (2.69), встановлюємо такі властивості оператора $\widetilde{Q}$: якщо вектор $v(t)\in\widetilde{E}_0$, то

$$\sum_{k=1}^{\min(i,m)}\widetilde{Q}\frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\omega^k}\sigma^{i-k+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)v(t)=0, i=\overline{1,q-1}, \tag{2.70}$$

$$\sum_{k=1}^{\min(q,m)}\widetilde{Q}\frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\omega^k}\sigma^{q-k+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)v(t)=v(t). \tag{2.71}$$

Згідно з (2.63), (2.70), (2.71) при $\alpha < q$ умова (2.57) виконується, а при $\alpha = q$ запишеться у вигляді

$$D_0^{(0)}[\xi^q]z^{(0)}(t) - \widetilde{Q}g^{(q)}(t) = 0.$$

Оскільки $D_0^{(0)}[\xi^q] = (\xi^{(0)}(t))^q$, $g^{(q)}(t) = -A_m^{(1)}(t)z^{(0)}(t)$, то звідси маємо

$$(\xi^{(0)}(t))^q z^{(0)}(t) + \widetilde{Q}A_m^{(1)}(t)z^{(0)}(t) = 0. \tag{2.72}$$

Оператор $\widetilde{Q}A_m^{(1)}$ відображає простір E на s-вимірний підпростір $\widetilde{E}_0$. Позначимо звуження цього оператора на підпростір $\widetilde{E}_0$ через R_2. Неважко переконатися, що в базисі $\widetilde{\varphi}_k(t)$, $k = \overline{1,\ s}$, підпростору $\widetilde{E}_0$ оператор R_2 зображається $(s \times s)$-матрицею

$$R_2(t) = \left\| \left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_i(t), \widetilde{\psi}_j(t) \right) \right\|_{i,j=\overline{1,s}}.$$

Тоді в базисі підпростору $\widetilde{E}_0$ рівняння (2.72) матиме вигляд

$$\left(R_2(t) + (\xi^{(0)}(t))^q E\right) z^{(0)}(t) = 0,$$

де E — одинична матриця s-го порядку.

Припустимо, що виконується умова:

6°. Матриця $R_2(t)$ має на відрізку $[0;T]$ s простих, відмінних від нуля власних значень $\theta_j(t)$, $j = \overline{1,s}$.

Тоді з останнього рівняння визначимо qs різних, відмінних від нуля функцій $\xi^{(0)}(t)$:

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt[q]{\left|\theta_k(t)\right|}\Big[\cos\frac{\arg(-\theta_k(t)) + 2\pi(j-1)}{q} + i\sin\frac{\arg(-\theta_k(t)) + 2\pi(j-1)}{q}\Big], \quad k = \overline{1,s}, j = \overline{1,q}, \tag{2.73}$$

і s відповідних векторів $z^{(0)}(t)$:

$$z^{(0)}(t) = \widetilde{\varphi}_k^*(t), k = \overline{1,s}, \tag{2.74}$$

де $\widetilde{\varphi}_k^*(t)$, $k = \overline{1,s}$, — власні вектори матриці $R_2(t)$, що відповідають власним значенням $\theta_k(t)$, $k = \overline{1,s}$. Визначивши вектор $z^{(0)}(t)$, за формулою (2.58) знайдемо вектор $v^{(0)}(t)$.

Таким чином, функцію $\xi^{(0)}(t)$ і вектор $v^{(0)}(t)$ визначено. Наступні коефіцієнти розвинень (2.48), (2.49) можна знайти рекурентним способом. Зафіксуємо одну з функцій $\xi^{(0)}(t)$ та відповідну вектор-функцій $v^{(0)}(t)$, які визначаються за формулами (2.73), (2.74) відповідно. Власне значення і власний вектор матриці $R_2(t)$, яким вони відповідають позначимо через $\theta(t)$ і $\widetilde{\varphi}^*(t)$. Нехай відповідні функції $\xi^{(j)}(t)$ і вектор-функції $v^{(j)}(t)$ при $j < k$ вже відомі. Тоді для визначення функції $\xi^{(k)}(t)$ та вектор-функції $v^{(k)}(t)$ використаємо умову (2.57) при $\alpha = q + k$. Згідно з (2.63), (2.70), (2.71) ця умова запишеться у вигляді

$$D_0^{(0)}[\xi^q]z^{(k)}(t) + D_0^{(k)}[\xi^q]z^{(0)}(t) + \sum_{\gamma=1}^{k-1} D_0^{(k-\gamma)}[\xi^q]z^{(\gamma)}(t) +$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=q+1}^{q+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} D_0^{(q+k-\gamma-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)z^{(\gamma)}(t) -$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j} D_0^{(k-j-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q+j)}(t) - \widetilde{Q}g^{(q+k)}(t) = 0.$$

Оскільки $D_0^{(0)}[\xi^q] = -\theta(t)$, $g^{(q+k)}(t) = -A_m^{(1)}(t)z^{(k)}(t) + \widetilde{g}^{(q+k)}(t)$, де $\widetilde{g}^{(q+k)}(t)$ — вже відомий вектор згідно з припущенням індукції, то з останньої рівності отримаємо

$$\widetilde{Q}A_m^{(1)}z^{(k)}(t) - \theta(t)z^{(k)}(t) = -D_0^{(k)}[\xi^q]z^{(0)}(t) - \sum_{\gamma=1}^{k-1} D_0^{(k-\gamma)}[\xi^q]z^{(\gamma)}(t) -$$
$$- \sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=q+1}^{q+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,\ m)} D_0^{(q+k-\gamma-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)z^{(\gamma)}(t) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j} D_0^{(k-j-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q+j)}(t) + \widetilde{Q}\widetilde{g}^{(q+k)}(t). \quad (2.75)$$

Тоді рівняння (2.75) в базисі підпростору $\widetilde{E}_0$ запишеться у вигляді

$$\big(R_2(t) - \theta(t)E\big)z^{(k)}(t) = -D_0^{(k)}[\xi^q]\widetilde{\varphi}^*(t) + d_k(t), \quad (2.76)$$

де

$$d_k(t) = -\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=q+1}^{q+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} D_0^{(q+k-\gamma-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)z^{(\gamma)}(t) -$$
$$- \sum_{\gamma=1}^{k-1} D_0^{(k-\gamma)}[\xi^q]z^{(\gamma)}(t) + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j} D_0^{(k-j-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q+j)}(t) + \widetilde{Q}\widetilde{g}^{(q+k)}(t)$$

— вже відомий вектор з підпростору $\widetilde{E}_0$.

Нехай $\widetilde{\psi}^*(t)$ — елемент нуль-простору матриці $\big(R_2(t) - \theta(t)E\big)^*$, спряженої з матрицею $R_2(t) - \theta(t)E$, який виберемо так, щоб виконувалось співвідношення

$$\big(\widetilde{\varphi}^*(t), \widetilde{\psi}^*(t)\big) = 1, \forall t \in [0; T].$$

Використавши умову розв'язності рівняння (2.76), матимемо

$$D_0^{(k)}[\xi^q] = \big(d_k(t), \widetilde{\psi}^*(t)\big).$$

Оскільки $D_0^{(k)}[\xi^q] = q\xi^{(k)}(t)(\xi^{(0)}(t))^{q-1} + \widetilde{D}_0^{(k)}[\xi^q]$, де доданок $\widetilde{D}_0^{(k)}[\xi^q]$ містить лише ті функції $\xi^{(j)}(t)$, індекси яких менші k, то

$$\xi^{(k)}(t) = \frac{\big(d_k(t), \widetilde{\psi}^*(t)\big) - \widetilde{D}_0^{(k)}[\xi^q]}{q(\xi^{(0)}(t))^{q-1}}. \quad (2.77)$$

Тепер вектор $z^{(k)}(t)$ визначимо з рівняння (2.76) за формулою

$$z^{(k)}(t) = \widetilde{G}(t)\widetilde{d}_k(t), \quad (2.78)$$

де $\widetilde{G}(t)$ — матриця, напівобернена до $R_2(t) - \theta(t)E$, а $\widetilde{d}_k(t)$ — вираз у правий частині рівняння (2.76). Визначивши вектор $z^{(k)}(t)$, за формулою (2.59) знайдемо вектор $v^{(k)}(t)$.

Отримані формули дають можливість визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.48), (2.49). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 2° та відповідною гладкістю вектор-функцій $\widetilde{\varphi}^*(t)$, $\widetilde{\psi}^*(t)$, $\widetilde{\varphi}_j(t)$, $\widetilde{\psi}_j(t)$, $j=\overline{1,s}$ і матриць $G(t)$, $\widetilde{G}(t)$. Згідно з (2.73) таким способом можна побудувати qs різних формальних розв'язків системи (1.1).

Потрібно відзначити, що відмінність від нуля власних значень матриці $R_2(t)$ забезпечує неособливість матриці $A_m(t,\varepsilon)$ при досить малих ε, а це згідно з [5] забезпечує існування в системи (1.1) mn лінійно незалежних розв'язків.

3. Результати

Теорема. Якщо виконуються умови $1^\circ - 6^\circ$, то на відрізку $[0;T]$ система диференціальних рівнянь (1.1), має pr формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\mu)=u_i(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right), i=\overline{1,pr},$$

що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (1.3), і qs розв'язків вигляду

$$x_j(t,\nu)=v_j(t,\nu)\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi_j(\tau,\nu)}\right), j=\overline{1,qs},$$

які відповідають нескінченним елементарним дільникам цієї в'язки, де $u_i(t,\mu)$, $v_j(t,\nu)$ — n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\mu)$, $\xi_j(t,\nu)$ — скалярні функції, які зображаються у вигляді формальних розвинень (2.2), (2.3), (2.48), (2.49) за степенями параметрів $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$ та $\nu=\sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно. Коефіцієнти цих розвинень визначаються за рекурентними формулами (2.41), (2.15), (2.46), (2.16), (2.12), (2.40), (2.45), (2.74), (2.58), (2.78), (2.59), (2.73), (2.77).

Зазначимо, що дана теорема поширюється і на той випадок, коли головна матриця $A_m^{(0)}(t)$ при старшій похідний у системі (1.1) неособлива. У цьому випадку гранична в'язка матриць (1.3) матиме тільки скінченні елементарні дільники, яким відповідає $pr=mn$ розв'язків вигляду (2.1).

4. Асимптотичні властивості формальних розв'язків

Формальні розв'язки, які будуються за вказаним алгоритмом, лінійно незалежні в тому розумінні, що такими будуть l — наближення, утворені шляхом обривання розвинень (2.2), (2.3), (2.48), (2.49) на l -му члені, якщо $l\geq \max(p-1,q-1)$.

Методами робіт [6, 9], можна довести, що ці розв'язки є асимптотичним розвиненням точних лінійно незалежних розв'язків системи (1.1) при $\varepsilon\longrightarrow 0$, якщо функції $Re\big(\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^{ph-1}\mu^k\lambda_i^{(k)}(t)\big)$, $i=\overline{1,pr}$, і $Re\big(\sum_{k=0}^{qh}\nu^k\xi_j^{(k)}(t)\big)$, $j=\overline{1,qs}$, не змінюють знак на заданому відрізку $[0;\ T]$. Для цього необхідно звести систему (1.1) до еквівалентної системи рівнянь першого порядку і застосувати процедуру оцінки нев'язки, описану в [6, 9]. У результаті отримаємо такі асимптотичні оцінки

$$\|x_i(t,\varepsilon)-x_i^{(l)}(t,\varepsilon)\|\leq c_i\varepsilon^{\frac{\delta(l+1-ph))+p(1-\delta)}{p\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^t Re\big(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{ph-1}\mu^k\lambda_i^{(k)}(\tau)\big)d\tau\right);$$

$$\left\|\frac{d^k x_i(t,\varepsilon)}{dt^k} - \frac{d^k x_i^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\| \leq$$
$$\leq c_i \varepsilon^{\frac{\delta(l+1-ph))+p(1-\delta)}{p\delta}} \varepsilon^{-kh} \sup_{t\in[0;T]} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t} Re\big(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{ph-1}\mu^k \lambda_i^{(k)}(\tau)\big)d\tau\right);$$

$i = \overline{1, pr}$, для розв'язків першої групи, що відповідають скінченним елементарним дільникам, і

$$\|x_j(t,\varepsilon) - x_j^{(l)}(t,\varepsilon)\| \leq \widetilde{c}_j \varepsilon^{\frac{\delta(l-qh)+q(1-\delta)}{q\delta}} \sup_{t\in[0;T]} \exp\left(\varepsilon^{\frac{-qh-1}{q}} \int_{t_0}^{t} \frac{Re\big(\sum_{k=0}^{qh}\nu^k \xi_j^{(k)}(\tau)\big)}{|\xi^{(l)}(\tau,\nu)|^2} d\tau\right);$$

$$\left\|\frac{d^k x_j(t,\varepsilon)}{dt^k} - \frac{d^k x_j^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\| \leq$$
$$\leq \widetilde{c}_j \varepsilon^{\frac{\delta(l-qh)+q(1-\delta)}{q\delta}} \varepsilon^{-kh} \sup_{t\in[0;T]} \exp\left(\varepsilon^{\frac{-qh-1}{q}} \int_{t_0}^{t} \frac{Re\big(\sum_{k=0}^{qh}\nu^k \xi_j^{(k)}(\tau)\big)}{|\xi^{(l)}(\tau,\nu)|^2} d\tau\right),$$

$j = \overline{1, qs}$, — для розв'язків другої групи, які відповідають нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць матриць $P(t,\lambda)$, де $x_i(t,\varepsilon)$, $x_j(t,\varepsilon)$ — точні розв'язки системи (1.1), $x_i^{(l)}(t,\varepsilon)$, $x_j^{(l)}(t,\varepsilon)$ — відповідні l — наближення, $c_i, \widetilde{c}_j$ — деякі сталі, що не залежать від ε, $\delta = \max(p,q)$.

5. Висновки

У статті побудовано асимптотику лінійно незалежних розв'язків системи (1.1) у випадку кратного спектра характеристичного полінома (1.3). У даний роботі вперше розглянуто випадок, коли характеристичний поліном має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників однакової кратності.

Встановлено кількість розв'язків системи (1.1). Виведено рекурентні формули за якими будуються відповідні формальні розв'язки системи (1.1). Наведено умову за виконання якої отримані розв'язки є лінійно незалежними. Наведено відповідні асимптотичні оцінки.

Перелік цитованих джерел

1. *Кушнир В. А.* Асимптотические разложения решений систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков з малым параметром при производных: Дис… канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. — Київ, 1984.
2. *Кушнір В. А., Кушнір Г. А.* Побудова асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з малим параметром при похідних //Науковий часопис Нац. пед. ун-ту імені М. П. Драгоманова. / Під ред. В. П. Андрущенко, Г. І. Волинка. — Київ: Видавництво Нац. пед. ун-ту імені М. П. Драгоманова, 2007. — С. 139–143.
3. *Павлюк І. А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. — Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970. — 208 с.
4. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями //Науковий часопис Нац. пед. ун-ту імені М. П. Драгоманова. / Під ред. В. П. Андрущенко, Г. І. Волинка. — Київ: Видавництво Нац. пед. ун-ту імені М. П. Драгоманова, 2012. — С. 201–217.

5. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Про структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Український математичний журнал. — 2013. — Т. 65, №2. — С. 296–306.
6. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями /А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.
7. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1983. — 352 с.
8. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений /Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. — К.: Вища школа, 1989. — 287 с.
9. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений /Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. — К.: Вища школа, 1991. — 207 с.

Получена 20.09.2013