Динамические системы, том 2(30), No. 3-4, 285–292

УДК 531.36+534.1

Об устойчивости стационарного вращения динамически симметричного твердого тела на струнном подвесе переменной длины

Е. В. Очеретнюк, В. И. Слынько

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
Киев 03057. *E-mail: ocheretnyukeugen@ukr.net*
E-mail: vitstab@ukr.net

Аннотация. Рассматривается динамически симметричное твердое тело на струнном подвесе. Длина подвеса меняется по кусочно-постоянному периодическому закону. Исследуются условия стабилизации вращения тела вокруг оси динамической симметрии. Исследования проводятся методами теории Флоке и теории устойчивых многочленов. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости.

Ключевые слова: тело на струнном подвесе, переменная длина, теория Флоке, устойчивые многочлены, критерий Рауса-Гурвица

1. Введение

Одним из направлений исследований в теоретической механике является исследование устойчивости стационарных движений механических систем при параметрических возмущениях. В данной статье будет рассматриваться движение абсолютно твердого тела, подвешенного на струнном подвесе. Обзор [1] дает достаточно полное представление о результатах в этой области по состоянию на 1991 г. Исследованию устойчивости в маятниковых системах посвящены также работы [2–8].

Целью настоящей работы является получение необходимых и достаточных условий устойчивости абсолютно твердого тела на подвесе переменной длины, в случае когда изменения длины подвеса описывается кусочно-постоянной функцией и частота этих изменений мала. При этом применяется аппарат теории устойчивых многочленов развитой в книге [9]. В работах [12, 13] также рассматриваются вопросы устойчивости систем с переменной длиной подвеса для маятников.

2. Постановка задачи

Рассматривается динамически симметричное твердое тело, подвешенное на нерастяжимом невесомом стержне O_1O_2. Точка O_2 находится на оси динамической симметрии тела.

Предполагается, что длина подвеса описывается кусочно-постоянной функцией, так что

$$l(t) = \begin{cases} l_1, t \in \left(k\theta, \dfrac{\theta}{2} + k\theta\right] \\ l_2, t \in \left(\dfrac{\theta}{2} + k\theta, (k+1)\theta\right]; \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Исходя из вида функции $l(t)$, можем заключить, что на интервалах времени $\left(k\theta, \dfrac{\theta}{2} + k\theta\right)$ и $\left(\dfrac{\theta}{2} + k\theta, (k+1)\theta\right)$ тело находится под действием стационарных связей, а в момент времени $t = \dfrac{k\theta}{2}$ происходит мгновенное изменение голономной связи. Этот момент времени является моментом удара в системе.

Введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$, так что ось ζ — вертикальная, а плоскость $\xi\eta$ — горизонтальная. Точка O_1 (точка подвеса) имеет координаты $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$. В центре масс G тела, расположенном на оси динамической симметрии, поместим начала двух других систем координат: $G\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $Gxyz$. Оси первой системы координат постоянно параллельны соответствующим осям $O\xi\eta\zeta$, оси второй системы жестко связаны с телом. При этом ось Gz направлена по оси динамической симметрии тела и является главной центральной осью инерции. Положение тела и жестко связанной с ним системы координат $Gxyz$ относительно поступательно перемещающейся системы $G\xi_1\eta_1\zeta_1$ определим тремя углами Эйлера–Крылова: α, β и γ. Углами α_1 и β_1 зададим положение стержня O_1O_2 по отношению к системе координат $O_1\xi\eta\zeta$.

Струнный подвес можно рассматривать как реономную геометрическую связь

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2(t), \ t \neq \frac{k\theta}{2},$$

где $x, \ y, \ z$ — координаты точки O_2 в неподвижной системе координат. Координаты $\xi_G, \ \eta_G, \ \zeta_G$ центра масс тела G определяются по формулам.

$$\xi_G = -l(t)\sin\beta_1 - a\sin\beta,$$
$$\eta_G = -l(t)\sin\alpha_1\cos\beta_1 + a\sin\alpha\cos\beta, \ t \neq \frac{k\theta}{2},$$
$$\zeta_G = -l(t)\cos\alpha_1\cos\beta_1 - a\cos\alpha\cos\beta.$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(m(\dot\xi_G^2 + \dot\eta_G^2 + \dot\zeta_G^2) + A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2),$$

а потенциальная энергия определяется формулой

$$V = mg\zeta_G = -mg(l(t)\cos\alpha_1\cos\beta_1 + a\cos\alpha\cos\beta), \ t \neq \frac{k\theta}{2}.$$

Кроме силы тяжести на систему действуют малые силы трения в шарнире O_1, которые можно задать функцией Релея

$$R = \frac{\mu(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\beta}_1^2)}{2},$$

μ — положительный коэффициент.

При $t \neq \dfrac{k\theta}{2}$ уравнения движения имеют форму уравнений Лагранжа второго рода [10]

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k,$$

где q_k — обобщенные координаты, а Q_k — соответствующие им обобщенные силы

$$Q_k = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}.$$

При $t = \dfrac{k\theta}{2}$ уравнения движения имеют форму

$$q_k(\frac{k\theta}{2} - 0) = q_k(\frac{k\theta}{2} + 0), \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right|_{t=\frac{k\theta}{2}-0} = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right|_{t=\frac{k\theta}{2}+0}.$$

Система уравнений движения допускает стационарный режим:

$$\alpha_1 = \dot{\alpha}_1 = 0,\ \beta_1 = \dot{\beta}_1 = 0,\ \beta = \dot{\beta} = 0,\ \alpha = \dot{\alpha} = 0,\ \gamma = \omega t + c,\ \dot{\gamma} = \omega,$$

где ω — угловая скорость вращения тела вокруг его оси динамической симметрии.

В линейном приближении система уравнений возмущенного движения в переменных $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, где

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \beta_1,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta$$

имеет вид

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_n\ddot{x}(t) + (\mathcal{B} + \mathcal{G})\dot{x}(t) + \mathcal{C}_n x(t) = 0,\ n = 1, 2,\ t \neq \frac{k\theta}{2}, \\ x(t^+) = x(t),\ \mathcal{A}_2\dot{x}(t^+) = \mathcal{A}_1\dot{x}(t),\ t = \frac{\theta}{2} + k\theta, \\ x(t^+) = x(t),\ \mathcal{A}_1\dot{x}(t^+) = \mathcal{A}_2\dot{x}(t),\ t = k\theta. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Постоянные матрицы $\mathcal{A}_n,\ \mathcal{B},\ \mathcal{G},\ \mathcal{C}$ выглядят следующим образом

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} ml_n^2 & 0 & mal_n & 0 \\ 0 & ml_n^2 & 0 & mal_n \\ mal_n & 0 & A + ma^2 & 0 \\ 0 & mal_n & 0 & A + ma^2 \end{pmatrix},\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&C\omega\\0&0&-C\omega&0\end{pmatrix},\ \mathcal{C}_n=\begin{pmatrix}mgl_n&0&0&0\\0&mgl_n&0&0\\0&0&mga&0\\0&0&0&mga\end{pmatrix}.$$

Введем комплексные переменные $z_1=x_1+ix_2,\ z_2=x_3+ix_4,\ z=(z_1,z_2)^T$. Система (2.1) преобразуется к виду:

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathcal{A}}_n\ddot z(t)+(\widetilde{\mathcal{B}}+\widetilde{\mathcal{G}})\dot z(t)+\widetilde{\mathcal{C}}_n z(t)=0,\ n=1,2,\ t\neq\frac{k\theta}{2},\\ z(t^+)=z(t),\ \widetilde{\mathcal{A}}_2\dot z(t^+)=\widetilde{\mathcal{A}}_1\dot z(t),\ t=\frac{\theta}{2}+k\theta,\\ z(t^+)=z(t),\ \widetilde{\mathcal{A}}_1\dot z(t^+)=\widetilde{\mathcal{A}}_2\dot z(t),\ t=k\theta,\end{gathered}\tag{2.2}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{A}}_n=\begin{pmatrix}ml_n^2&mal_n\\mal_n&A+ma^2\end{pmatrix},\widetilde{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\mu&0\\0&0\end{pmatrix},$$
$$\widetilde{\mathcal{G}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-iC\omega\end{pmatrix},\widetilde{\mathcal{C}}_n=\begin{pmatrix}mgl_n&0\\0&mga\end{pmatrix}.$$

Система (2.2) является линейной периодической системой дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Для исследования устойчивости системы (2.2) применим результаты теории Флоке [11]. Для этого систему дифференциальных уравнений приведем к нормальной форме. Введем новые переменные $y_1(t)=z(t), y_2(t)=\dot z(t)$, $y(t)=(y_1,y_2)^T$ тогда

$$\begin{gathered}\dot y(t)=M_n y(t),\ t\neq\frac{k\theta}{2},\\ \dot y(t^+)=S_1y(t),\ t=\frac{\theta}{2}+k\theta,\\ \dot y(t^+)=S_2y(t),\ t=k\theta,\end{gathered}\tag{2.3}$$

где

$$M_n=\begin{pmatrix}0&I\\-\widetilde{\mathcal{A}}_n^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_n&-\widetilde{\mathcal{A}}_n^{-1}(\widetilde{\mathcal{B}}+\widetilde{\mathcal{G}})\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\frac{(A+ma^2)g}{Al_n}&\frac{ma^2g}{Al_n}&-\frac{(A+ma^2)\mu}{Aml_n^2}&-\frac{aC\omega}{Al_n}i\\\frac{mag}{A}&-\frac{mag}{A}&\frac{a\mu}{Al_n}&\frac{C\omega}{A}i\end{pmatrix},$$

$$S_1=\begin{pmatrix}I&0\\0&\widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{l_1(Al_1+ma^2(l_1-l_2))}{Al_2^2}&\frac{a(A+ma^2)(l_1-l_2)}{Al_2^2}\\0&0&-\frac{mal_1(l_1-l_2)}{Al_2}&\frac{Al_2-ma^2(l_1-l_2)}{Al_2}\end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathcal{A}}_1^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_2(Al_2+ma^2(l_2-l_1))}{Al_1^2} & \frac{a(A+ma^2)(l_2-l_1)}{Al_1^2} \\ 0 & 0 & -\frac{mal_2(l_2-l_1)}{Al_1} & \frac{Al_1-ma^2(l_2-l_1)}{Al_1} \end{pmatrix}.$$

Матрица монондромии системы (2.3) будет иметь вид:

$$\Phi = S_2 e^{M_2\frac{\theta}{2}} S_1 e^{M_1\frac{\theta}{2}}.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости системы (2.3) основаны на результатах классической теории Флоке:

1) система (2.3) асимптотически устойчива, тогда и только тогда, когда все мультипликаторы этой системы (характеристические числа матрицы монодромии Φ) лежат внутри открытого единичного круга (комплексной плоскости $\mathbb{C}$),

2) система (2.3) неустойчива, если хотя бы один мультипликатор лежит вне замкнутого единичного круга,

3) система (2.3) устойчива, тогда и только тогда, когда все мультипликаторы лежат внутри замкнутого единичного круга и тем из них, которые лежат на единичной окружности соответствуют простые элементарные делители матрицы Φ.

В настоящей работе исследуется вопрос об условиях устойчивости стационарного вращения твердого тела при условии, что θ является достаточно малым.

3. Условия устойчивости стационарного вращения

Рассмотрим случай, когда θ — мало. Разложим с точностью до $o(\theta)$ элементы матрицы монодромии Φ:

$$e^{M_n\frac{\theta}{2}} = I + \frac{\theta}{2}M_n + o(\theta).$$

Тогда Φ разложится в ряд по θ следующим образом

$$\Phi = I + \frac{\theta}{2}(S_2M_2S_1 + M_1) + o(\theta). \tag{3.1}$$

Согласно теории Флоке система будет асимптотически устойчивой, тогда и только тогда, когда все мультипликаторы матрицы монодромии будут лежать внутри открытой единичной окружности. Это условие эквивалентно условию, что для всех собственных значений матрицы $S_2M_2S_1 + M_1$ должно выполняться условие $Re(\lambda) < 0$. Для проверки этого условия воспользуемся критерием Рауса-Гурвица для многочленов с комплексными коэффициентами. Представим характеристический многочлен $f(\lambda)$ матрицы $S_2M_2S_1 + M_1$ в виде [9]:

$$f(ip) = \hat{g}(p) - \hat{h}(p).$$

Где

$$\begin{aligned} \hat{g}(p) &= a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 \\ \hat{h}(p) &= b_0p^3 + b_1p^2 + b_2p + b_3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для данных многочленов (3.2) составим матрицу Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя ее главные миноры четного порядка (определители Гурвица), получим необходимые и достаточные условия параметрической стабилизации. При этом будем учитывать, что характеристический многочлен симметричен относительно l_1, l_2, а следовательно коэффициенты в определителях Гурвица можна представить, как функции от элементарных симметричных многочленов $\sigma_1 = l_1 + l_2$ и $\sigma_2 = l_1 l_2$.

$$\begin{gathered}
(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\mathcal{E} > 0, \\
A\mathcal{E}^3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^3 g\sigma_1 + 4\mathcal{E}^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 mag - \\
-4\mathcal{B}\mathcal{E}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)(C^2\omega^2 + Amag) - 4A\mathcal{B}^2C^2\omega^2 > 0, \\
-a^2m^2g^2((-\sigma_1^2 + 2\sigma_2)\mathcal{E} + A\mathcal{B})(-4ma(-\sigma_1^2 + 2\sigma_2)\mathcal{E} + A\mathcal{B}) + \\
+A\mathcal{E}^2\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2) + \mathcal{B}C^2\omega^2 mag(8ma(\mathcal{E}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 3A\mathcal{B}) + \\
+A\mathcal{E}\sigma_1(\mathcal{E}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 3A\mathcal{B})(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)) + \\
+A\mathcal{B}^2C^4\omega^4\sigma_1((\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + A\mathcal{B}) > 0, \\
A\mathcal{B}^2(Amag - 2C^2\omega^2) - \\
-2\mathcal{B}\mathcal{E}(Amag + C^2\omega^2) + \mathcal{E}^2 mag(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 > 0, \\
\theta \ll 1.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Для сокращения выкладок были введены следующие обозначения:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{A^2\sigma_2^2}((A + \frac{1}{2}ma^2)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - ma^2\sigma_2),\ \mathcal{E} = \frac{A + ma^2}{A\sigma_2^2}.$$

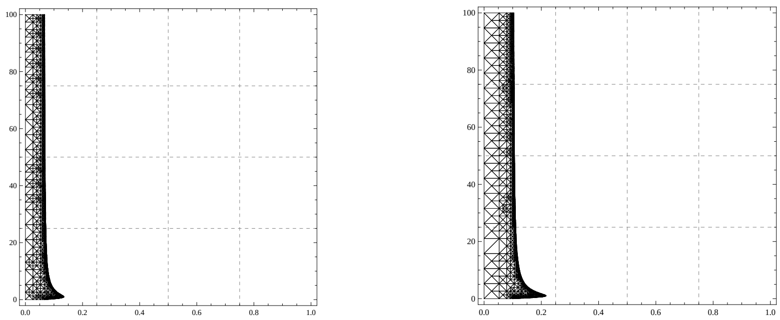
Из системы неравенств (3.3) можно исключить первое неравенство, так как оно выполняется при любых значениях параметров системы. Таким образом условия параметрической стабилизации сводятся к системе из трёх неравенств.

4. Примеры

На рис. 1a и 1b штриховкой отмечены области устойчивости в пространстве параметров $(\omega, l_1/l_2)$ при следующих значениях констант:

(a) $C = 2$кг $\cdot$ м^2/с^2, $A = 10$кг $\cdot$ м^2/с^2, $l_2 = 5$м, $m = 5$кг, $a = 0.3$м, $g = 9,8$м/с^2, $\mu = 0.5$кг $\cdot$ м^2/с^2;

(b) $C = 2$кг $\cdot$ м^2/с^2, $A = 3$кг $\cdot$ м^2/с^2, $l_2 = 3$м, $m = 2$кг, $a = 0.5$м, $g = 9,8$м/с^2, $\mu = 0.3$кг $\cdot$ м^2/с^2.



(a) (b)

Рис. 1.

5. Обсуждение

В данной статье предложен подход, основанный на определителях Гурвица и теории Флоке, который дает возможность определить области устойчивости динамически симметричного твердого тела на струнном подвесе переменной длины. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости в виде системы неравенств, ограничивающие параметры системы. Представлены численные примеры и построены области, которые им отвечают.

Список цитируемых источников

1. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. — М.: Наука. — 1991. — 330 с.
2. *Слынько В. И.* Устойчивость движений в критических случаях голономной механической системы с двумя степенями свободы при наличии ударов // Прикладная механика. — 2008. — Т.44. № 6. — С. 105–117.
3. *Слынько В. И.* О границах областей асимптотической устойчивости положений равновесия двухзвенного математического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Прикладная механика. — 2008. — Т.44. № 7. — С. 120–133.
4. *Якубович В. А.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука. — 1987. — 328 с.
5. *Плахтиенко Н. П.* Двойной нестационарный фазочастотный резонанс колебательных систем // Прикладная механика. — 2002. — Т.38. № 1. — С. 135–141.
6. *Пузырев В. Е.* Об устойчивости равномерных вращений гиростата на колеблющемся основании // Механика твердого тела. — 1999. — Вып. 28. — С. 88–91.

7. *Пузырев В. Е.* Пассивная стабилизация стационарного движения вращающегося маятника // Механика твердого тела. — 2003. — Вып. 33. — С. 100–107.
8. *Золотенко Г. Ф.* Движение твердого тела, подвешенного на нити переменной длины // Изв. АН СССР. Серия МТТ. — 1988. — № 1. — С. 16—19.
9. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. — М.: Наука. — 1981. — 176 с.
10. *Аппель П.* Теоретическая механика.Том 2. Динамика системы. Аналитическая механика. — М.:Физматлит. — 1960. — 487 с.
11. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа. — 1987. — 288 с.
12. *Krasil'nikov P. S.* The non-linear oscillations of a pendulum of variable length on a vibrating base. // J. Appl. Math. Mech., 2012. — V. 76 Issue: 1 — P. 25–35.
13. *Akulenko L. D., Nesterov S. V.* The stability of the equilibrium of a pendulum of variable length. // J. Appl. Math. Mech., 2009. — V. 73 Issue: 6 — P. 642–647.

Получена 03.10.2012