Динамические системы, вып. 27 (2009), 67–80

УДК 519.1

Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции, заданной на комбинаторной конфигурации перестановок

Л.Н. Колечкина

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
Киев, 03680. *E-mail: ludapl@ukr.net*

Аннотация. Рассматривается задача комбинаторной оптимизации на комбинаторной конфигурации перестановок, анализируются методы решения таких задач. Описывается метод локализации значения целевой линейной функции на основании применения теории графов, учитывая свойства и структуру множества перестановок. Обосновывается построение последовательности значений линейной функции, разложение точек перестановок по подграфам графа перестановочного многогранника и их использование для реализации метода.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, комбинаторная конфигурация перестановок, граф перестановочного многогранника, подграф графа, структурированный метод локализации.

1. Введение

В последнее время достаточно распространенными являются задачи комбинаторной оптимизации. Главным образом это обусловлено тем, что на практике многие прикладные задачи описываются моделями, в которых целевая функция определена на комбинаторных конфигурациях. В частности, такие задачи возникают при исследовании многих теоретических и прикладных проблем [1, 5, 7–14]. Расширение применений комбинаторных задач приводит к их усложнению, в частности, к появлению новых или рассмотрению недостаточно изученных комбинаторных моделей [5, 7, 11–14], которые имеют большую размерность, специальную структуру, неточную информацию о значениях и т.п. Решение этих задач связано со значительными трудностями и требует разработки и обоснования новых или модификации известных методов. В этом смысле очень полезным будет применения теории графов.

С помощью теории графов хорошо описываются многие типы комбинаторных задач. При этом графические представления являются не просто иллюстрациями, но и позволяют получать новые подходы к решению, а также результаты. Следует отметить тесную связь результатов о метрических характеристиках графов многогранников с проблемами оценки числа итераций и эффективности алгоритмов симплексного типа в задачах линейного программирования.

Данная работа продолжает исследования работ [2-6] и дает возможность решить более сложную задачу локализации значений линейной функции на перестановках.

В частности, в работе [4] рассмотрен метод упорядочения значений целевой функции на множестве перестановок, который дает возможность построить гамильтонов путь в перестановочном многограннике, в [5] рассматривается задача на графах с учетом повторений элементов перестановки.

В настоящей работе локализуется значение линейной функции на перестановках. Следует отметить, что алгоритм, представленный в данной статье, можно использовать для решения задач на различных комбинаторных конфигурациях при наличии дополнительных ограничений.

2. Основные понятия и определения

При решении комбинаторных задач часто используется такие хорошо известные конструкции из элементов конечного множества, как сочетания, размещения, перестановки и т.п. Уже для этих простейших комбинаторных конструкций возникает необходимость формализации их определения с целью избежать словесных нагромождений и путаницы. С усложнением конструкций такая необходимость становится все более актуальной. Упомянутая формализация может быть осуществлена в большом классе случаев путем введения понятия конфигурации. Дадим это определение. Пусть заданы множества $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, и пусть на Y задан строгий линейный порядок: $Y = y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. Отображение $\varphi : X \to Y$, удовлетворяющее некоторому комплексу ограничений Λ, будем называть *конфигурацией*. Комплекс ограничений Λ, которому удовлетворяет отображение φ, определяет некоторый класс конфигураций, соответствующих условиям на комбинаторные конструкции в рассматриваемой задаче [10].

Следует отметить, что отображение φ можно интерпретировать таким образом: каждому заполнению m предметов в n ячейках ставится во взаимно однозначное соответствие некоторая конфигурация $\varphi : X \to Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, а различимость заполнения точно определяется свойствами конфигурации φ.

Как известно, типичными характеристиками объектов являются так называемые первичные и вторичные спецификации соответствующих им отображений. Можно сказать, что спецификации определяют, в некотором смысле, состав элементов, являющихся образами отображения с учетом повторений этих элементов. Определим конфигурацию как удовлетворяющее комплексу условий Λ однозначное отображение $\varphi : X \to Y$, где $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, Y — конечное множество. Рассмотрим конфигурации σ, для которых всякие ограничения отсутствуют, т.е. $\Lambda = \emptyset$.

Пусть σ — конфигурация, представляющая собой отображения множества $X = \{1, 2, \ldots, m\}$ в множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Конфигурация σ может быть записана в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_m} \end{pmatrix},$$

где $\sigma(j) = a_{i_j}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Иногда удобно конфигурацию σ записывать в виде m-мерного вектора с компонентами из A: $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m))$ или $\sigma = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$.

Дадим определение двух связанных между собой характеристик конфигурации σ, первичной и вторичной спецификации.

Выражение $[\sigma] = [a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \dots, a_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, называется *первичной спецификацией конфигурации* σ, если вектор $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ имеет α_j элементов a_i из множества $A\{j = 1, 2, \dots, n\}$. Число α_j называется *a_i-показателем первичной спецификации σ.*

Если множество A подвергнем преобразованию, состоящему в размножении элемента a_i в α_j в идентичных экземплярах, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, то в результате получим мультимножество A' образов отображения $\sigma : X \to A$. Состав элементов мультимножества A' однозначно определяется вектором $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$. Будем говорить, что мультимножество A' имеет первичную спецификацию $[a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \dots, a_n^{\alpha_n}]$.

Пусть среди чисел $[a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \dots, a_n^{\alpha_n}]$, определяющих первичную спецификацию конфигурации σ имеется β_0 нулей, β_1 единиц, β_2 двоек и т.д. Выражение

$$[[\sigma]] = \left[\left[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}\right]\right],$$
$$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m = n, \qquad \beta_0 + 2\beta_1 + \dots + m\beta_m = m,$$

называется *вторичной спецификацией* конфигурации σ. Число β_j называется j-показателем вторичной спецификации. Иногда 0-показатель вторичной спецификации σ можно опускать, записывая

$$[[\sigma]] = \left[\left[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}\right]\right],$$
$$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m = n, \qquad \beta_0 + 2\beta_1 + \dots + m\beta_m = m,$$

Аналогичным образом можно говорить о том, что мультимножество образов отображения имеет вторичную спецификацию

$$\left[\left[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}\right]\right],$$
$$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m = n, \qquad \beta_0 + 2\beta_1 + \dots + m\beta_m = m,$$

если число элементов множества A' встречающихся в A' i раз, равно β_i ($i = 0, 1, \dots, m$). Множество всевозможных отображений $\sigma\colon X \to A$ будем обозначать A^x. Ясно, что между A^x и m-й декартовой степенью $A^{(m)}$ существует биективное соответствие. Тогда любое мультимножество можно представить в виде первичной и вторичной спецификаций.

Поскольку вектор $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$, соответствующий конфигурации σ, можно рассматривать как упорядоченное мультимножество образов отображения σ, то первичные спецификации σ и A' совпадают. При $m = n$ каждой конфигурации соответствует перестановка, и их число равно $P(n) = n!$.

3. Постановка задачи оптимизации на комбинаторной конфигурации перестановок

В общем виде экстремальную комбинаторную задачу можно сформулировать так: имеется множество из n элементов, на нем задается комбинаторная конфигурация $A = \{\sigma_i\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. (В данном случае под конфигурацией $\sigma_i = a_1, a_2, \ldots, a_n$ мы понимаем перестановки.) На множестве A задается функция $f(x)$. Требуется отыскать экстремум функции $f(x)$ и элементы множества A, которые этот экстремум доставляют.

Сама формулировка экстремальных комбинаторных задач диктует выбор операций, применяемых для их решения. Во-первых, надо уметь делать генерацию множества A и располагать соответствующим множеством значений функции $f(x)$. Во-вторых, надо развить методику сравнения этих значений и выделения из них максимального или минимального. Операция перебора практически редко оказывается осуществимой, так как число возможных комбинаций может быть слишком велико. Трудности, связанные с перебором вариантов и сравнением значений, весьма значительные [8, 9].

Общая схема связи экстремальных комбинаторных задач с методами линейного программирования выглядит примерно так: элементы σ_i интерпретируют, как точки евклидова пространства, чтобы “целевая” функция $f(x)$ стала линейной формой. Рассматривается задача нахождения экстремума этой функции на выпуклой оболочке заданных точек (т. е. на выпуклом многограннике). В самом деле, экстремум линейной формы на многограннике достигается в одной из вершин, которые входят в множество рассматриваемых элементов. Задача же нахождения экстремума линейной формы и есть задача линейного программирования. Особенностью комбинаторных задач при таком сведении останется то, что при нахождении решения следует ограничиваться лишь точками с целочисленными координатами.

Тогда решение комбинаторных экстремальных задач представляет собой перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, множество которых обозначим $P_n(A) = P_n$. Целью является нахождение значения функции $f(x) = \operatorname{extr} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ на конечном подмножестве указанных перестановок. Элементы множества перестановок P_n можно интерпретировать как вершины перестановочного многогранника. В свою очередь перестановочный многогранник можно представить в виде графа $G(P_n)$ [4]. В этом графе вершины представляют собой множество всех перестановок P_n, а две вершины образуют дугу $\overrightarrow{p_1 p_2}$, если $f(p_1) \geq f(p_2)$, $p_1, p_2 \in P_n$ и если перестановка p_2 получена из p_1 с помощью транспозиции двух элементов.

Назовем *подграфом ранга* r графа перестановочного многогранника $G(P_n)$ граф, вершины которого имеют r фиксированных координат.

Известно, что на перестановочном многограннике $G(P_n)$ линейная функция $f(x)$ принимает максимальное значение в перестановке $(1, 2, \ldots, n)$, при упорядочении коэффициентов по возрастанию, а минимальное — в перестановке $(n, \ldots, 2, 1)$. Очевидно, что это свойство сохраняется и для подграфов, образованных подмножеством перестановок, у которых фиксированы последние k элементов. Но для графов многогранников достаточно часто возникает следующая

Задача 1. Найти множество перестановок, в которых значение целевой функции равно заданному значению, то есть

$$x^* = \arg_{x \in P_n} f(x), \tag{1}$$

где $f(x^*) = y$.

Также имеет смысл рассматривать аналогичную задачу, если перестановки, в которых целевая функция принимает заданное значение, существуют не всегда. Тогда выше сформулированная проблема предстанет как

Задача 2. Определить множество пар перестановок $(\underline{x}, \overline{x})$, для которых при заданном y

$$\underline{x} = \arg \min_{f(x)>y} f(x), \qquad \overline{x} = \arg \max_{f(x)<y} f(x). \tag{2}$$

Очевидно, что обе задачи можно решить, если на графе $G(P_n)$ достроить множество дуг между несмежными перестановками, позволяющее пройти по дугам путь от начальной вершины, где $f(x)$ принимает максимальное значение, к конечной, где $f(x)$ принимает минимальное значение, при этом необходимо посетить все остальные вершины графа. Этот путь называется *гамильтоновым.* Если известна последовательность перестановок, через которые он проходит, то с помощью дихотомии гамильтонова пути, вычисляя значения функции в соответствующей перестановке, всегда можно локализовать произвольное значение целевой функции $f(x)$. С точки зрения теории графов, многие комбинаторные задачи оптимизации имеют следующую формулировку: отыскать среди некоторого множества путей L минимальный (или максимальный), т. е. путь, обладающий минимальным (или максимальным) значением λ. В качестве множества L может быть выбрано, например, множество всех гамильтоновых путей. Сформулируем теорему, которая дает возможность определения минимального и максимального пути среди всех простых путей, соединяющих две фиксированные вершины.

Теорема. *Если некоторый путь в графе многогранника $G(P_n)$, соединяющий вершину x уровня m и вершину x' уровня s, является минимальным (максимальным), то его подпуть между вершиной y уровня k и вершиной y' уровня p подграфа r-ранга графа многогранника $G(P_n)$ $(m \leq k < p \leq s)$ также является минимальным (максимальным).*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из утверждения, которое опубликовано в [9] и определения подграфа и его свойств. Как известно, подграфом графа $G(P_n)$ называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат $G(P_n)$, тогда сохраняются и некоторые свойства: если рассматривать путь, соединяющий вершину x уровня m и вершину x' уровня s, который является минимальным или максимальным, то его подпуть между вершиной y уровня k и вершиной y' уровня p $(m \leq k < p \leq s)$ также является минимальным или максимальным соответственно. Для графа перестановочного многогранника $G(P_n)$ это свойство также выполняется. $\square$

Приведенная теорема лежит в основе метода отыскания максимальных путей в графе без контуров и дает возможность при построении алгоритма локализации значения рассмотреть подграфы графа $G(P_n)$. Задача (1), (2) рассматривается на вершинах графа, тогда нахождение соответствующей вершины рассматриваем последовательно, начиная с некоторой начальной, все вершины графа в порядке убывания значений целевой функции в этих вершинах и приписываем каждой вершине число, равное минимальному значению функции $f(x)$. Для отыскания минимальных путей в графах, имеющих контуры, также существуют различные методы. Рассмотрим далее алгоритм метода локализации значения линейной функции на комбинаторных конфигурациях перестановок и его применение для решения задачи (1), (2).

4. Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции

Важную роль играют комбинаторные методы, необходимость в применении которых возникает каждый раз, когда интересуются соответствующими алгоритмами и числом способов расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое расположение определяет комбинаторную конфигурацию, которую можно рассматривать как отображение одного множества в другое с некоторыми ограничениями, определяемыми условиями задачи.

Если ограничения носят сложный характер, то для соответствующих комбинаторных конфигураций необходимо выяснить условия существования и находить методы их конструирования. В данной статье рассматривается алгоритм метода решения на комбинаторных конфигурациях перестановок, хотя на основании общей схемы можно применить его и для решения задач на других комбинаторных конфигурациях.

Общая схема метода состоит в следующем:

1) определяется комбинаторная конфигурация и выбор способа генерирования ее элементов;

2) строится структурный граф многогранника выбранной комбинаторной конфигурации;

3) разбивается структурный граф на подграфы и определяется значения функции в крайних точках подграфов;

4) находится знак разности между смежными конфигурациями и определяется множество решений путем пересечения подмножеств — вершин подграфов.

На комбинаторной конфигурации перестановок алгоритм имеет следующую структуру.

Алгоритм локализации значения линейной функции на перестановках.

Начальный шаг:

1) вводим n — количество элементов перестановки и размерность целевой функции;

2) задаем значения коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ целевой функции $f(x)$;

3) вводим значение элементов множества перестановок: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ причем ввод осуществляется таким образом, чтобы элементы были упорядочены по следующему правилу: $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$;

4) задаем значение целевой функции $y_0 = f(x)$.

Шаг 1: Вычисляем $n!$

Шаг 2: Определяем значение: $b = (n-1)!$, которое характеризует количество точек в структурном графе в каждом подграфе.

Шаг 3: Вычисляем минимальное и максимальное значение заданной целевой функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)_{max} &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1} + c_nx_n, \\ f(x)_{min} &= c_nx_1 + c_{n-1}x_2 + \ldots + c_2x_{n-1} + c_1x_n. \end{aligned}$$

Шаг 4: Строим структурный граф, который имеет n подграфов и по n вершин с двух сторон (слева и справа), а на каждом подграфе — начальную и конечную вершины.

Шаг 5: Определяем значение целевой функции $f(x)$ в точках — начальной и конечной вершинах подграфов $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$.

Шаг 6: Определяем слева в структурном графе множество точек, для которых выполняется условие $f(\overline{x}_i) \geq f(x^0)$, где x^0 точка, для которой $f(x^0) = y^0$, а $\overline{x}_i$, $i \in N_k$, множество точек, значение целевой функции $f(x)$ в которых больше заданного.

Шаг 7: Справа определим множество точек, которые дают значение целевой функции согласно выполнения условия: $f(\underline{x}_j) \leq f(x^0)$, где x^0 — точка, для которой выполняется условие $f(x^0) = y^0$ а $\underline{x}_j$, $j \in N_{n-k}$ множество точек, для которых значение целевой функции $f(x)$ меньше заданного.

Шаг 8: Определяем множество подграфов как множество пересечений, элементы которого удовлетворяют условию, сформулированному на шагах 6,7.

Шаг 9: Формируем множество точек-элементов перестановки удовлетворяющее условие $f(x_0) = y_0$. Если все точки найдены, то есть среди множества подграфов определенном на шаге 8 нет таких, для вершин которых выполнялось бы условие $f(\underline{x}_j) \le y^0 \le f(\overline{x}_i)$, то задача решена. Осуществляется вывод элементов точек перестановки. Иначе переход на следующий шаг.

Шаг 10: Определяем подграф, для которого выполняется условие $f(\underline{x}_j) \le y^0 \le f(\overline{x}_i)$. Фиксируем последнюю координату в точке, вершине подграфа.

Шаг 11: Присваиваем $n := n - 1$. Осуществляем переход на шаг 1.

Следует отметить, что генерация точек, являющихся вершинами перестановок в крайних вершинах подграфов, осуществляется путем транспозиции одного элемента, причем из $n!$ элементов необходимо сгенерировать на начальном этапе только $2n$.

Алгоритм был программно реализован, проведены численные эксперименты. Ниже приведен численный пример изложенного алгоритма.

Дано: а) функция $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, где $n = 5$, тогда $f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 11x_5$; б) определено значение функции $f(x^*) = 120$; в) элементы множества перестановки (1 2 3 4 5).

Найти: Точки — вершины перестановочного многогранника x^*, в которых достигается заданное значение целевой функции.

Решение: В данном примере коэффициенты целевой функции упорядочены по возрастанию, но в общем случае, если коэффициенты не упорядочены, находим преобразование для упорядочения коэффициентов целевой функции:

$$f(x) = \tilde{c_1}x_1 + \ldots + \tilde{c_n}x_n, \quad \tilde{c_1} \le \tilde{c_2} \le \ldots \le \tilde{c_n},$$

то

$$\tilde{c_i} = c_{\pi^{-1}}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{c_1} = c_3; \quad \tilde{c_2} = c_5; \quad \tilde{c_3} = c_1; \quad \tilde{c_4} = c_6; \quad \tilde{c_5} = c_4.$$

Строим граф для $n = 5$, в котором пять подграфов. Всего вершин — $5! = 120$, по 24 на каждом подграфе. Определим максимальное и минимальное значение линейной функции:

$$\max := 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 11 \cdot 5 = 131,$$
$$\min := 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 97.$$

Согласно алгоритма, определим крайние точки подграфов и находим в них значения целевой функции.

Изобразим это на рисунке:

x_1	$=$	$(1,2,3,4,5)$	131	x_{24}	$=$	$(4,3,2,1,5)$ 114
x_{25}	$=$	$(1,2,3,5,4)$	129	x_{48}	$=$	$(5,3,2,1,4)$ 107
x_{49}	$=$	$(1,2,4,5,3)$	126	x_{72}	$=$	$(5,4,2,1,3)$ 102
x_{73}	$=$	$(1,3,4,5,2)$	121	x_{96}	$=$	$(5,4,3,1,2)$ 99
x_{97}	$=$	$(2,3,4,5,1)$	114	x_{120}	$=$	$(5,4,3,2,1)$ 97

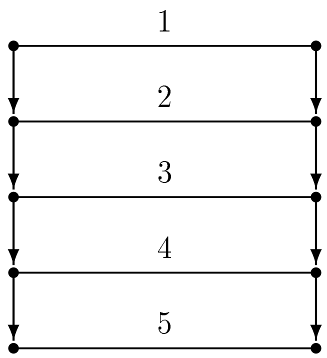

Рис.1. Структурный граф перестановочного многогранника.

На рис. 1 изображен структурный граф, который содержит пять пронумерованных подграфов ранга $r = 1$, где отмечены крайние точки подграфов и значения целевой функции в них. Слева находятся вершины, в которых достигается максимальные значения целевой функции на подграфе, справа — вершины, в которых достигается минимальное значение функций. Следует отметить, что значения функции определяются подстановкой точки в целевую функцию вида

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 11x_5.$$

Крайние точки на рис.1 определены согласно представления графа перестановочного многогранника. Выбор соответствующей структуры данных для представления графов имеет принципиальное влияние на эффективность алгоритмов. Покажем способ представления и кратко разберем его. Так как в условии задачи определяется точка, в которой достигается заданное значение целевой функции, а согласно рис.1 таких крайних точек нет, соответственно, необходимо определить интервал, в котором может находиться такая вершина, что обеспечит заданное значение. Соответственно, поиск значения осуществляется на следующем, выше стоящем подграфе ранга $r = 1$, для точек которого значения находится в пределах $99 \leq f(x) \leq 121$. Для этого подграфа характерным есть условие, последняя координата точек — вершин подграфа равна $x_5 = 2$. Далее рассмотрим в виде таблице значения функции в вершинах подграфа, зафиксировав последнюю координату $x_5 = 2$:

Таблица 1.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$
1	3	4	5	2	**121**	4	3	1	5	2	**109**
1	3	5	4	2	**120**	5	3	1	4	2	**104**
1	4	5	3	2	**117**	5	4	1	3	2	**101**
3	4	5	1	2	**107**	5	4	3	1	2	**99**

Следующий шаг: согласно таблице 1, выделим точку $x_1^0 = (1, 3, 5, 4, 2)$, в которой достигается необходимое значение целевой функции. Отбрасываем три нижних подграфа, рассматриваем верхний подграф ранга $r = 2$, для точек, в которых последние две координаты равны: $x_4 = 5$; $x_5 = 2$, так как в отброшенных не найдутся точки, которые удовлетворяют условию $f(x) = 120$. Определим значения функции $f(x)$ в крайних точках подграфа:

Таблица 2.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$
1	3	4	5	2	**121**	3	1	4	5	2	**117**
1	4	3	5	2	**119**	4	1	3	5	2	**113**
3	4	1	5	2	**111**	4	3	1	5	2	**109**

Далее, делаем аналогичную процедуру сравнения полученных значений целевой функции в крайних точках с заданным значением $f(x) = 120$ согласно условию задачи и рассмотрим верхний подграф. На этом подграфе нет вершин, удовлетворяющих условию задачи.

Снова, определяем значения целевой функции $f(x)$ в точках — крайних вершинах подграфа структурного графа рис.1, в котором $x_5 = 3$.

Таблица 3.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$
1	2	4	5	3	**126**	4	2	1	5	3	**114**
1	2	5	4	3	**125**	5	2	1	4	3	**109**
1	4	5	2	3	**119**	5	4	1	2	3	**103**
2	4	5	1	3	**114**	5	4	2	1	3	**102**

Из таблицы 3 необходимо выбрать и рассмотреть два верхних подграфа ранга $r = 2$, для каждого из которых выполняется условия соответственно: а) $x_4 = 5$, $x_5 = 3$, б) $x_4 = 4$, $x_5 = 3$.

Рассмотрим их в виде следующей таблицы.

Таблица 4.

$x_4 = 5,\ x_5 = 3$							$x_4 = 4,\ x_5 = 3$						
c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$	c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$
	1	2	4	5	3	**126**		1	2	5	4	3	**125**
	1	4	2	5	3	**122**		1	5	2	4	3	**119**
	2	4	1	5	3	**118**		2	5	1	4	3	**115**
	2	1	4	5	3	**124**		2	1	5	4	3	**115**
	4	1	2	5	3	**116**		5	1	2	4	3	**111**
	4	2	1	5	3	**114**		5	2	1	4	3	**109**

Рассмотрим далее подграф структурного графа рис.1, в котором значение последней координаты равно $x_5 = 4$.

Таблица 5.

подграф структурного графа, в котором $x_5 = 4$													
c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$	c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$
	1	2	3	5	4	**129**		3	2	1	5	4	**121**
	1	2	5	3	4	**127**		5	2	1	3	4	**111**
	1	3	5	2	4	**124**		5	3	1	2	4	**108**
	2	3	5	1	4	**119**		5	3	2	1	4	**107**

На основании расчетов таблицы 5 рассмотрим разложение точек по подграфам, в которых значение последней и предпоследней координат есть постоянное и равны соответственно: а) $x_4 = 3$, $x_5 = 4$; б) $x_4 = 2$, $x_5 = 4$, и определим значения целевой функции в крайних точках этих подграфов.

Таблица 6.

$x_4 = 3,\ x_5 = 4$							$x_4 = 2,\ x_5 = 4$						
c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$	c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$
	1	2	5	3	4	**127**		1	3	5	2	4	**124**
	1	5	2	3	4	**121**		1	5	3	2	4	**120**
	2	5	1	3	4	**117**		3	5	1	2	4	**112**
	2	1	5	3	4	**125**		3	1	5	2	4	**120**
	5	1	2	3	4	**113**		5	1	3	2	4	**112**
	5	2	1	3	4	**111**		5	3	1	2	4	**108**

Получим две точки — решения задачи, далее рассмотрим подграф структурного графа, в котором $x_5 = 5$ и значения функции в его крайних точках.

Таблица 7.

$x_5 = 5$					$f(x)$						$f(x)$
1	2	3	4	5	**131**	3	2	1	4	5	**123**
1	2	4	3	5	**130**	4	2	1	3	5	**118**
1	3	4	2	5	**127**	4	3	1	2	5	**115**
2	3	4	1	5	**122**	4	3	2	1	5	**114**

На основании таблицы 7 целесообразно далее рассматривать три нижних подграфа ранга $r = 2$.

Таблица 8.

$x_4 = 3,\ x_5 = 5$							$x_4 = 2,\ x_5 = 5$							$x_4 = 1,\ x_5 = 5$						
c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$	c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$	c_i	4	6	8	9	11	$f(x)$
	1	2	4	3	5	**130**		1	3	4	2	5	**127**		2	3	4	1	5	**122**
	1	4	2	3	5	**126**		1	4	3	2	5	**125**		2	4	3	1	5	**120**
	2	4	1	3	5	**122**		3	4	1	2	5	**117**		3	4	2	1	5	**116**
	2	1	4	3	5	**128**		3	1	4	2	5	**123**		3	2	4	1	5	**120**
	4	1	2	3	5	**120**		4	1	3	2	5	**119**		4	2	3	1	5	**116**
	4	2	1	3	5	**118**		4	3	1	2	5	**115**		4	3	2	1	5	**114**

На основании выше изложенных операций согласно алгоритма, получим решения, которые доставляют значения функции $f(x) = 120$.

Решениями задачи, которые удовлетворяют условие $f(x) = 120$ будут точки:

Таблица 9.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$
1	3	5	4	2	120
1	5	3	2	4	120
4	1	2	3	5	120
3	1	5	2	4	120
2	4	3	1	5	120
3	2	4	1	5	120

Можно записать в следующем виде: $x_1^0 = (1, 3, 5, 4, 2)$, $x_2^0 = (1, 5, 3, 4, 2)$, $x_3^0 = (3, 1, 5, 2, 4)$, $x_4^0 = (4, 1, 2, 3, 5)$, $x_5^0 = (2, 4, 3, 1, 5)$, $x_6^0 = (3, 2, 4, 1, 5)$.

Следует отметить, что значения функции на графе вверх возрастает и вниз убывает с одинаковым интервалом при равномерном распределении значений коэффициентов. Данный пример объясняет принцип работы алгоритма и дает возможность понять и оценить его численную эффективность.

5. Заключение

Исследованы сложные комбинаторные задачи на комбинаторной конфигурации перестановок. Рассмотрены некоторые свойства допустимой области евклидовой комбинаторной задачи с использованием теории графов и комбинаторных конфигураций. Сформулированная задача и предложенный алгоритм для ее решения на основе метода локализации значения линейной функции на комбинаторной конфигурации перестановок представляют интерес в дальнейшем для построения и развития структурированного метода для решения задач на различных комбинаторных конфигурациях при наличии дополнительных сложных ограничений и условий.

Список цитируемых источников

1. *Баранов В.И., Стечкин Б.С.* Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. — М.: Физматлит, 2004. — 238 с.
2. *Донец Г.А.* Алгоритмы раскраски плоских графов // Теорія оптимальних рішень. — 2006. — Вып. 5. — С. 134–143.
3. *Донец Г.А., Шулинок И.Э.* О сложности алгоритмов поиска в глубину на модульных графах // Теорія оптимальних рішень. — 2002. — Вып. 1. — С. 105–110.
4. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — Вып. 2. — С. 50–61.
5. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах // Управляющие системы и машины. — 2009. — Вып. 4. — С. 34–42.
6. *Донец Г.А., Самер И.М., Альшаламе.* Решение задачи о построении линейной мозаики // Теорія оптимальних рішень. — 2005. — Вып. 4. — С. 15–24.
7. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — Київ.: Наукова думка, 2005. — 118 с.
8. *Липский В.* Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988. — 213 с.
9. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1985. — 308 с.
10. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Изд-во “Наука”, 1977. — 320 с.
11. *Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н.* Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — Вып. 3. — С. 158–172.

12. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев.: Наукова думка, 1981. — 287 с.
13. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения и исследования. — Киев.: Наукова думка, 2003. — 260 с.
14. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев.: Наукова думка, 1986. — 265 с.

Получена 30.09.2009