Динамические системы, вып. 28 (2010), 63–68

УДК 517.9

Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы

Т. А. Гурина, И. А. Дорофеев
Московский авиационный институт (технический университет),
РОССИЯ, Москва 125993. *E-mail: gurina_mai@mail.ru, softcat@mail.ru*

Аннотация. В системе дифференциальных уравнений Шаповалова, являющейся моделью устойчивости средней фирмы, найдены две гомоклинические траектории седло-узла (гомоклиническая бабочка), разрушение которых является важнейшей бифуркацией гомоклинического каскада, приводящего к образованию странного аттрактора. Несколькими преобразованиями система приводится к виду, в котором гомоклинической петле соответствует гетероклиническая траектория, а затем проверяются условия стыковки частей этой траектории, выходящих из различных особых точек со специальными начальными условиями. Приведены результаты доказательных вычислений при конкретных параметрах системы.

Ключевые слова: система Лоренца, система Шаповалова, седло-узел, гомоклинический контур, гомоклинический каскад бифуркаций, странный аттрактор, переход к динамическому хаосу.

1. Система Шаповалова

В статье Шаповалова В.И. и соавторов [3] построена синергетическая модель средней фирмы, описывающая эволюцию величин кредита x, капитала y и численности сотрудников z и обладающая возможностью саморегуляции с помощью управляющих параметров α, β, γ, δ, μ, $\sigma > 0$, являющихся бифуркационными. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, похожую на систему Лоренца [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \delta y, \\ \dot{y} = \mu(x+y) - \beta xz, \\ \dot{z} = -\gamma z + \alpha xy. \end{cases} \tag{1.1}$$

Устойчивой работе фирмы соответствует выход фазовой траектории системы (1.1) на устойчивое предельное множество — аттрактор (неподвижную точку или предельный цикл). Проведенные авторами [3] численные эксперименты показали, что при изменении бифуркационного параметра $\gamma \in [0;\ 10]$ и $\alpha = 5$, $\beta = 8$, $\delta = 1, \mu = 2.1$, $\sigma = 4.1$ в системе (1.1) может возникнуть хаотический аттрактор, напоминающий аттрактор Лоренца. Ему предшествует каскад бифуркаций удвоения. Для проверки существования у системы Шаповалова (1.1) странного аттрактора типа Лоренца необходимо убедиться в наличии гомоклинического каскада бифуркаций [1].

Определение 1. ([2, с.112]) Полным (неполным) гомоклиническим каскадом бифуркаций называется каскад бифуркаций рождения устойчивых предельных циклов из единственного устойчивого предельного цикла при изменении значений бифуркационного параметра вдоль прямой, проходящей в пространстве параметров через точку (вблизи точки) существования гомоклинического контура.

2. Существование седло-узловой особой точки

Найдем особые точки системы (1.1) из условий $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$:

$$\begin{cases} -\sigma x + \delta y = 0, \\ \mu(x+y) - \beta xz = 0, \\ -\gamma z + \alpha xy = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

При любых $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \sigma > 0$ существуют три особые точки:

$$O_0(0,\ 0,\ 0), \quad O_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\alpha\beta\sigma}},\ \pm\sqrt{\frac{\gamma\mu\sigma(\delta+\sigma)}{\alpha\beta\delta^2}},\ \frac{\mu(\delta+\sigma)}{\beta\delta}\right) \tag{2.2}$$

В точке $O_0(0,\ 0,\ 0)$ получим матрицу линеаризации:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

и характеристическое уравнение:

$$\det(A_0 - \lambda E) = -(\lambda+\gamma)(\lambda^2 - (\mu-\sigma)\lambda - \mu(\sigma+\delta)) = 0. \tag{2.4}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{gathered} \lambda_1 = \frac{\mu-\sigma}{2} - \sqrt{\frac{(\mu-\sigma)^2}{4} + \mu(\delta+\sigma)} < 0, \\ \lambda_2 = \frac{\mu-\sigma}{2} + \sqrt{\frac{(\mu-\sigma)^2}{4} + \mu(\delta+\sigma)} > 0, \quad \lambda_3 \ = -\gamma < 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что точка $O_0(0,0,0)$ — седло-узел с двумерным устойчивым инвариантным многообразием W^s и одномерным неустойчивым инвариантным многообразием W^u. Из существования в системе седло-узла вытекает возможность образования в ней гомоклинических контуров особой точки и связанных с ними каскадов бифуркаций.

3. Поиск гомоклинических траекторий седло-узла

Будем искать две гомоклинические траектории седло-узла $O_0(0,\ 0,\ 0)$ (гомоклиническую бабочку), разрушение которых является важнейшей бифуркацией гомоклинического каскада.

Аналогично [1], приведем систему к специальному виду, в котором гомоклинической петле соответствует гетероклиническая траектория. Сначала применим к исходной системе (1.1) преобразование $w = -\sigma x + \delta y$. Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{w} = (\mu - \sigma)w + (\mu(\delta + \sigma) - \beta\delta z)x, \\ \dot{z} = \alpha\sigma x^2/\delta + \alpha w x/\delta - \gamma z. \end{cases} \tag{3.1}$$

Далее, заменой $w = ux$ приводим систему к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = xu, \\ \dot{u} = -(u^2 + (\sigma - \mu)u - \mu(\delta + \sigma)) - \beta\delta z, \\ \dot{z} = \alpha x^2(\sigma + u)/\delta - \gamma z. \end{cases} \tag{3.2}$$

И, наконец, после последней замены $x^2 = v$ получим уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2vu, \\ \dot{u} = -(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z, \\ \dot{z} = \alpha v(\sigma + u)/\delta - \gamma z, \end{cases} \tag{3.3}$$

Система (3.3) имеет две особые точки $P_1(u_1,\ 0,\ 0)$, $P_2(u_2,\ 0,\ 0)$, где u_1 и u_2 — корни уравнения $u^2 + (\sigma - \mu)u - \mu(\delta + \sigma) = 0$:

$$u_{1,2} = \frac{\mu - \sigma \mp \sqrt{(\sigma + \mu)^2 + 4\delta\mu}}{2}, \tag{3.4}$$

которые совпадают с корнями λ_1 и λ_2 — характеристического уравнения (2.4) в окрестности точки $O_0(0,\ 0,\ 0)$.

Далее, переходим к системе двух уравнений, исключая время:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{du} = \dfrac{2vu}{-(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z}, \\ \dfrac{dz}{du} = \dfrac{\alpha v(\sigma + u)/\delta - \gamma z}{-(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Раскладывая в ряды Тейлора числители и знаменатели правых частей системы (3.5) по степеням $(u - u_2)$ и вычисляя пределы отношений при $u \to u_2$, найдём, что в точке $P_2(u_2,\ 0,\ 0)$ имеют место равенства:

$$v'(u_2) = \frac{2v'(u_2)u_2}{u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2)}, \quad z'(u_2) = \frac{\alpha v'(u_2)(u_2 + \sigma)/\delta - \gamma z}{u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2)}. \tag{3.6}$$

Из первого уравнения (3.6) при условии $v'(u_2) \neq 0$ получаем, что:

$$u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2) = 2u_2. \tag{3.7}$$

Следовательно,

$$z'(u_2) = \frac{u_1 - 3u_2}{\beta\delta}, \quad v'(u_2) = \frac{\delta(2u_2 + \gamma)z'(u_2)}{\alpha(u_2 + \sigma)} = \frac{(2u_2 + \gamma)(u_1 - 3u_2)}{\alpha\beta(u_2 + \sigma)}. \tag{3.8}$$

Раскладывая в ряды Тейлора числители и знаменатели правых частей системы (3.5) по степеням $(u - u_1)$ и вычисляя пределы отношений при $u \to u_2$, найдём равенства в точке $P_1(u_1,\ 0,\ 0)$:

$$v'(u_1) = \frac{2v'(u_1)u_1}{u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1)}, \quad z'(u_1) = \frac{\alpha v'(u_1)(u_1 + \sigma)/\delta - \gamma z'(u_1)}{u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1)}. \tag{3.9}$$

Из второго уравнения (3.9) при условии $v'(u_1) = 0$ получаем:
$u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1) = -\gamma$, следовательно:

$$z'(u_1) = \frac{u_2 - u_1 + \gamma}{\beta\delta}. \tag{3.10}$$

Для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ интегрируем систему (3.5) при фиксированных параметрах α, β, γ, δ, μ, σ на отрезке $[0,\ u_2 - \varepsilon]$ с начальными условиями на правом конце

$$v(u_2 - \varepsilon) = -v'(u_2)\varepsilon, \quad z(u_2 - \varepsilon) = -z'(u_2)\varepsilon \tag{3.11}$$

и получаем значения $v(0+)$, $z(0+)$ на левом конце отрезка $u = 0$. Затем интегрируем систему (3.5) на отрезке $[u_1 + \varepsilon,\ 0]$ с начальными условиями

$$v(u_1 + \varepsilon) = (k\varepsilon)^{-2u_1/\gamma}, \quad z(u_1 + \varepsilon) = z'(u_1)\varepsilon \tag{3.12}$$

и получаем значения $v(0-)$, $z(0-)$ на правом конце отрезка $u = 0$.

По условию стыковки частей гетероклинической траектории системы (3.5) при $u = 0$ значения $v(0+)$ и $z(0+)$ должны отличаться от значений $v(0-)$ и $z(0-)$ на величины порядка $O(\varepsilon)$ для любого достаточно малого ε и подобранной константы $k \in (0,\ 1)$. Тогда существование гетероклинической кривой точек $P_1(u_1,\ 0,\ 0)$, $P_2(u_2,\ 0,\ 0)$ системы (3.5), а значит и гомоклинической траектории седло-узла $O_0(0,\ 0,\ 0)$ системы (1.1) при данных параметрах α, β, γ, δ, μ, σ доказано.

4. Результаты доказательных вычислений

Расчеты проводились в системе Maple 12 методом Рунге-Кутты 7-8 порядка. На Рис. 1. и Рис. 2. приведены части гетероклинической траектории системы (3.5) при параметрах системы:

$$\alpha = 4,\ \beta = 8,\ \gamma = 2.3345,\ \delta = 1,\ \mu = 2.1,\ \sigma = 4.1$$

и расчетных параметрах $\varepsilon = 10^{-5}$ и $k = 0.694209$.

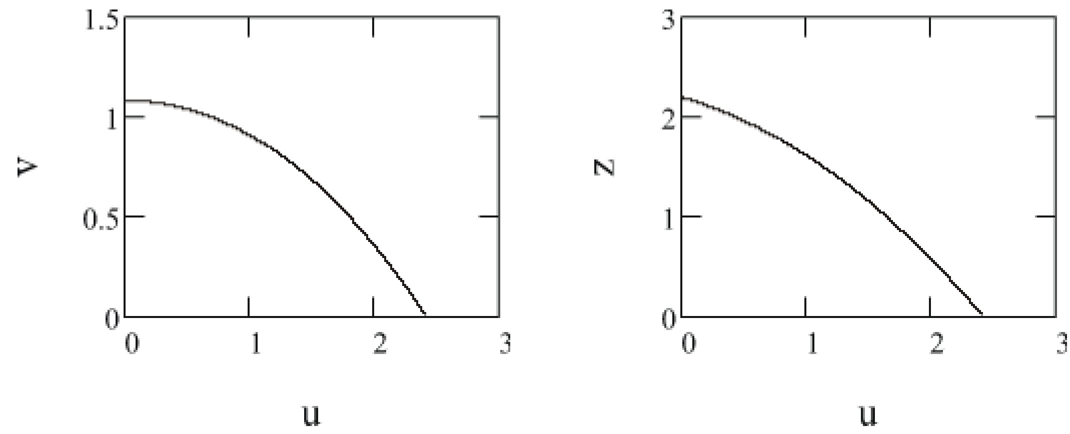

Рис. 1. Гетероклиническая кривая системы (3.5) на отрезке $[0,\ u_2 - \varepsilon]$.

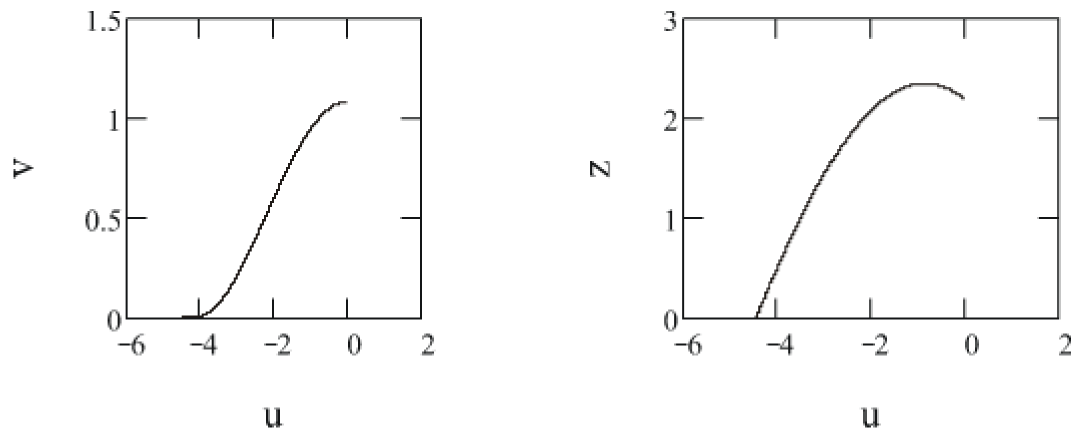

Рис. 2. Гетероклиническая кривая системы (3.5) на отрезке $[u_1 + \varepsilon,\ 0]$.

Условия стыковки частей гетероклинической траектории, а значит и существования гомоклинической траектории седло-узла $O_0(0,\ 0,\ 0)$ системы (1.1) удовлетворяются. Особая точка $O_0(0,\ 0,\ 0)$ имеет и вторую, симметричную гомоклиническую траекторию. Таким образом, система Шаповалова имеет гомоклиническую бабочку седло-узла (Рис. 3.).

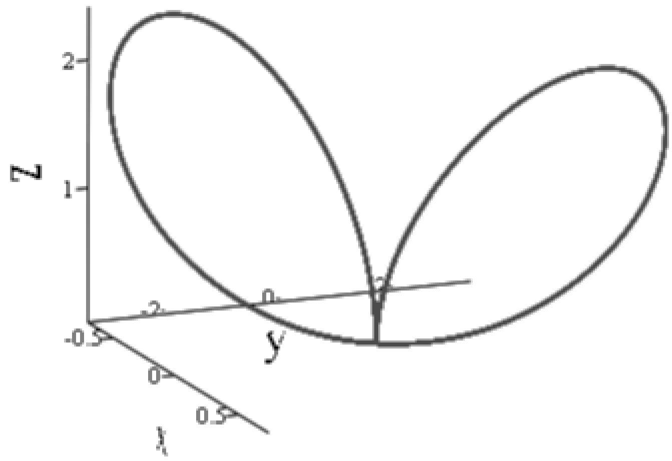

Рис. 3. Гомоклиническая бабочка системы Шаповалова.

Список цитируемых источников

1. *Калошин Д.А.* О построении бифуркационнной поверхности гомоклинической бабочки в системе Лоренца // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1564–1565.
2. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. — М.: УРСС, 2004. — 320 с.
3. *Шаповалов В.И., Каблов В.Ф., Башмаков В.А., Авакумов В.Е.* Синергетическая модель устойчивости средней фирмы // Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. — М.: Физматлит, 2004. — С. 454–464.

Получена 10.06.2010