Динамические системы, вып. 23 (2007), 47–62

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9:532

Нормальные колебания вращающегося упругого тела, заполненного идеальной баротропной жидкостью

Д. А. Закора

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: dmitry_@crimea.edu*

Аннотация. В работе исследована спектральная задача о нормальных колебаниях вращающегося изотропного упругого тела, заполненного идеальной баротропной жидкостью. В начале статьи приведено краткое описание близких работ, а также постановка задачи. Затем выводится и исследуется квадратичный операторный пучок, соответствующий спектральной задаче. Для этого пучка изучены вопросы локализации, дискретности и асимптотики спектра. Доказано утверждение о двукратной полноте с дефектом для системы собственных и присоединенных элементов, получено утверждение о существенном спектре задачи.

1. Постановка задачи

Спектральные задачи о нормальных колебаниях идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей вращающееся или неподвижное упругое тело в близкой постановке изучались в [1, 2, 3]. В этих работах предполагалось, что на систему не действует гравитационное поле (т.е. система находится в невесомости), а также отсутствует закрепление упругого тела. При этом возникают самосопряженные квадратичные операторные пучки.

Если система не вращается (см. [2]), то установлено , что спектр соответствующей задачи чисто мнимый, дискретный и с предельной точкой на бесконечности. Система собственных и присоединенных элементов образует двукратно полную систему в некотором гильбертовом пространстве.

Если система равномерно вращается (см. [1], [3]), то дополнительно возникает отрезок чисто мнимого существенного спектра, связанный с внутренними инерционными волнами в жидкости. При этом уже не удается установить двукратную полноту системы собственных и присоединенных элементов, отвечающих точкам дискретной части спектра, а только двукратную полноту с конечным дефектом в некотором гильбертовом пространстве.

В настоящей работе исследуется система, находящаяся в гравитационном поле и закрепленная на части упругого тела. Оказывается, что учет гравитационного поля приводит к возникновению несамосопряженных операторов, приводящих некомпактным возмущениям и несимметрии в соответствующем операторном пучке. Однако и при этом удается установить наличие в задаче отрезка существенного спектра, свойство дискретности остальной части спектра, асимптотику спектра, а также двукратную полноту с дефектом для системы собственных и присоединенных элементов в некотором гильбертовом пространстве. К сожалению, возникающее несимметричное возмущение не позволяет установить, что весь спектр задачи лежит в правой замкнутой полуплоскости. Этот факт связан с устойчивостью системы и, по-видимому, имеет место в настоящей задаче.

Приведем постановку задачи о малых движениях изучаемой системы (см. [4]). Рассмотрим упругое тело, равномерно вращающееся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Будем считать, что тело занимает область $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ и содержит в себе полость $\Omega_0 \subset \Omega_1$, целиком заполненную идеальной неоднородной жидкостью. Обозначим через $\Gamma_1 \cup S$ внешнюю границу области Ω_1; при этом будем считать, что упругое тело закреплено на границе S. Поверхность, разделяющую упругое тело и жидкость, обозначим через Γ_0, то есть $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$, $\partial\Omega_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup S$. Через $\vec{n}_0$ и $\vec{n}_1$ обозначим единичные векторы, нормальные к границам $\partial\Omega_0$, $\partial\Omega_1$ и направленные вне областей Ω_0 и Ω_1 соответственно.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с упругим телом, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω_0. В этом случае равномерная скорость вращения системы запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать также, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Обозначим поле смещений в упругом теле через $\vec{u}(t,x)$ $(x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega_1)$, а плотность упругого тела через $\rho_1(x)$. Будем считать дополнительно, что тело изотропно, в этом случае тензор напряжения этого тела имеет вид

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda_L\delta_{ij}\mathrm{div}\vec{u} + \mu_L\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (i,j = 1,2,3), \tag{1.1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а λ_L и μ_L — коэффициенты Ляме.

Обозначим поле смещений в жидкости в подвижной системе координат через $\vec{w}(t,x)$ $(x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega_0)$. Пусть $p(t,x)$ — динамическое давление (отклонение полного давления от равновесного), $\rho(t,x)$ — динамическая плотность жидкости (отклонение полной плотности от плотности $\rho_0 = \mathrm{const}$ в состоянии относительного равновесия).

Уравнения малых (линейных) движений этой системы в подвижной системе координат с учетом состояния жидкости записываются в следующем виде (см. [4]):

$$\begin{gathered}
\rho_1(x)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + L\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S), \quad \sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma_1), \\
\rho_0\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} - 2\omega_0\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}\times\vec{e}_3) = -\nabla p - \rho g\vec{e}_3 \ (\text{в } \Omega_0), \quad \rho + \rho_0 \mathrm{div}\vec{w} = 0 \ (\text{в } \Omega_0), \\
\vec{w}\cdot\vec{n}_0 = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma_0), \quad \sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = -p\vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma_0), \quad p(t,x) = a_\infty^2(x)\rho(t,x),
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $a_\infty^2(x)$ — квадрат скорости звука в неоднородной жидкости, а векторный оператор L определяется следующим образом: $(L\vec{u})_i := -\sum_{j=1}^3 \partial\sigma_{ij}(\vec{u})/\partial x_j$. Рассматривая нормальные колебания изучаемой системы, то есть движения вида

$$\vec{u}(t,x) = e^{-\lambda t}\vec{u}(x), \ \vec{w}(t,x) = e^{-\lambda t}\vec{w}(x), \ \rho(t,x) = e^{-\lambda t}\rho(x), \ p(t,x) = e^{-\lambda t}p(x),$$

придем к спектральной задаче относительно спектрального параметра λ:

$$\begin{gathered}
\lambda^2\rho_1(x)\vec{u} + L\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S), \quad \sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma_1), \\
\lambda^2\rho_0\vec{w} + 2\omega_0\rho_0\lambda(\vec{w}\times\vec{e}_3) = -\nabla p - \rho g\vec{e}_3 \ (\text{в } \Omega_0), \quad \rho + \rho_0\mathrm{div}\vec{w} = 0 \ (\text{в } \Omega_0), \\
\vec{w}\cdot\vec{n}_0 = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma_0), \quad \sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = -p\vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma_0), \quad p(x) = a_\infty^2(x)\rho(x).
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Эта задача и будет предметом исследования в настоящей работе.

2. Исследование спектральной задачи

2.1. Проектирование уравнений. Вспомогательные операторы и их свойства

Для перехода к системе операторных уравнений в изучаемой задаче (1.3) применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [5]. Для этого воспользуемся разложением Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_0)$ в ортогональную сумму (см. [5], с. 103):

$$\begin{gathered}
\vec{L}_2(\Omega_0) = \vec{J}_0(\Omega_0) \oplus \vec{G}(\Omega_0), \quad \vec{G}(\Omega_0) := \{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_0) | \ \vec{v} = \nabla\Phi, \ \int_{\Gamma_0}\Phi\,d\Gamma_0 = 0\}, \\
\vec{J}_0(\Omega_0) := \{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_0) | \ \mathrm{div}\vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega_0), \ v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{на } \Gamma_0)\}.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь операции $\mathrm{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [5], с. 100–102. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\vec{L}_2(\Omega_0)$ на $\vec{J}_0(\Omega_0)$ и $\vec{G}(\Omega_0)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\vec{w}$ в виде:

$$\vec{w} = \vec{v} + \nabla\Phi, \quad \text{где} \quad \vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega_0), \quad \nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega_0). \tag{2.2}$$

Подставим представление (2.2) в уравнение для идеальной жидкости из (1.3) и применим к его правой и левой частям ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (2.1). Из полученных соотношений можно исключить функции $p(x)$ и $\rho(x)$, а также преобразовать граничные условия (см. [4]). В результате придем к следующей спектральной задаче:

$$\begin{gathered}
\lambda^2\rho_0\vec{v} - 2\omega_0\rho_0 i\lambda\Big[iP_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + iP_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = g\rho_0 P_0(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi) \text{ (в } \Omega_0),\\
\lambda^2\rho_0\nabla\Phi - 2\omega_0\rho_0 i\lambda\Big[iP_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + iP_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] =\\
= -\Big[-\nabla(\rho_0 a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big] + g\rho_0 P_G(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi) \text{ (в } \Omega_0), \qquad (2.3)\\
\lambda^2\rho_1(x)\vec{u} + L\vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \vec{0} \text{ (на } \Gamma_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S),\\
\sigma(\vec{u})\vec{n}_1 = \rho_0 a_\infty^2(x)(\mathrm{div}\nabla\Phi)\vec{n}_1 \text{ (на } \Gamma_0), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1 \text{ (на } \Gamma_0).
\end{gathered}$$

Введем некоторые пространства и операторы (см. [4]). Определим гильбертово пространство $H := \vec{G}(\Omega_0)\oplus\vec{L}_2(\Omega_1)$, состоящее из пар $\psi := (\nabla\Phi;\vec{u})^t$ (здесь символ t обозначает операцию транспонирования), где $\nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega_0)$, $\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega_1)$. Скалярное произведение и норма в H определяются следующим образом:

$$(\psi_1,\psi_2)_H := \int_{\Omega_0}\nabla\Phi_1\cdot\overline{\nabla\Phi_2}\,d\Omega_0 + \int_{\Omega_1}\vec{u}_1\cdot\overline{\vec{u}_2}\,d\Omega_1, \quad \|\psi\|_H^2 = (\psi,\psi)_H.$$

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Omega_0)\oplus H$, состоящее из пар $\xi := (\vec{v};\psi)^t$, где $\vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega_0)$, $\psi\in H$. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$(\xi_1,\xi_2)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega_0}\vec{v}_1\cdot\overline{\vec{v}_2}\,d\Omega_0 + (\psi_1,\psi_2)_H, \quad \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = (\xi,\xi)_{\mathcal{H}}.$$

Введем операторы $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ и операторный блок $\mathcal{S}$, действующий в $\mathcal{H}$, следующим образом:

$$\mathcal{S}\xi := \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2}\\ S_{2,1} & S_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \psi\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} iP_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\\ (iP_G(\vec{v}\times\vec{e}_3);0)^t & (iP_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3);0)^t\end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Лемма 1. *(см. [4]) Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathcal{H}$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$; более того, $\|\mathcal{S}\|=1$. Спектр оператора $S_{1,1}$ существенный и заполняет отрезок $[-1,1]$ (см. [6]): $\sigma(S_{1,1}) = \sigma_{ess}(S_{1,1}) = [-1,1]$ (здесь через $\sigma_{ess}(S_{1,1})$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора $S_{1,1}$).*

Будем считать далее, что функция $a_\infty^2(x)$ непрерывно дифференцируема по пространственным переменным, граница Γ_0 области Ω_0 — класса C^2, а Γ_1 и S — липшицевы. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *(см. [4]) Введем пространство H_A связанных пар $\psi = (\nabla\Phi;\vec{u})^t$:*
$H_A := \{(\nabla\Phi;\vec{u})^t|\nabla\Phi\in\vec{W}_2^1(\Omega_0),\ \vec{u}\in\vec{W}_2^1(\Omega_1),\ \partial\Phi/\partial n_0 = -\vec{u}\cdot\vec{n}_1$ *(на* $\Gamma_0),\ \vec{u}=\vec{0}$ *(на* $S)\}$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$((\nabla\Phi_1;\vec{u}_1)^t,(\nabla\Phi_2;\vec{u}_2)^t)_A := \rho_0\int_{\Omega_0} a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi_1\mathrm{div}\nabla\Phi_2\,d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} E(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\,d\Omega_1,$$

$$\text{где}\quad E(\vec{u},\vec{v}) := \lambda_L\mathrm{div}\vec{u}\,\mathrm{div}\vec{v} + \frac{\mu_L}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Здесь λ_L и μ_L — коэффициенты Ляме (см. (1.1)*). Пространство H_A является гильбертовым; оно компактно вложено в пространство H: $H_A \subset\!\!\to\!\!\subset\!\!\to H$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(H_A;H)$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в H (см. [5], с. 32), обладает дискретным спектром ($A^{-1}\in\mathfrak{S}_p(H)$, при некотором $p=p_A\in(0,+\infty)$). Для каждого элемента $\psi=(\nabla q;\vec{v})^t\in H$ существует и единственно обобщенное решение задачи*

$$\begin{aligned}
&-\rho_0\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi) = \nabla q\ (\textit{в}\ \Omega_0),\quad L\vec{u}=\vec{v}\ (\textit{в}\ \Omega_1),\\
&\sigma(\vec{u})\vec{n}_1=\vec{0}\ (\textit{на}\ \Gamma_1),\quad \vec{u}=\vec{0}\ (\textit{на}\ S),\\
&\sigma(\vec{u})\vec{n}_1=\rho_0 a_\infty^2(x)(\mathrm{div}\nabla\Phi)\vec{n}_1\ (\textit{на}\ \Gamma_0),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0}=-\vec{u}\cdot\vec{n}_1\ (\textit{на}\ \Gamma_0),
\end{aligned}\tag{2.5}$$

выражаемое формулой $(\nabla\Phi;\vec{u})^t=A^{-1}\psi$.

Определим операторы B_0 и B_G следующим образом:

$$B_0\psi := P_0(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi),\ B_G\psi := (P_G(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi),0)^t,\ \mathcal{D}(B_0)=\mathcal{D}(B_G)=H_A. \tag{2.6}$$

Лемма 3. *(см. [4]) Для операторов B_0 и B_G выполнены свойства*

$$B_0A^{-1/2} =: Q_0\in\mathcal{L}(H,\vec{J}_0(\Omega_0)),\quad B_GA^{-1/2} =: Q_G\in\mathcal{L}(H). \tag{2.7}$$

2.2. Сведение задачи к системе операторных уравнений. Вывод основной спектральной задачи

С использованием введенных операторов задачу (2.3) запишем в виде системы квадратичных по λ операторных уравнений:

$$\begin{cases}\lambda^2\rho_0 I_0\vec{v} - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v}+S_{1,2}\psi) - g\rho_0Q_0A^{1/2}\psi = 0,\\ \lambda^2T\psi - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(S_{2,1}\vec{v}+S_{2,2}\psi) + (A-g\rho_0Q_GA^{1/2})\psi = 0,\end{cases}\tag{2.8}$$

где $\xi=(\vec{v};\psi)^t\in\vec{J}_0(\Omega_0)\oplus\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega_0)\oplus H$, $T\psi := (\rho_0\nabla\Phi;\rho_1(x)\vec{u})^t$. Оператор T, очевидно, является ограниченным, самосопряженным и положительно определенным в H. Операторы $S_{k,j}$ $(k,j=1,2)$ определены в (2.4) (см. лемму 1), оператор A введен в лемме 2, операторы Q_0 и Q_G определены в лемме 3 (см. (2.7)).

Осуществим в системе(2.8) замену $T^{1/2}\psi = \widehat{\psi}$, получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 \rho_0 I_0 \vec{v} - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + S_{1,2}T^{-1/2}\widehat{\psi}) - g\rho_0 Q_0 A^{1/2}T^{-1/2}\widehat{\psi} = 0, \\ \lambda^2 I_H \widehat{\psi} - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(T^{-1/2}S_{2,1}\vec{v} + T^{-1/2}S_{2,2}T^{-1/2}\widehat{\psi}) + \\ \qquad\qquad\qquad + (A_T - g\rho_0 T^{-1/2}Q_G A^{1/2}T^{-1/2})\widehat{\psi} = 0, \end{array} \right. \tag{2.9}$$

где $A_T := T^{-1/2}AT^{-1/2}$ — самосопряженный, положительно определенный оператор с дискретным спектром ($A_T^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H)$, при $p = p_A$).

Осуществим в системе(2.9) замену $A_T^{1/2}\widehat{\psi} = \varphi$. В результате придем к следующей основной системе операторных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 \rho_0 I_0 \vec{v} - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + \widehat{S}_{1,2}\varphi) - g\rho_0 M_0\varphi = 0, \\ \lambda^2 A_T^{-1}\varphi - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(\widehat{S}_{2,1}\vec{v} + \widehat{S}_{2,2}\varphi) + (I_H - g\rho_0 A_T^{-1/2}M_G)\varphi = 0, \end{array} \right. \tag{2.10}$$

где $\widehat{S}_{1,2} := S_{1,2}T^{-1/2}A_T^{-1/2}$, $\widehat{S}_{2,1} := A_T^{-1/2}T^{-1/2}S_{2,1}$, $\widehat{S}_{2,2} := A_T^{-1/2}T^{-1/2}S_{2,2}T^{-1/2}A_T^{-1/2}$, $M_0 := Q_0 A^{1/2}T^{-1/2}A_T^{-1/2}$, $M_G := T^{-1/2}Q_G A^{1/2}T^{-1/2}A_T^{-1/2}$. Операторы $\widehat{S}_{1,2}$, $\widehat{S}_{2,1}$ и $\widehat{S}_{2,2}$ компактны, а о свойствах операторов M_0 и M_G говорит следующая лемма.

Лемма 4. *Для операторов M_0 и M_G выполнены свойства*

$$M_0 \in \mathcal{L}(H, \vec{J}_0(\Omega_0)), \quad M_G \in \mathcal{L}(H). \tag{2.11}$$

Доказательство. Из леммы 3 и свойств оператора T следует, что для доказательства (2.11) достаточно установить свойство $A^{1/2}T^{-1/2}A_T^{-1/2} \in \mathcal{L}(H)$. Представим оператор A_T в форме $A_T = (T^{-1/2}A^{1/2})(A^{1/2}T^{-1/2}) =: Q^*Q$, где Q^* и Q — плотно определенные замкнутые операторы. Введем оператор $G := (Q^*Q)^{1/2}$ — это так называемая абсолютная величина оператора Q, тогда для оператора Q справедливо полярное представление $Q = UG$, где U — унитарный оператор в H (см. [7], с. 420). Но тогда $A^{1/2}T^{-1/2}A_T^{-1/2} = Q(Q^*Q)^{-1/2} = UGG^{-1} = U \in \mathcal{L}(H)$. □

Систему (2.10) удобно записать в векторно-матричной форме:

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \lambda^2\mathcal{A}\xi - 2\omega_0\rho_0 i\lambda\mathcal{S}\xi + \mathcal{Q}\xi = 0, \quad \text{где} \quad \xi = (\vec{v};\varphi)^t \in \mathcal{H}, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \rho_0 I_0 & 0 \\ 0 & A_T^{-1} \end{pmatrix}, \mathcal{S} := \begin{pmatrix} S_{1,1} & \widehat{S}_{1,2} \\ \widehat{S}_{2,1} & \widehat{S}_{2,2} \end{pmatrix}, \mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 0 & -g\rho_0 M_0 \\ 0 & I_H - g\rho_0 A_T^{-1/2}M_G \end{pmatrix}.$$

Дадим определение собственного значения оператор-функции, а также собственного и присоединенных элементов.

Определение 1. (см. [12], с. 61) Число λ_0 называется собственным значением оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, если уравнение $\mathcal{L}(\lambda_0)\xi_0 = 0$ имеет ненулевое решение ξ_0. При этом ξ_0 называют собственным элементом $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающим числу λ_0.

Элементы ξ_1, ξ_2,..., ξ_{n-1} называют присоединенными к собственному элементу ξ_0, если $\sum_{k=0}^{j}(k!)^{-1}\mathcal{L}^{(k)}(\lambda_0)\xi_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$. Число n называют длиной цепочки ξ_0, ξ_1,..., ξ_{n-1} из собственного и присоединенных элементов.

О связи собственных и присоединенных элементов спектральной задачи (2.8) и задачи (2.10) (или, что то же, задачи (2.12)) говорит следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* λ_0 *конечнократное собственное значение задачи* (2.8), *а* ζ_0, $\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}$ — *соответствующая цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов, причем* $\zeta_k = (\vec{v}_k;\psi_k)^t$ $(k=\overline{0,n-1})$. *Тогда элементы* ξ_0, $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$, *где* $\xi_k = (\vec{v}_k; A_T^{1/2}T^{1/2}\psi_k)^t$ $(k=\overline{0,n-1})$ *образуют цепочку из собственного и присоединенных к нему элементов спектральной задачи* (2.12), *причем они соответствуют собственному значению* λ_0.

Обратно, каждой цепочке из собственного и присоединенных элементов ξ_0, $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$, $\xi_k = (\vec{v}_k;\varphi_k)^t$ $(k=\overline{0,n-1})$ *спектральной задачи* (2.12), *отвечающих конечнократному собственному значению* λ_0, *соответствует цепочка корневых элементов* ζ_0, $\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}$, $\zeta_k = (\vec{v}_k; T^{-1/2}A_T^{-1/2}\varphi_k)^t$ $(k=\overline{0,n-1})$ *спектральной задачи* (2.8), *причем эти элементы соответствуют собственному значению* λ_0.

Доказательство. Доказательство сводится к прямой проверке утверждений. $\square$

2.3. О существенном спектре задачи и локализации спектра

Покажем, что спектр операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ (или задачи (2.10), что то же) локализован у мнимой оси и состоит из изолированных конечнократных собственных значений и отрезка существенного спектра, лежащего на мнимой оси. Для этого понадобится следующая вспомогательная лемма (см. [8]).

Лемма 5. *(Г.В. Радзиевский [8], см. также [9]) Пусть* E — *гильбертово пространство,* $0 \le A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty$, $B \in \mathfrak{S}_\infty$, $0 \le \beta < 1$, *тогда*

$$\|(I-\lambda A)^{-1}A^\beta\| \le C(\beta,\arg\lambda)|\lambda|^{-\beta}, \quad \lambda\in\Lambda_\varepsilon := \{\lambda\in\mathbb{C}|\ |\arg\lambda|>\varepsilon\}, \tag{2.13}$$

$$\lim_{\eta\to\infty}\ \sup_{\{|\lambda|>\eta,\ |\arg\lambda|>\varepsilon\}} |\lambda|^\beta \|(I-\lambda A)^{-1}A^\beta B\| = 0. \tag{2.14}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого как угодно малого* $\varepsilon>0$ *существует* $R=R(\varepsilon)>2\omega_0$ *такое, что весь спектр пучка* $\mathcal{L}(\lambda)$ *локализован в* $\sigma_R := \Lambda^+_{R,\varepsilon}\cup\Lambda^-_{R,\varepsilon}\cup C_R$, *где*

$$\Lambda^\pm_{R,\varepsilon} := \{\lambda\in\mathbb{C}|\quad |\lambda|>R,\ \ |\arg\lambda\mp\pi/2|<\varepsilon\}, \quad -\pi<\arg\lambda\le\pi, \tag{2.15}$$

C_R — *круг радиуса* R *с центром в начале координат. Спектр, лежащий вне отрезка* $\mathcal{I}_{\omega_0} := [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$, *состоит из изолированных конечнократных собственных значений (дискретный). Возможными предельными точками спектра могут быть только точки указанного отрезка и бесконечно удаленная точка.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $R > 2\omega_0$ такое, что $\sigma(\mathcal{L}(\lambda)) \subset \sigma_R$. Для этого достаточно показать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$. В связи с этим рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\xi_1 = \xi_2$, где $\xi_1 = (\vec{v}_1;\varphi_1)^t$, $\xi_2 = (\vec{v}_2;\varphi_2)^t$. Из (2.10) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2\rho_0 I_0\vec{v}_1 - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v}_1 + \widehat{S}_{1,2}\varphi_1) - g\rho_0 M_0\varphi_1 = \vec{v}_2, \\ \lambda^2 A_T^{-1}\varphi_1 - 2\omega_0\rho_0 i\lambda(\widehat{S}_{2,1}\vec{v}_1 + \widehat{S}_{2,2}\varphi_1) + (I_H - g\rho_0 A_T^{-1/2}M_G)\varphi_1 = \varphi_2. \end{cases} \tag{2.16}$$

Введем оператор-функцию $S(\lambda) := (\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1})^{-1}$. Несложно проверить, что $\|S(\lambda)\| = O(|\lambda|^{-1})$ при $\lambda \to \infty$. Будем считать, что $|\lambda| > 2\omega_0 = \|2\omega_0 i S_{1,1}\|$; разделим первое уравнение из (2.16) на $\lambda\rho_0$ и выразим из него $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 = S(\lambda)\left(2\omega_0 i\widehat{S}_{1,2}\varphi_1 + g\lambda^{-1}M_0\varphi_1 + (\lambda\rho_0)^{-1}\vec{v}_2\right) \quad (|\lambda| > 2\omega_0 = \|2\omega_0 i S_{1,1}\|). \tag{2.17}$$

Поставим найденное выражение во второе уравнение из (2.16), получим

$$\begin{gathered} l(\lambda)\varphi_1 = 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\vec{v}_2 + \varphi_2, \quad l(\lambda) := I_H + \lambda^2 A_T^{-1} + G(\lambda), \\ G(\lambda) := -2\omega_0\rho_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} - g\rho_0 A_T^{-1/2}M_G - 2\omega_0\rho_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\left[2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gM_0\right]. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Нужно показать, что оператор-функция $l(\lambda)$ непрерывно обратима при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$ (при достаточно большом $R > 2\omega_0$), тогда из (2.17) и (2.18) будет следовать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$.

Представим оператор-функцию $l(\lambda)$ в виде

$$l(\lambda) = (I_H + i\lambda A_T^{-1/2})\left(I_H + (I_H + i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I_H - i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}\right)(I_H - i\lambda A_T^{-1/2}).$$

Здесь крайние скобки — непрерывно обратимые при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$ операторы. Таким образом, для непрерывной обратимости $l(\lambda)$ достаточно показать, что

$$\|(I_H + i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I_H - i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}\| \to 0 \quad (\lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R). \tag{2.19}$$

Из (2.18) видно, что в оценке нуждается лишь следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\|(I_H + i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}\widehat{S}_{2,2}(I_H - i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}\| = \\ &\quad = \|(I_H + i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}A_T^{-1/2}T^{-1/2}S_{2,2}T^{-1/2}A_T^{-1/2}(I_H - i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}\| \le \\ &\qquad \le \|(I_H + i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}A_T^{-1/4}(A_T^{-1/4}T^{-1/2}S_{2,2}T^{-1/2}A_T^{-1/4})\| \times \\ &\qquad\quad \times \|(I_H - i\lambda A_T^{-1/2})^{-1}A_T^{-1/4}\| = o(|\lambda|^{-1}) \quad (\lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Здесь использованы оценки (2.13) и (2.14) из леммы 5. Из (2.20) и предыдущих рассуждений следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R > 2\omega_0$ такое, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$, а значит $\sigma(\mathcal{L}(\lambda)) \subset \sigma_R = \Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon} \cup C_R$.

Перейдем от задачи (2.12) к задаче для фредгольмовой оператор-функции:

$$\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)\xi := \begin{pmatrix} \lambda\rho_0(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1}) & -g\rho_0 M_0 \\ 0 & I_H \end{pmatrix}^{-1} \mathcal{L}(\lambda)\xi =: (\mathcal{I} + \mathcal{F}(\lambda))\xi = 0, \qquad (2.21)$$

где $\mathcal{I}$ — это единичный оператор в $\mathcal{H}$, а оператор-функция $\mathcal{F}(\lambda)$, как не сложно проверить, принимает компактные значения при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{I}_{\omega_0} = \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ (из леммы 1 следует, что $\sigma(2\omega_0 i S_{1,1}) = \sigma_{ess}(2\omega_0 i S_{1,1}) = [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$). На множестве $\mathbb{C}\backslash\mathcal{I}_{\omega_0}$ спектры пучков $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадают. Поскольку точки $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$ являются регулярными точками для $\mathcal{L}(\lambda)$, то из (2.21) заключаем, что они же будут регулярными и для $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)$, а значит пучок $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)$ является регулярным в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{I}_{\omega_0}$. Отсюда следует (см. [10], а также [5], с. 74), что все точки спектра, не принадлежащие отрезку $\mathcal{I}_{\omega_0} = [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$, являются изолированными собственными значениями оператор-функции задачи (2.21), а значит и $\mathcal{L}(\lambda)$. Собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям, имеют конечные кратности. Точками сгущения могут являться только особенности оператор-функции $\mathcal{F}(\lambda)$, то есть отрезок $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и бесконечно удаленная точка. □

Теорема 3. *Предельный (существенный) спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадает с отрезком $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$.*

Доказательство. Воспользуемся представлением задачи (2.12) в виде системы (2.10) и, в связи со вторым уравнением системы, рассмотрим оператор-функцию

$$l_1(\lambda) := I_H - g\rho_0 A_T^{-1/2} M_G - 2\omega_0\rho_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} + \lambda^2 A_T^{-1} =: I_H + G_1(\lambda). \qquad (2.22)$$

Здесь оператор-функция $G_1(\lambda)$ принимает компактные значения при любых $\lambda \in \mathbb{C}$. Если мы покажем, что пучок $l_1(\lambda)$ имеет хотя бы одну регулярную точку, то тогда он будет регулярным в $\mathbb{C}$, и из [10] последует, что все точки спектра пучка $l_1(\lambda)$ являются изолированными собственными значениями конечной кратности с возможной предельной точкой $\lambda = \infty$ (единственная особенность $G_1(\lambda)$).

Будем считать, что $\lambda > 0$, $\lambda \to +\infty$. Представим оператор-функцию $l_1(\lambda)$ в виде

$$l_1(\lambda) = (I_H + \lambda^2 A_T^{-1})\left(I_H - (I_H + \lambda^2 A_T^{-1})^{-1}(-g\rho_0 A_T^{-1/2} M_G - 2\omega_0\rho_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2})\right).$$

Здесь левая скобка — непрерывно обратимый оператор при $\lambda \to +\infty$. Таким образом, для непрерывной обратимости $l_1(\lambda)$ достаточно показать, что второе слагаемое в правой скобке стремится по норме к нулю при $\lambda \to +\infty$. С использованием леммы 5 проведем требуемую оценку для наиболее сильного слагаемого:

$$\begin{aligned} \|(I_H+\lambda^2 A_T^{-1})^{-1}\widehat{S}_{2,2}\| &= \|(I_H+\lambda A_T^{-1/2})^{-1}(I_H-\lambda A_T^{-1/2})^{-1} A_T^{-1/2} T^{-1/2} S_{2,2} T^{-1/2} A_T^{-1/2}\| \le \\ &\le \|(I_H + \lambda A_T^{-1/2})^{-1} A_T^{-1/4}\| \cdot \|(I_H + \lambda A_T^{-1/2})^{-1} A_T^{-1/4}(T^{-1/2} S_{2,2} T^{-1/2} A_T^{-1/2})\| = \\ &= o(|\lambda|^{-1}) \quad (\lambda \to +\infty). \qquad (2.23) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что пучок $l_1(\lambda)$ непрерывно обратим при достаточно больших $\lambda>0$. Из предыдущих рассуждений следует, что спектр пучка $l_1(\lambda)$ дискретен в $\mathbb{C}$. Следовательно, пучок $l_1(\lambda)$ непрерывно обратим на отрезке $\mathcal{I}_{\omega_0}=[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ за исключением, быть может, конечного количества точек. Обозначим эти точки через α_1, α_2, ..., α_m ($\{\alpha_n\}_{n=1}^m \subset [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$).

Пусть теперь $\lambda \in \mathcal{I}_\alpha := [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]\backslash\{\alpha_n\}_{n=1}^m$, тогда из второго уравнения системы (2.10) можно выразить $\varphi = 2\omega_0\rho_0 i\lambda l_1^{-1}(\lambda)\widehat{S}_{2,1}\vec{v}$. Подставим это выражение в первое уравнение системы (2.10) и поделим его на $-\lambda\rho_0$, получим задачу

$$\begin{gathered}(2\omega_0 i S_{1,1} - \lambda I_0 + G_2(\lambda))\,\vec{v} = 0, \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega_0), \\ G_2(\lambda) := -4\omega_0^2\rho_0\lambda\widehat{S}_{1,2}l_1^{-1}(\lambda)\widehat{S}_{2,1} + 2\omega_0\rho_0 i M_0 l_1^{-1}(\lambda)\widehat{S}_{2,1},\end{gathered} \tag{2.24}$$

где оператор-функция $G_2(\lambda)$ принимает компактные значения при $\lambda \in \mathcal{I}_\alpha$. Сделаем в уравнении (2.24) замену спектрального параметра $\lambda = i\mu$ и умножим его на $-i$:

$$(2\omega_0 S_{1,1} - \mu I_0 - iG_2(i\mu))\,\vec{v} = 0, \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega_0). \tag{2.25}$$

Зафиксируем некоторое число $\mu_1 \in i\mathcal{I}_\alpha$ и рассмотрим задачу

$$(2\omega_0 S_{1,1} - \mu I_0 - iG_2(i\mu_1))\,\vec{v} = 0, \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega_0). \tag{2.26}$$

Это задача на собственные значения для самосопряженного оператора $2\omega_0 S_{1,1}$, возмущенного компактным оператором. Весь спектр оператора $2\omega_0 S_{1,1}$, в силу леммы 1, является предельным и заполняет отрезок $[-2\omega_0, 2\omega_0]$. Согласно теореме Вейля (см. [5], с. 21), для каждого $\mu_2 \in -i\mathcal{I}_\alpha$ существует некомпактная последовательность Вейля $\{\vec{v}_k\}_{k=1}^\infty$, $\|\vec{v}_k\|_{\vec{J}_0(\Omega_0)} = 1$, зависящая от μ_1 и μ_2, для которой

$$\|\,(2\omega_0 S_{1,1} - \mu_2 I_0 - iG_2(i\mu_1))\,\vec{v}_k\|_{\vec{J}_0(\Omega_0)} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Выбирая $\mu_2 = \mu_1$ и соответствующую последовательность Вейля $\{\vec{v}_k\}_{k=1}^\infty$, приходим к выводу, что для нее

$$\|\,(2\omega_0 S_{1,1} - \mu_1 I_0 - iG_2(i\mu_1))\,\vec{v}_k\|_{\vec{J}_0(\Omega_0)} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Это означает, что выбранная произвольно точка $\mu_1 \in -i\mathcal{I}_\alpha$ принадлежит предельному спектру задачи (2.25). Осуществляя обратную замену спектрального параметра получим, что множество $\mathcal{I}_\alpha$ принадлежит предельному спектру пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ из (2.12) (или, что то же, предельному спектру системы (2.10)). В силу замкнутости спектра получаем, что $\overline{\mathcal{I}_\alpha} = [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ есть подмножество предельного спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$. Поскольку, в силу теоремы 2, точки, лежащие вне отрезка $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$, могут быть только конечнократными собственными значениями, указанный отрезок совпадает с предельным спектром пучка $\mathcal{L}(\lambda)$. □

2.4. Об асимптотике собственных значений

Из теоремы 2 следует, что бесконечно удаленная точка является возможной предельной точкой для некоторых ветвей собственных значений пучка $\mathcal{L}(\lambda)$. Для доказательства существования этих ветвей и отыскания асимптотических формул нам понадобится следующий абстрактный результат (см. [9]), опирающийся на результаты работы [11].

Лемма 6. *(см. [9]) Пусть* $0 < C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty$*, причем собственные значения оператора* C *имеют степенную асимптотику. Введем обозначения:*

$$l(\lambda) := I + \lambda^2 C + G(\lambda), \quad T(\lambda) := (I - \lambda C^{1/2})^{-1} G(\lambda)(I + \lambda C^{1/2})^{-1}.$$

Пусть оператор-функция $G(\lambda)$ *аналитична в секторах* $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ *и* $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$*, а оператор-функция* $T(\lambda)$ *удовлетворяет следующему условию:* $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. *Тогда*

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i \lambda_k^{1/2}(C^{-1})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Для исследуемой задачи имеет место теорема.

Теорема 4. *Для любого как угодно малого* $\varepsilon > 0$ *и достаточно большого* $R = R(\varepsilon)$ *спектральная задача* (2.12) *(или* (2.10)*) имеет две ветви* $\{\lambda_k^{(\pm i)}\}_{k=1}^\infty$ *собственных значений, расположенных в секторах* $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ *и* $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$*, со следующей асимптотикой:*

$$\lambda_k^{(\pm i)} = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_T)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением задачи (2.12) в виде системы (2.10). Будем считать, что $|\lambda| > 2\omega_0$ и выразим $\vec{v}$ из первого уравнения системы (2.10):

$$\vec{v} = S(\lambda)\left(2\omega_0 i \widehat{S}_{1,2}\varphi + g\lambda^{-1} M_0 \varphi\right), \quad S(\lambda) := (\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1})^{-1}.$$

Подставим найденное выражение во второе уравнение системы (2.10), получим

$$l(\lambda)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \quad l(\lambda) := I_H + \lambda^2 A_T^{-1} + G(\lambda), \tag{2.27}$$
$$G(\lambda) := -2\omega_0\rho_0 i\lambda \widehat{S}_{2,2} - g\rho_0 A_T^{-1/2} M_G - 2\omega_0\rho_0 i \widehat{S}_{2,1} S(\lambda)\left[2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{1,2} + gM_0\right].$$

Чтобы попасть в условия леммы 7, нужно доказать, что для оператор-функции $T(\lambda) := (I_H - \lambda A_T^{-1/2})^{-1} G(\lambda)(I_H + \lambda A_T^{-1/2})^{-1}$ выполняется условие $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. Для этого, очевидно, достаточно оценить следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&\|(I_H - \lambda A_T^{-1/2})^{-1} \widehat{S}_{2,2} (I_H + \lambda A_T^{-1/2})^{-1}\| = \\
&\quad = \|(I_H - \lambda A_T^{-1/2})^{-1} A_T^{-1/2} T^{-1/2} S_{2,2} T^{-1/2} A_T^{-1/2} (I_H + \lambda A_T^{-1/2})^{-1}\| \le \\
&\quad\quad \le \|(I_H - \lambda A_T^{-1/2})^{-1} A_T^{-1/4} (A_T^{-1/4} T^{-1/2} S_{2,2} T^{-1/2} A_T^{-1/4})\| \times \\
&\quad\quad\quad \times \|(I_H + \lambda A_T^{-1/2})^{-1} A_T^{-1/4}\| = o(|\lambda|^{-1}) \quad (\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Здесь использованы оценки (2.13) и (2.14) из леммы 5. $\square$

2.5. О двукратной полноте с дефектом части собственных и присоединенных элементов

Поступим далее, как в теореме 4 при выводе задачи (2.27). А именно, будем считать, что $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и выразим $\vec{v}$ из первого уравнения системы (2.10). Подставив найденное выражение во второе уравнение системы (2.10), получим

$$l(\lambda)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \quad l(\lambda) := I_H + \lambda^2 A_T^{-1} + G(\lambda), \tag{2.29}$$
$$G(\lambda) := -2\omega_0\rho_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} - g\rho_0 A_T^{-1/2} M_G - 2\omega_0\rho_0 i\widehat{S}_{2,1} S(\lambda)\left[2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gM_0\right].$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие вспомогательные леммы о связи цепочки из собственного и присоединенного к нему элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ с некоторой функцией из $\mathcal{H}$ и о связи цепочек элементов некоторых специальных оператор-функций.

Лемма 7. *Элементы ξ_0, ξ_1,..., ξ_{n-1} образуют цепочку из собственного и присоединенного к нему элементов $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающую числу λ_0, тогда и только тогда, когда существует функция $\xi(\lambda)$, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0, такая, что $\xi(\lambda_0) \neq 0$, $\xi^{(k)}(\lambda_0) = k!\xi_k$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ и что $\mathcal{L}(\lambda)\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n.*

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям леммы 11.3 из [12] и является небольшим ее обобщением. Итак, пусть выполняются все условия из определения 1, тогда можно положить $\xi(\lambda) := \sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda-\lambda_0)^k\xi_k$, где элементы ξ_k $(k \geq n)$ произвольные, образующие голоморфную в некоторой окрестности точки λ_0 функцию $\xi(\lambda)$. Обратно, пусть $\mathcal{L}(\lambda)\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, тогда равенства $d^k/d\lambda^k(\mathcal{L}(\lambda)\xi(\lambda))|_{\lambda=\lambda_0} = 0$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ совпадают с условиями из определения 1. □

Определение 2. (см. [12], с. 62) Пусть $\xi(\lambda)$ — функция из H, причем $\xi(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathcal{L}(\lambda_0)\xi(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля функции $\mathcal{L}(\lambda)\xi(\lambda)$ в точке λ_0 равен n, то $\xi(\lambda)$ называется производящей функцией для цепочки из собственного и присоединенных к нему векторов $\{(k!)^{-1}\xi^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$. Число n будем называть рангом производящей функции $\xi(\lambda)$.

Для выяснения связи собственных и присоединенных элементов операторных пучков $\mathcal{L}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ установим следующие утверждения.

Лемма 8. *Рассмотрим две спектральные задачи:*

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1,1}(\lambda) & \mathcal{L}_{1,2}(\lambda) \\ \mathcal{L}_{2,1}(\lambda) & \mathcal{L}_{2,2}(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{\vec{v}} \\ \xi_\varphi \end{pmatrix} = 0, \quad (\xi_{\vec{v}};\xi_\varphi)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega_0)\oplus H,$$
$$l(\lambda)\xi_\varphi = \left(\mathcal{L}_{2,2}(\lambda) - \mathcal{L}_{2,1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,2}(\lambda)\right)\xi_\varphi = 0, \quad \xi_\varphi \in H, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{L}_{1,1}(\lambda)).$$

Вектор-функция $\xi(\lambda) := (\xi_{\vec{v}}(\lambda);\xi_\varphi(\lambda))^t$ из $\mathcal{H}$ является производящей вектор-функцией ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{L}_{1,1}(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $\xi_\varphi(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $l(\lambda)$ в точке λ_0 и

$$\xi_{\vec{v}}(\lambda) = -\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,2}(\lambda)\xi_\varphi(\lambda) + (\lambda-\lambda_0)^n\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda)p(\lambda), \tag{2.30}$$

где $p(\lambda)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности λ_0 ($p(\lambda_0) \neq 0$).

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям леммы 12.3 из [12]. Начнем с достаточности. Пусть $\xi_\varphi(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $l(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{L}_{1,1}(\lambda))$ и выполнено соотношение (2.30). Поскольку $l(\lambda)\xi_\varphi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, то из вида $l(\lambda)$ получим:

$$l(\lambda)\xi_\varphi(\lambda) = \left(\mathcal{L}_{2,2}(\lambda) - \mathcal{L}_{2,1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,2}(\lambda)\right)\xi_\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^n q(\lambda), \tag{2.31}$$

где $q(\lambda)$ — некоторая функция ($q(\lambda_0) \neq 0$). Подставим (2.30) в (2.31) и запишем полученное соотношение вместе с (2.30) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}$, после простых преобразований получим:

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi(\lambda) = \mathcal{L}(\lambda)(\xi_{\vec{v}}(\lambda);\xi_\varphi(\lambda))^t = (\lambda-\lambda_0)^n(p(\lambda);q(\lambda)+\mathcal{L}_{2,1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda)p(\lambda))^t.$$

Отсюда следует, что $\xi(\lambda) = (\xi_{\vec{v}}(\lambda);\xi_\varphi(\lambda))^t$ есть производящая вектор-функция ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0. Достаточность доказана.

Пусть теперь вектор-функция $\xi(\lambda) := (\xi_{\vec{v}}(\lambda);\xi_\varphi(\lambda))^t$ является производящей вектор-функцией ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0. Из условий теоремы имеем

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1,1}(\lambda)\xi_{\vec{v}} + \mathcal{L}_{1,2}(\lambda)\xi_\varphi \\ \mathcal{L}_{2,1}(\lambda)\xi_{\vec{v}} + \mathcal{L}_{2,2}(\lambda)\xi_\varphi \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

По условию $\mathcal{L}(\lambda)\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, тогда из (2.32) получим:

$$\mathcal{L}_{1,1}(\lambda)\xi_{\vec{v}} + \mathcal{L}_{1,2}(\lambda)\xi_\varphi = (\lambda-\lambda_0)^n p(\lambda), \tag{2.33}$$
$$\mathcal{L}_{2,1}(\lambda)\xi_{\vec{v}} + \mathcal{L}_{2,2}(\lambda)\xi_\varphi = (\lambda-\lambda_0)^n r(\lambda), \tag{2.34}$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые функции ($r(\lambda_0) \neq 0$, $p(\lambda_0) \neq 0$). Из (2.33) следует (2.30). Подставив (2.30) в (2.34) получим, что

$$l(\lambda)\xi_\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^n(r(\lambda) - \mathcal{L}_{2,1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda)p(\lambda)).$$

Отсюда следует, что $l(\lambda)\xi_\varphi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n. Из этого факта и формулы (2.30), рассуждая как при доказательстве достаточности, получаем, что $l(\lambda)\xi_\varphi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка n. Значит $\xi_\varphi(\lambda)$ есть производящая функция ранга n пучка $l(\lambda)$ в точке λ_0. □

Как следствие из леммы 8 получаем следующую лемму.

Лемма 9. *Набор элементов $\xi_k := (\vec{v}_k;\varphi_k)^t$ ($k = \overline{0, n-1}$) является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающей собственному значению $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{L}_{1,1}(\lambda))$, тогда и только тогда, когда φ_k ($k = \overline{0, n-1}$) — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 и*

$$\vec{v}_0 = -\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda)\mathcal{L}_{1,2}(\lambda)\varphi_0, \quad \vec{v}_j = \sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k!}\left(-\mathcal{L}_{1,1}^{-1}(\lambda_0)\mathcal{L}_{1,2}(\lambda_0)\right)^{(k)}\varphi_{j-k}, \quad j = 1,\ldots,n-1,$$

$$\text{где} \quad \mathcal{L}_{1,1}(\lambda) := \rho_0\lambda^2 I_0 - 2\omega_0\rho_0 i\lambda\widehat{S}_{1,1}, \quad \mathcal{L}_{1,2}(\lambda) := -2\omega_0\rho_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} - g\rho_0 M_0.$$

Вернемся теперь к задаче (2.29) и осуществим в ней замену $\lambda A_T^{-1/2}\varphi = \widehat{\varphi}$. Полученную систему запишем в векторно матричной форме:

$$L(\lambda)\eta := \left[\begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_H \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & A_T^{-1/2} \\ -A_T^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \widehat{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где $\eta := (\varphi; \widehat{\varphi})^t \in H^{(2)} := H \oplus H$. Применение леммы 8 к пучкам $L(\lambda)$ и $l(\lambda)$ приводит к следующему утверждению.

Лемма 10. *Набор элементов $\eta_k := (\varphi_k; \widehat{\varphi}_k)^t$ $(k = \overline{0, n-1})$ является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающей собственному значению $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{L}_{1,1}(\lambda))$ (см. лемму 9), тогда и только тогда, когда φ_k $(k = \overline{0, n-1})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 и*

$$\widehat{\varphi}_0 = \lambda_0 A_T^{-1/2}\varphi_0, \quad \widehat{\varphi}_k = \lambda_0 A_T^{-1/2}\varphi_k + A_T^{-1/2}\varphi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \quad (2.36)$$

Опираясь на лемму 10 докажем следующую теорему о двукратной полноте части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $l(\lambda)$.

Теорема 5. *Пусть $\varphi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\varphi_k^{(l)}; \widehat{\varphi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $l(\lambda)$, лежащие вне круга радиуса r $(r > 2\omega_0)$, а $\varphi_k^{(l)}$ и $\widehat{\varphi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями (2.36) для каждого l, образует полную в $H^{(2)}$ систему с точностью до конечного дефекта.*

Доказательство. В силу леммы 10 нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственным значениям лежащим вне круга радиуса r $(r > 2\omega_0)$, полна в $H^{(2)}$. Осуществим в задаче (2.35) замену спектрального параметра: $\lambda = -i\mu^{-1}$, где μ — новый спектральный параметр. Умножив правую и левую части полученного выражения на $-\mu$, придем к следующей спектральной задаче:

$$\begin{gathered} -\mu L(-i\mu^{-1})\eta = \left(\widehat{\mathcal{A}} - \mu\widehat{\mathcal{I}} - \mu\widehat{\mathcal{G}}(\mu)\right)\eta = 0, \\ \text{где} \quad \widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 0 & iA_T^{-1/2} \\ -iA_T^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{G}}(\mu) := \begin{pmatrix} G(-i\mu^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \quad (2.37)$$

а $\widehat{\mathcal{I}}$ — единичный оператор в $H^{(2)}$. Здесь $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}^* \in \mathfrak{S}_p(H^{(2)})$ $(p \in (0, +\infty))$, $\mathrm{Ker}\widehat{\mathcal{A}} = 0$, а $\widehat{\mathcal{G}}(\mu)$ — голоморфная в круге $|\mu| < r^{-1}$ оператор-функция, принимающая значения из $\mathcal{L}(H^{(2)})$. По теореме из [5], с. 78 получаем, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $-\mu L(-i\mu^{-1})$, отвечающих собственным значениям из круга $|\mu| < r^{-1}$, имеет не более конечного дефекта в $H^{(2)}$. После обратной замены спектрального параметра получим, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим вне круга $|\lambda| < r$, имеет не более конечного дефекта в $H^{(2)}$. $\square$

Из леммы 9 и теоремы 5 как следствие получаем следующее главное утверждение о двукратной полноте с дефектом для исходного операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$.

Теорема 6. *Обозначим через $\mathcal{P}_H$ ортопроектор пространства $\mathcal{H}$ на H. Пусть $\xi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\mathcal{P}_H \xi_k^{(l)}; \widehat{\xi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащие вне круга радиуса r $(r > 2\omega_0)$, а $\xi_k^{(l)}$ и $\widehat{\xi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями*

$$\widehat{\xi}_0 = \lambda_0 A_T^{-1/2} \mathcal{P}_H \xi_0, \quad \widehat{\xi}_k = \lambda_0 A_T^{-1/2} \mathcal{P}_H \xi_k + A_T^{-1/2} \mathcal{P}_H \xi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, k(\lambda_l).$$

для каждого l, образует полную в $H^{(2)}$ систему с точностью до конечного дефекта.

3. Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследована задача о нормальных движениях равномерно вращающегося упругого тела, заполненного идеальной баротропной жидкостью. Исследованы вопросы локализации и асимптотики спектра. Доказано утверждение о существенном спектре задачи. В исследуемой системе, также как и во многих других вращающихся системах, содержащих идеальную жидкость, возникает отрезок чисто мнимого предельного спектра, связанного с внутренними инерционными волнами в идеальной жидкости. Доказана теорема о двукратной полноте с дефектом для системы собственных и присоединенных элементов.

Список цитируемых источников

1. *Гараджаев А.* О нормальных колебаниях идеальной сжимаемой жидкости во вращающихся упругих сосудах // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 2. — С. 273–278.
2. *Гараджаев А.* К задаче о колебаниях идеальной сжимаемой жидкости в упругом сосуде // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286, № 5 — С. 1047–1049.
3. *Гараджаев А.* Спектральная теория задачи о малых колебаниях идеальной жидкости во вращающемся упругом сосуде // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1 — С. 38–47.
4. *Закора Д.А.* Задача о малых движениях идеальной баротропной жидкости, заполняющей вращающееся упругое тело // Динамические системы. — 2007. — Т. 22 — С. 83–95.

5. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
6. *Ralston J. V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids // J. Math. Analysis and Appl. — 1973. — V. 44. — P. 366–383.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
8. *Радзиевский Г.В.* Квадратичный пучок операторов. — Киев, 1976. — (Препринт).
9. *Оразов М.Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики: Дис... д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Ашхабат, 1982.
10. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
11. *Авакян В.А.*Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией // Функциональный анализ и его приложения. — 1978. — Т. 12, №2. — С. 66-67.
12. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

Получена 2.10.2007