Динамические системы, вып. 22 (2007), 63–72

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 531.38

Об изоконических движениях гиростата в случае двух линейных инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа

Е.К. Щетинина

Донецкий национальный университет
экономики и торговли им. М.Туган-Барановского
Донецк 83050.*E-mail: math@iamm.ac.donetsk.ua*

Аннотация. Получены условия существования изоконических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда дифференциальные уравнения Кирхгофа допускают два линейных инвариантных соотношения.

1. Введение

Развитый П.В.Харламовым [1] метод годографов прямого кинематического истолкования движения тела позволил исследовать особенности движения тела во многих случаях интегрируемости уравнений динамики твердого тела [2, 3]. Особый интерес представляют изоконические движения [3], для которых подвижный и неподвижный годографы угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости. Классическим примером изоконических движений являются движения тяжелого твердого тела в решениях В.А.Стеклова [4], Д.Гриоли [5]. Свойство изоконичности в решении В.А.Стеклова установлено Е.И.Харламовой и Г.В.Мозалевской [6], в решении Д.Гриоли – Е.И.Харламовой [7]. Изоконические движения были найдены и в решении Н.Е.Жуковского [9] Ю.П.Вархалевым и Г.В.Горром [8]. Ими же исследованы условия существования изоконических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой [10] в общем случае. Частные типы изоконических движений изучали Е.В.Верховод и Г.В.Горр [11, 12]. В работе [13] рассмотрены изоконические движения гиростата в решении уравнений Кирхгофа, найденном С.А.Чаплыгиным [14] и П.В.Харламовым [15]. В данной статье исследованы условия существования изоконических движений гиростата в решении [16] (аналоги этого решения в задаче о движении тела в жидкости получены ранее С.А.Чаплыгиным [14] и П.В.Харламовым [15]).

2. Постановка задачи. Первый случай решения с двумя линейными инвариантными соотношениями

Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями Кирхгофа-Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке O; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t.

Для изоконических движений справедливо инвариантное соотношение [3]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}) = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{e}$ – единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом.

Предположим, что уравнения (2.1), (2.2) допускают два линейных инвариантных соотношения [16]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3), \\ \omega_2 &= a_2(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где b_i $(i = \overline{0,3})$, c_j $(j = \overline{0,3})$ – постоянные, $a_1 = \dfrac{1}{A_1}$, $a_2 = \dfrac{1}{A_2}$. Связь параметров A_1, A_2 с тензором A такова: $A = diag(A_1, A_2 A_3)$. То есть при исследовании условий существования соотношений (2.4) у уравнений (2.1), (2.2) используется главная система координат в точке O.

Отметим, что дифференциальные уравнения (2.1), (2.2) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \\ (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь E, k – произвольные постоянные.

В работе [16] показано, что при выполнении условий

$$\lambda_3 = 0, \quad s_3 = 0, \quad B_{23} = B_{13} = 0, \quad C_{23} = C_{13} = 0, \quad \lambda_1 = \frac{(a_1 - a_3)b_0}{a_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{(a_2 - a_3)c_0}{a_3}, \quad s_1 = a_2c_0c_1 - a_1b_0(c_2 + B_{33}),$$

$$s_2 = a_1b_0b_2 - a_2c_0(b_1 + B_{33}), \quad b_1 = \frac{a_3}{\Delta}[(a_2 - a_3)B_{11} - a_3B_{22}], \tag{2.6}$$

$$b_2 = \frac{a_2a_3}{\Delta}B_{12}, \quad c_1 = \frac{a_1a_3}{\Delta}B_{12}, \quad c_2 = \frac{a_3}{\Delta}[(a_1 - a_3)B_{22} - a_3B_{11}],$$

$$C_{12} = a_1b_2(c_2 + B_{33}) - a_2c_1c_2, \quad C_{11} = C_{33} + a_1b_1(c_2 + B_{33}) - a_2c_1^2,$$

$$C_{22} = C_{33} + a_2c_2(b_1 + B_{33}) - a_1b_2^2, \quad \Delta = a_1a_3 + a_2a_3 - a_1a_2$$

уравнения (2.1), (2.2) с интегралами (2.5) допускают решение

$$\omega_1 = a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2), \quad \omega_2 = a_2(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2), \quad \omega_3 = a_3(\alpha_0\nu_3 + \delta_0), \tag{2.7}$$

где δ_0 – произвольная постоянная, $a_i = \dfrac{1}{A_i}$ $(i = \overline{1,3})$, α_0 – фиксированная постоянная:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\Delta}[a_3(a_2 - 2a_3)B_{11} + a_3(a_1 - 2a_3)B_{22} + B_{33}\Delta]. \tag{2.8}$$

Соотношениями (2.7) при условиях (2.6) динамические уравнения Кирхгофа (2.1) удовлетворены, а уравнения Пуассона (2.2) примут вид

$$\dot{\nu}_1 = a_3(\alpha_0\nu_3 + \delta_0)\nu_2 - a_2(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2)\nu_3,$$

$$\dot{\nu}_2 = -a_3(\alpha_0\nu_3 + \delta_0)\nu_1 + a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2)\nu_3, \tag{2.9}$$

$$\dot{\nu}_3 = a_2c_0\nu_1 - a_1b_0\nu_2 + (a_2c_2 - a_1b_1)\nu_1\nu_2 + a_2c_1\nu_1^2 - a_1b_2\nu_2^2.$$

Уравнения (2.9) имеют первые интегралы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \tag{2.10}$$

$$a_1b_0\nu_1 + a_2c_0\nu_2 + a_3\delta_0\nu_3 + a_1b_2\nu_1\nu_2 + \frac{1}{2}[(a_1 + a_3)b_1 + a_3c_2]\nu_1^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}[(a_2 + a_3)c_2 + a_3b_1]\nu_2^2 + a_3\left(\alpha_0 - \frac{1}{2}B_{33}\right)\nu_3^2 = a_3k. \tag{2.11}$$

Подставим выражения (2.7) в равенство (2.3)

$$(a_1b_0 - a_1b_1e_1 - a_2c_1e_2)\nu_1 + (a_2c_0 - a_1b_2e_1 - a_2c_2e_2)\nu_2 +$$
$$+ a_3(\delta_0 - \alpha_0e_3)\nu_3 + a_1b_1\nu_1^2 + a_2c_2\nu_2^2 + a_3\alpha_0\nu_3^2 + (a_1b_2 + a_2c_1)\nu_1\nu_2 -$$
$$- (a_1b_0e_1 - a_2c_0e_2 + a_3\delta_0e_3) = 0. \tag{2.12}$$

Таким образом движение гиростата, описываемое решением (2.7)–(2.11), будет обладать свойством изоконичности, если уравнения (2.9) допускают инвариантное соотношение (2.12).

3. Условия существования изоконических движений в первом случае

Потребуем, чтобы соотношения (2.11), (2.12) были линейно зависимы. Тогда получим равенства

$$a_1b_0 - a_1b_1e_1 - a_2c_1e_2 = x_0a_1b_0, \quad a_2c_0 - a_1b_2e_1 - a_2c_2e_2 = x_0a_2c_0,$$
$$\delta_0 - \alpha_0e_3 = x_0\delta_0, \quad a_1b_2 + a_2c_1 = x_0a_1b_2,$$
$$a_1b_1 = \frac{x_0}{2}[(a_1+a_3)b_1 + a_3c_2], \quad a_2c_2 = \frac{x_0}{2}[(a_2+a_3)c_2 + a_3b_1], \tag{3.1}$$
$$\alpha_0 = x_0\left(\alpha_0 - \frac{1}{2}B_{33}\right), \quad a_1b_0e_1 - a_2c_0e_2 + a_3\delta_0e_3 = x_0a_3k,$$

где x_0 – параметр, подлежащий определению.

Обратимся к условиям (2.6) и рассмотрим значения параметров b_2 и c_1. Очевидно следующее равенство $a_1b_2 = a_2c_1$. Тогда из соотношения $a_1b_2 + a_2c_1 = x_0a_1b_2$ системы (3.1) вытекает, что $x_0 = 2$. При этом значении x_0 система (3.1) в силу (2.8) приводится к условиям

$$\alpha_0 = B_{33}, \quad (a_2 - 2a_3)B_{11} + (a_1 - 2a_3)B_{22} = 0, \quad (c_2 = -b_1),$$
$$\delta_0 = -e_3B_{33}, \quad a_1b_1e_1 + a_2c_1e_2 = -a_1b_0, \quad a_1b_2e_1 + a_2c_2e_2 = -a_2c_0, \tag{3.2}$$
$$k = \frac{1}{2a_3}(a_1b_0e_1 - a_2c_0e_2 + a_3\delta_0e_3).$$

Из пятого и шестого уравнений системы (3.2) получим

$$e_1 = -\frac{a_2(b_0b_1 + b_2c_0)}{a_1b_2^2 + a_2b_1^2}, \quad e_2 = \frac{a_2b_1c_0 - a_1b_0b_2}{a_1b_2^2 + a_2b_1^2}. \tag{3.3}$$

Так как вектор $\mathbf{e}$ – единичный, то в силу равенства $\delta_0 = -e_3B_{33}$ и равенств (3.3) имеем значения постоянных e_3 и δ_0

$$e_3 = -\frac{\delta_0}{B_{33}},$$
$$\delta_0 = \frac{B_{33}}{a_1b_2^2 + a_2b_1^2}[(a_1b_2^2 + a_2b_1^2)^2 - a_2^2(b_0b_1 + b_2c_0)^2 - (a_2b_1c_0 - a_1b_0b_2)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

Компоненты угловой скорости на основании (2.7), (3.2) таковы:

$$\omega_1 = a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2), \quad \omega_2 = a_2c_0 + a_1b_2\nu_1 - a_1b_1\nu_2, \quad \omega_3 = a_3(B_{33}\nu_3 + \delta_0). \tag{3.5}$$

Уравнения (2.9) несколько упрощаются

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= a_3(B_{33}\nu_3 + \delta_0)\nu_2 - (a_2c_0 + a_1b_2\nu_1 - a_2b_1\nu_2)\nu_3,\\
\dot{\nu}_2 &= -a_3(B_{33}\nu_3 + \delta_0)\nu_1 + a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2)\nu_3,\\
\dot{\nu}_3 &= a_2c_0\nu_1 - a_1b_0\nu_2 - (a_1 + a_2)b_1\nu_1\nu_2 + a_1b_2(\nu_1^2 - \nu_2^2),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

а интеграл (2.11) принимает вид

$$a_1b_0\nu_1 + a_2c_0\nu_2 + a_3\delta_0\nu_3 + a_1b_2\nu_1\nu_2 + \frac{1}{2}a_1b_1\nu_1^2 - \frac{1}{2}a_2b_1\nu_2^2 + \frac{1}{2}a_3B_{33}\nu_3^2 = a_3k. \tag{3.7}$$

Таким образом, если параметры уравнений (2.1), (2.2) дополнительно к условиям (2.6) удовлетворяют второму равенству из системы (3.2), а параметр δ_0 подчинен ограничению из (3.4), где e_1, e_2, e_3 имеют значения из (3.3), (3.4), то движение гиростата будет обладать свойством изоконичности. Сведение задачи к квадратурам осуществляется следующим образом. Из первых интегралов (2.10) и (3.7) определяются зависимости $\nu_2(\nu_1), \nu_3(\nu_1)$. Подстановка их в первое уравнение системы (3.6) позволяет получить зависимость $\nu_1(t)$. То есть этим способом можно получить $\nu_i = \nu_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$. Тогда функции $\omega_i(t)$ находятся из соотношений (3.5).

Выполним сведение задачи к квадратурам в случае $\delta_0 = 0$ $(e_3 = 0)$. Вместо ν_1, ν_2, ν_3 введем новые переменные θ, φ

$$\nu_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \tag{3.8}$$

Подставим выражения (3.8) в уравнение (3.7)

$$f_2(\varphi)\sin^2\theta + f_1(\varphi)\sin\theta + f_0 = 0, \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned}
f_2(\varphi) &= \frac{1}{2}(a_1b_2\sin 2\varphi + a_1b_1\sin^2\varphi - a_2b_1\cos^2\varphi - a_3B_{33}),\\
f_1(\varphi) &= a_1b_0\sin\varphi + a_2c_0\cos\varphi, \quad f_0 = \frac{a_3}{2}(B_{33} - 2k).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Из уравнения (3.9) получим

$$\sin\theta = F(\varphi) = \frac{-f_1(\varphi) \pm \sqrt{f_1^2(\varphi) - 4f_0f_2(\varphi)}}{2f_2(\varphi)}. \tag{3.11}$$

Значение постоянной k найдем, используя последнее равенство из системы (3.2) и выражения (3.3)

$$k = -\frac{a_2b_1(a_1b_0^2 + a_2c_0^2)}{2a_3(a_1b_2^2 + a_2b_1^2)}. \tag{3.12}$$

Так как в силу (3.12), (2.6) величина k не зависит от B_{33}, то подкоренное выражение в формуле (3.11) может быть положительным за счет выбора параметра

B_{33}. Условию $|\sin\theta| \le 1$, где $\sin\theta$ выражается соотношением (3.11) можно удовлетворить выбором параметров b_0, c_0, которые в решении (2.7)–(2.11) остались произвольными.

Из первых двух уравнений системы (3.6) на основании соотношений (3.9), (3.10) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}[a_3(B_{33} - 2k) + (a_1 b_0 \sin\varphi + a_2 c_0 \cos\varphi)\sin\theta]. \tag{3.13}$$

Если внесем выражение (3.11) в уравнение (3.13), то получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{1 - F^2(\varphi)}}{F^2(\varphi)}[a_3(B_{33} - 2k) + (a_1 b_0 \sin\varphi + a_2 c_0 \cos\varphi)F(\varphi)]. \tag{3.14}$$

Из уравнения (3.14) устанавливаем зависимость $\varphi = \varphi(t)$, а затем из (3.11) находим функцию $\theta = \theta(t)$. Зависимости $\nu_i = \nu_i(t)$ можно определить из равенств (3.8), а функции $\omega_i = \omega_i(t)$ – из равенств (3.5).

Для получения уравнений подвижного годографа из соотношений (3.5) определим ν_i

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{a_1 b_2 \omega_2 + a_2 b_1 \omega_1 - a_1 a_2 (b_0 b_1 + b_2 c_0)}{a_1(a_1 b_2^2 + a_2 b_1^2)}, \\ \nu_2 &= \frac{b_2 \omega_1 - b_1 \omega_2 + a_2 b_1 c_0 - a_1 b_0 b_2}{a_1 b_2^2 + a_2 b_1^2}, \\ \nu_3 &= \frac{\omega_3 - a_3 \delta_0}{a_3 B_{33}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Тогда подвижный годограф – линия пересечения поверхностей, уравнения которых можно получить подстановкой величин (3.15) в равенства (2.10), (3.7). То есть в общем случае подвижный годограф вектора угловой скорости – алгебраическая кривая четвертого порядка.

Неподвижный годограф симметричен подвижному годографу относительно касательной к ним плоскости. Движение гиростата получаем качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

4. Изоконические движения гиростата во втором случае решения с двумя линейными инвариантными соотношениями

Пусть выполняются следующие условия на параметры уравнений (2.1), (2.2) и инвариантных соотношений (2.4)

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=\lambda_2=0, \quad b_0=c_0=0, \quad c_1=0, \quad b_2=0, \quad B_{12}=0, \quad b_3=\frac{a_3B_{13}}{a_3-a_1},\\
&c_3=\frac{a_3B_{23}}{a_3-a_2}, \quad b_1=\frac{a_2a_3B_{11}}{a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3}, \quad c_2=\frac{a_1b_1}{a_2}, \quad s_1=a_1\lambda_3b_3,\\
&s_2=a_2\lambda_2c_3, \quad s_3=-a_1\lambda_3b_1,\\
&(a_1a_3+a_2a_3-a_1a_2)B_{22}+(a_1a_3-a_1a_2-a_2a_3)B_{33}=0,\\
&C_{12}=-\frac{a_1a_2b_3c_3}{a_3}, \quad C_{13}=-\frac{a_1(a_1-a_3)b_1b_3}{a_3}, \quad C_{23}=-\frac{a_1(a_2-a_3)b_1c_3}{a_3},\\
&C_{11}=C_{33}+\frac{a_1}{a_3}[(a_1-a_3)b_1^2+(a_3-a_1)b_3^2+a_3c_3^2],\\
&C_{22}=C_{33}+\frac{a_1}{a_3}[(a_2-a_3)b_1^2+(a_3-a_2)c_3^2+a_3b_3^2].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

При выполнении условий (4.1) уравнения (2.1), (2.2) допускают решение

$$\omega_1=a_1(b_1\nu_1+b_3\nu_3), \quad \omega_3=a_1b_1\nu_2+a_2c_3\nu_3, \quad \omega_3=\frac{l_0}{2}\nu_3^{-1}+d_0\nu_3, \tag{4.2}$$

где l_0, d_0 – произвольные постоянные. Уравнения (2.2) в случае (4.1), (4.2) таковы

$$\begin{aligned}
&\dot\nu_1=\nu_2\left(\frac{l_0}{2}\nu_3^{-1}+d_0\nu_3\right)-\nu_3(a_1b_1\nu_2+a_2c_3\nu_3),\\
&\dot\nu_2=-\nu_1\left(\frac{l_0}{2}\nu_3^{-1}+d_0\nu_3\right)+\nu_3(a_1b_1\nu_1+a_1b_3\nu_3),\\
&\dot\nu_3=(a_2c_3\nu_1-a_1b_3\nu_2)\nu_3.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Эти уравнения допускают два интеграла

$$\begin{aligned}
\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2&=1,\\
\nu_3(a_1b_3\nu_1+a_2c_3\nu_2+(d_0-a_1b_1)\nu_3+a_3\lambda_3)&=\frac{l_0}{2}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Подставим соотношения (4.2) в равенство (2.3) и учтем в полученном уравнении второе условие из (4.4)

$$a_1b_1e_1\nu_1\nu_3+a_1b_1e_2\nu_2\nu_3+(a_1b_3e_1+a_2c_3e_2+d_0e_3+a_3\lambda_3)\nu_3^2-(a_1b_1+l_0)\nu_3+\frac{e_3l_0}{2}=0. \tag{4.5}$$

Потребуем, чтобы второе уравнение из (4.4) и уравнение (4.5) были линейно зависимы. Тогда получим следующие условия

$$\begin{aligned} &b_1e_1 = x_0b_3, \quad a_1b_1e_2 = x_0a_2c_3, \quad l_0(x_0+e_3)=0, \\ &l_0 + a_1b_1 = -x_0a_3\lambda_3, \quad a_1b_3e_1 + a_2c_3e_2 + d_0e_3 + a_2\lambda_3 = x_0(d_0 - a_1b_1). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Будем считать, что $l_0 \neq 0$. В этом случае из (4.6) и условия $e_1^2+e_2^2+e_3^2=1$ имеем $x_0 = -e_3$ и

$$\begin{aligned} &e_1 = -\frac{b_3e_3}{b_1}, \quad e_2 = -\frac{a_2c_3e_3}{a_1b_1}, \quad e_3 = \frac{a_1b_1}{\sqrt{a_1^2b_3^2+a_2^2c_3^2+a_1^2b_1^2}}, \\ &d_0 = \frac{a_1^2b_3^2+a_2^2c_3^2+a_1^2b_1^2}{2a_1b_1}, \quad l_0 = a_3e_3\lambda_3 - a_1b_1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Последние два равенства из системы (4.7) показывают, что в условиях изоконичности постоянные d_0 и l_0 фиксированы.

Для сведения задачи к квадратурам воспользуемся формулами (3.8). Из второго равенства системы (4.4) следует

$$\begin{aligned} &\sin(\varphi+\varphi_0) = \frac{2}{\sqrt{a_1^2b_3^2+a_2^2c_3^2}\sin 2\theta}\left[\frac{l_0}{2} - (d_0 - a_1b_1)\cos^2\theta - a_3\lambda_3\cos\theta\right], \\ &\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a_2c_3}{a_1b_3}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Третье уравнение системы (4.3) можно представить в виде

$$\dot{\theta} = \sqrt{a_1^2b_3^2+a_2^2c_3^2}\cos\theta\cos(\varphi+\varphi_0), \tag{4.9}$$

Внесем выражение (4.8) в правую часть уравнения (4.9)

$$\begin{aligned} (\cos\theta)^{\bullet} = -\Big[&(a_1^2b_3^2+a_2^2c_3^2)\sin^2\theta\cos^2\theta - \\ &-\left(\frac{l_0}{2} - (d_0-a_1b_1)\cos^2\theta - a_3\lambda_3\cos\theta\right)^2\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из уравнения (4.10) устанавливаем зависимость $\theta = \theta(t)$, тогда зависимость $\varphi = \varphi(t)$ можно найти из равенства (4.8). Формулы (3.8) и (4.2) позволяют получить функции $\nu_i = \nu_i(t)$ и $\omega_i = \omega_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ соответственно.

Уравнения подвижного годографа можно найти следующим образом. Из соотношений (4.2) определяем величины ν_i через ω_i и полученные выражения подставляем в равенства (4.4). В отличие от первого случая, в данном варианте подвижный годограф – кривая восьмого порядка, так как компоненты ν_i $(i = \overline{1,3})$ имеют вид

$$\nu_1 = \frac{1}{a_1b_1}\left(\omega_1 - \frac{a_1b_3\left(\omega_3 \pm \sqrt{\omega_3^2 - 2d_0l_0}\right)}{2d_0}\right),$$

$$\nu_2 = \frac{1}{a_1 b_1} \left(\omega_2 - \frac{a_2 c_3 \left(\omega_3 \pm \sqrt{\omega_3^2 - 2d_0 l_0} \right)}{2d_0} \right),$$

$$\nu_3 = \frac{\omega_3 \pm \sqrt{\omega_3^2 - 2d_0 l_0}}{2d_0}.$$

Таким образом, в статье для решения с двумя линейными инвариантными соотношениями уравнений Кирхгофа получены условия существования изоконических движений гиростата, выполнено сведение задачи к квадратурам в двух частных случаях рассматриваемого решения, указаны свойства подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости.

Список цитируемых источников

1. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – Т.28, вып.3. – С.502-507.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296с.
3. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 228с.
4. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движе-ния тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Труды отделения физ.наук о-ва любителей естествознания. – 1989. – Т.10, вып.1. – С.1-3.
5. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. Ser.4. – 1947. – T.26. – f.3-4. – P.271-281.
6. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Исследование решения В.А.Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1968. – Вып.5. – С.194-202.
7. *Харламова Е.И.* Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1970. – Вып.2. – С.35-37.
8. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* К вопросу о классификации движений гиростата Жуковского // Прикладная механика. – 1984. – Т.20, №8. – С.104-111.
9. *Жуковский Н.Е.* О движении тяжелого твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т.1. – М.: Гостехиздат, 1949. – С.31-152.
10. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Изоконические движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1982. – Вып.14. – С.20-33.
11. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Прецессионно-изоконические движения твердого тела с неподвижной точкой // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т.57, вып.4. – С.31-39.
12. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Новые случаи изоконических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т.57, вып.5. – С.25-34.

13. *Горр Г.В., Саркисьянц Е.В., Скрыпник С.В.* Об изоконических движениях тела в случае трех линейных инвариантных соотношений // Механика твердого тела. – 2000. – Вып.30. – С.93-100.
14. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая // Собр. соч. Т.1. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – С.194-312.
15. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1963. – №4. – С.17-29.
16. *Скрыпник С.В.* Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1999. – Вып.28. – С.31-40.

Получена 04.04.2007 Переработана 12.05.2007