Динамические системы, вып. 24 (2008), 61–68

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

Алгебры τ-локально измеримых операторов

М.А. Муратов *, **В.И. Чилин** **

* Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: kromsh@mail.ru*
** Национальный университет Узбекистана,
Ташкент 700174, Узбекистан. *E-mail: chilin@usd.uz*

Аннотация. В настоящей работе вводится новый класс $*$-алгебр $LS(\mathcal{M},\tau)$ τ-локально измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным полуконечным следом τ. Устанавливается, что $LS(\mathcal{M},\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $*$-алгебре $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов. Доказывается, что центр $LS(\mathcal{M})$ совпадает с $*$-алгеброй измеримых операторов, присоединенных к центру $Z(\mathcal{M})$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Приводятся достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$.

1. Введение

Развитие теории некоммутативного интегрирования для точного нормального полуконечного следа τ, заданного на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, привело к необходимости рассмотрения $*$-алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$ τ-измеримых операторов (см., например [1]). Эта алгебра является заполненной $*$-подалгеброй в $*$-алгебре $S(\mathcal{M})$ всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. $*$-Алгебры $S(\mathcal{M})$ были введены И.Сигалом (см. [2]) для описания "некоммутативного варианта" алгебр измеримых функций. Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ коммутативная, то $\mathcal{M}$ можно отождествить с $*$-алгеброй $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех ограниченных в существенном измеримых комплекснозначных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω,Σ,μ) с мерой μ, обладающей свойством прямой суммы. В этом случае $*$-алгебр $S(\mathcal{M})$ отождествляется с $*$-алгеброй $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на пространстве (Ω,Σ,μ) (см. [2]).

$*$-Алгебра $S(\mathcal{M})$ является одним из важных примеров EW^*-алгебр $\mathcal{E}$ замкнутых линейных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующих в том же гильбертовом пространстве H, что и $\mathcal{M}$, у которых ограниченная часть $\mathcal{E}_b = \mathcal{E} \cap B(H)$ совпадает с $\mathcal{M}$ (см. [3], [4]), где $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H.

Если $Z(\mathcal{M})$ — центр алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то $S(Z(\mathcal{M}))$, вообще говоря, не содержится в $S(\mathcal{M})$. В связи с этим, естественно возникает вопрос о выделении тех EW^*-алгебр $\mathcal{E}$ с ограниченной частью

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{M},$$

для которых $S(Z(\mathcal{M})) \subset \mathcal{E}$. Важным шагом в решении этой задачи стало введение $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (см. [5], [6]). $*$-Алгебра $LS(\mathcal{M})$ содержит $S(Z(\mathcal{M}))$ как $*$-подалгебру и обладает следующим свойством универсальности: всякая EW^*-алгебра $\mathcal{E}$ с ограниченной частью $\mathcal{E}_b = \mathcal{M}$ является заполненной подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$ (см. [7]). Можно было бы предположить, что среди всех EW^*-алгебр $\mathcal{E}$ с $\mathcal{E}_b = \mathcal{M}$ только $*$-алгебра $LS(\mathcal{M})$ содержит $S(Z(\mathcal{M}))$. Однако оказалось, что это не так. В настоящей работе вводятся $*$-алгебры $LS(\mathcal{M},\tau)$ τ-локально измеримых операторов, для которых

$$S(Z(\mathcal{M})) \subset LS(\mathcal{M},\tau),$$

при этом $LS(\mathcal{M},\tau)$ являются заполненными $*$-подалгебрами в $LS(\mathcal{M})$, вообще говоря, не совпадающими с $LS(\mathcal{M})$.

Используется терминология, обозначения и результаты теории алгебр фон Неймана из [8], [9] и теории измеримых и локально измеримых операторов из [2], [6],[10].

2. Предварительный сведения

Пусть H — гильбертово пространство на полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, I — тождественный оператор в H, $P(B(H)) = \{P \in B(H) : P = P^2 = P^*\}$ — множество всех проекторов из $B(H)$. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в H, т.е. слабо замкнутая $*$-подалгебра из $B(H)$, содержащая оператор I. Множество $P(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap P(B(H))$ является полной решеткой относительно естественного частичного порядка "$\leqslant$" в $\mathcal{M}_h = \{T \in M : T = T^*\}$, порожденного конусом $\mathcal{M}_+$ положительных операторов из $\mathcal{M}$.

Для каждого $P \in P(\mathcal{M})$ положим $P^\perp = I - P$. Запись $T_n \uparrow T$ (соответственно, $T_n \downarrow T$), $T_n, T \in \mathcal{M}_h$ означает, что $T_n \leqslant T_{n+1}$ (соответственно, $T_{n+1} \leqslant T_n$) и $T = \sup\limits_{n\geqslant 1} T_n$ (соответственно, $T = \inf\limits_{n\geqslant 1} T_n$).

Через $Z(\mathcal{M})$ будем обозначать центр алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Проектор $P \in P(\mathcal{M})$ называется *σ-конечным*, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из $P\mathcal{M}P$ не более чем счетно.

Проекторы E и F из $P(\mathcal{M})$ называются *эквивалентными* (обозначение: $E \sim F$), если существует частичная изометрия $V \in \mathcal{M}$, для которой проектор E является начальным, а проектор F — конечным, то есть, $V^*V = E$, $VV^* = F$; в частности

$$VE = V = FV,\ EV^* = V^* = V^*F.$$

Отношение "$\sim$" является отношением эквивалентности на $P(\mathcal{M})$. Запись $E \precsim F$ для проекторов E и F из $P(\mathcal{M})$ означает, что существует такой проектор $F_1 \leqslant F$, что $E \sim F_1$.

Проектор E называется *конечным*, если из $F \in P(\mathcal{M})$, $F \leqslant E$, $F \sim E$ следует, что $E = F$. Через $P_{fin}(\mathcal{M})$ обозначим множество всех конечных проекторов из $\mathcal{M}$.

Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется

— *конечной*, если I — конечный проектор;

— *полуконечной*, если каждый ненулевой проектор из $\mathcal{M}$ мажорирует ненулевой конечный проектор;

— *бесконечной*, если проектор I не является конечным;

— *σ-конечной*, если I — σ-конечный проектор.

Определение 1. Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную область определения $\mathcal{D}(T) \subset H$, называется *измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если существует такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathcal{D}(T)$ и $\{P_n^{\perp}\}_{n=1}^{\infty} \subset P_{fin}(\mathcal{M})$.

Множество $S(\mathcal{M})$ всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbb{C}$ относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и сильного умножения, получаемых замыканием обычных операций (см. [2]).

Ясно, что $\mathcal{M}$ является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{M})$.

Если $\mathcal{M}$ имеет конечный тип, то $*$-алгебра $S(Z(\mathcal{M}))$ операторов, измеримых относительно центра $Z(\mathcal{M})$, является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{M})$ и совпадает с центром $Z(S(\mathcal{M}))$ алгебры $S(\mathcal{M})$. В случае бесконечной алгебры $\mathcal{M}$ это не так. Например, если $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, а $\mathcal{M} = \mathcal{A}\overline{\otimes}B(H)$ — тензорное произведение алгебр $\mathcal{A}$ и $B(H)$, то $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$, и, в случае $\dim H = \infty$, имеем, что (см. [9], гл. IV, §1)

$$P_{fin}(\mathcal{M}) \cap P(Z(\mathcal{M})) = \{0\}.$$

Следовательно, в этом случае,

$$S(\mathcal{M}) \cap S(Z(\mathcal{M})) = Z(\mathcal{M}),$$

то есть, центр $Z(S(\mathcal{M}))$ в $S(\mathcal{M})$ совпадает с $Z(\mathcal{M})$.

Естественное желание иметь равенство

$$Z(S(\mathcal{M})) = S(Z(\mathcal{M}))$$

для произвольных алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$ приводит к необходимости расширения понятия измеримого оператора.

Определение 2. Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную область определения $\mathcal{D}(T) \subset H$, называется *локально измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT \in S(\mathcal{M})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Множество $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов, также, как и $S(\mathcal{M})$, является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbb{C}$ относительно тех же алгебраических операций (см. [6]). При этом $S(\mathcal{M})$ является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$. В случае, когда $\mathcal{M}$ имеет конечный тип, или когда $\mathcal{M}$ — фактор, алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ совпадают.

Если $T \in S(Z(\mathcal{M}))$, то существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT \in \mathcal{M}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $T \in LS(\mathcal{M})$. Поэтому, $S(Z(\mathcal{M}))$ есть $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Нетрудно проверить, что центр $Z(LS(\mathcal{M}))$ в $*$-алгебре $LS(\mathcal{M})$ совпадает с

$$S(Z(\mathcal{M})) = LS(Z(\mathcal{M})).$$

Пусть T — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения в H, $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T, где $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ — модуль оператора T, а U — соответствующая частичная изометрия из $B(H)$, для которой U^*U есть правый носитель $r(T)$ оператора T. Известно, что $T \in LS(\mathcal{M})$ (соответственно, $T \in S(\mathcal{M})$) в том и только в том случае, когда $|T| \in LS(\mathcal{M})$ (соответственно, $|T| \in S(\mathcal{M})$) и $U \in \mathcal{M}$ (см., например, [10], §§2.2, 2.3). Отметим также, что для самосопряженного оператора T, присоединенного к $\mathcal{M}$, его спектральное семейство проекторов $\{E_\lambda\}$ принадлежит $\mathcal{M}$ (см. [10], §2.1).

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$.

Определение 3. Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к $\mathcal{M}$ и имеющий всюду плотную область определения $\mathcal{D}(T)$ в H, называется *τ-измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(\mathcal{M})$, что $P(H) \subset \mathcal{D}(T)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$.

Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов образует $*$-подалгебру в $S(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ и, если след τ — конечен, т.е. $\tau(I) < \infty$, то $S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M})$. Заметим, что каждый проектор $P \in P(\mathcal{M})$, для которого $\tau(P) < \infty$, является конечным и σ-конечным.

Частичный порядок в $LS_h(\mathcal{M} = \{t \in LS(\mathcal{M}) : T^* + T\})$, порожденный собственным конусом $LS_+(\mathcal{M}) = \{T \in LS_h(\mathcal{M}) : T\text{— положительный оператор}\}$, будем обозначать через "$\leqslant$". Ясно, что этот частичный порядок индуцирует в $\mathcal{M}_h$ естественный частичный порядок.

Определение 4. $*$-Подалгебра $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ называется *заполненной*, если из соотношений $|T| \leqslant |S|$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in \mathcal{A}$ следует, что $T \in \mathcal{A}$.

$*$-Алгебры $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$ являются заполненными $*$-подалгебрами в $LS(\mathcal{M})$ (см. [10], §§2.4, 2.6). Действительно, пусть $0 \leqslant T \leqslant S$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in S(\mathcal{M})$. Тогда существует такой оператор $A \in \mathcal{M}$, что $\sqrt{T} = A\sqrt{S+I}$. Поскольку $\sqrt{S+I} \in S(\mathcal{M})$, то $\sqrt{T} \in S(\mathcal{M})$, и следовательно, $T \in S(\mathcal{M})$.

Для $*$-алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ этот факт доказывается аналогично.

3. $*$-Алгебры τ-локально измеримых операторов

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$.

Определение 5. Оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ называется *τ-локально измеримым*, если существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_n T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Множество всех τ-локально измеримых операторов обозначим через $LS(\mathcal{M}, \tau)$. Ясно, что $S(\mathcal{M}, \tau) \subseteq LS(\mathcal{M}, \tau)$ и $S(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M}, \tau)$, если след τ конечен или если $\mathcal{M}$ — фактор.

Теорема 1. *$LS(\mathcal{M}, \tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, причем $S(Z(\mathcal{M}))$ совпадает с центром $Z(LS(\mathcal{M}, \tau))$ алгебры $LS(\mathcal{M}, \tau)$.*

Доказательство. Пусть $T, S \in LS(\mathcal{M}, \tau)$ и $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Z''_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такие последовательности центральных проекторов из $P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z'_n \uparrow I$, $Z''_n \uparrow I$ и $Z'_n T$, $Z''_n S \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $Z_n = Z'_n Z''_n$. Тогда $Z_n \in P(Z(\mathcal{M}))$, $Z_n \uparrow I$ и $Z_n T$, $Z_n S \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$Z_n(T + S) = Z_n T + Z_n S \in S(\mathcal{M}, \tau),$$

$$Z_n(TS) = (Z_n T)(Z_n S) \in S(\mathcal{M}, \tau),$$
$$Z_n T^* = (Z_n T)^* \in S(\mathcal{M}, \tau).$$

Это означает, что $T + S$, $T \cdot S$, $T^* \in LS(\mathcal{M}, \tau)$. Таким образом, $LS(\mathcal{M}, \tau)$ является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.

Поскольку $Z_n|T| = |Z_n T|$, то $|T| \in LS(\mathcal{M}, \tau)$.

Возьмем произвольный оператор $L \in LS(\mathcal{M})$, для которого $|L| \leqslant |T|$. Тогда

$$|Z_n L| = Z_n|L| \leqslant Z_n|T| = |Z_n T| \in S(\mathcal{M}, \tau).$$

Так как $*$-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ — заполненная в $LS(\mathcal{M})$, то $Z_n L \in S(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, т.е. $L \in LS(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно, $LS(\mathcal{M}, \tau)$ — заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

Пусть теперь $T \in S(Z(\mathcal{M}))$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность проекторов из $P(Z(\mathcal{M}))$, для которой $Z_n \uparrow I$ и $Z_n|T| \in \mathcal{M}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$, то $|T| \in LS(\mathcal{M}, \tau)$, и потому $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$, т.е. $S(Z(\mathcal{M})) \subset LS(\mathcal{M}, \tau)$.

Обратно, пусть T — центральный оператор из $LS(\mathcal{M}, \tau)$ и $T = U|T|$ — его полярное разложение. Если V — унитарный оператор из $\mathcal{M}$, то $VT = TV$ и потому

$$T = VTV^* = (VUV^*)(V|T|V^*),$$

при этом,

$$(VUV^*)^*(VUV^*) = Vr(T)V^* = r(T).$$

В силу единственности полярного разложения, получим, что $VUV^* = U$ и $V|T|V^* = |T|$, т.е. $VU = UV$ и $V|T| = |T|V$. Отсюда следует, что $U \in Z(\mathcal{M})$. Поэтому, $|T| = U^*T$ принадлежит центру $Z(LS(\mathcal{M}, \tau))$ алгебры $LS(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно, спектральное семейство проекторов $\{E_\lambda\}$ для оператора $|T|$ лежит в $Z(\mathcal{M})$, что влечет включение $|T| \in S(Z(\mathcal{M}))$. Таким образом, $S(Z(\mathcal{M})) = Z(S(\mathcal{M}, \tau))$. $\square$

Ненулевой проектор $P \in P(\mathcal{M})$ называется *атомом*, если из $Q \leqslant P,\ Q \in P(\mathcal{M})$ следует, что $Q = 0$ или $Q = P$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *атомической*, если каждый ее ненулевой проектор мажорирует атом. В следующей теореме указываются достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M}, \tau)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) $\mathcal{M}$ — коммутативная;

(ii) Центр $Z(\mathcal{M})$ — σ-конечная атомическая алгебра;

(iii) $\mathcal{M}$ — атомическая алгебра.

Тогда $LS(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M}, \tau)$.

Доказательство. (i) Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M},\ LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$, и поэтому для каждого $T \in LS(\mathcal{M})$ существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ центральных проекторов, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT \in \mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$, что влечет равенство $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.

(ii) Пусть $Z(\mathcal{M})$ — σ-конечная атомическая алгебра фон Неймана. Тогда в $P(Z(\mathcal{M}))$ существует последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ атомов, для которых $\sup\limits_{n\geqslant 1} Q_n = I$. В этом случае, алгебру фон Неймана $\mathcal{M}$ можно отождествить с C^*-произведением

$$C^* - \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n = \left\{ \{T_n\}_{n=1}^\infty : T_n \in \mathcal{M}_n, \|\{T_n\}_{n=1}^\infty\|_{\mathcal{M}} = \sup_{n\geqslant 1} \|T_n\|_{\mathcal{M}_n} < \infty \right\},$$

где $\mathcal{M}_n = Q_n\mathcal{M}$ — факторы типа $I,\ II_1$ или II_∞. Следовательно (см. [10], §2.5),

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{n=1}^{\infty} LS(\mathcal{M}_n) = \prod_{n=1}^{\infty} S(\mathcal{M}_n) = \prod_{n=1}^{\infty} S(\mathcal{M}_n, \tau_n),$$

где τ_n — сужение следа τ на фактор $\mathcal{M}_n$. Ясно, что τ_n — точный нормальный полуконечный след на факторе $\mathcal{M}_n$, и поэтому проектор $P \in P(\mathcal{M}_n)$ конечен в $\mathcal{M}_n$ в том и только в том случае, когда $\tau_n(P) < \infty$.

Пусть $T = \{T_n\}_{n=1}^\infty \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} S(\mathcal{M}_n, \tau_n)$ и $S_k = \{T_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} S(\mathcal{M}_n, \tau_n)$, $k = 1, 2, \ldots$ таковы, что $T_n^{(k)} = 0$ при $k \neq n$ и $T_k^{(k)} = T_k$, т.е. $S_k = Q_kT$. Так как $T_k \in S(\mathcal{M}_k, \tau_k)$, то $S_k \in S(\mathcal{M}, \tau)$, и потому $(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n)T \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Осталось заметить, что $\sup\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} Q_i = I$, откуда следует, что $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$.

(iii) пусть теперь $\mathcal{M}$ — произвольная атомическая алгебра фон Неймана. В этом случае $\mathcal{M}$ отождествляется с C^*-произведением $C^* - \prod\limits_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q$, где $\mathcal{M}_q = Z_q\mathcal{M} = B(H_q)$ — факторы типа I, $\{Z_q\}_{q\in\Delta}$ — множество всех атомов в $P(Z(\mathcal{M}))$. Имеем (см. [10], §2.5), что

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q) = \prod_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q.$$

Пусть

$$T = \{T_q\}_{q\in\Delta} \in LS(\mathcal{M}),\ Z_n = \sup\{Z_q : \|T_q\|_{\mathcal{M}_q} \leqslant n\}.$$

Тогда

$$Z_n \in Z(\mathcal{M}),\ Z_n \uparrow I,\ Z_nT \in \mathcal{M} \subset S(\mathcal{M},\tau),$$

то есть, $T \in LS(\mathcal{M},\tau)$. □

Приведем теперь пример алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и точного нормального полуконечного следа τ на $\mathcal{M}$, для которых $LS(\mathcal{M},\tau) \neq LS(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{M}_0$ — фактор типа II_1 или II_∞, τ_0 — канонический след на $\mathcal{M}_0$ ($\tau_0(P) < \infty, P \in P(\mathcal{M}) \Leftrightarrow P \in P_{fin}(\mathcal{M})$) и Δ — несчетное множество индексов.

Положим $\mathcal{M} = C^* - \prod\limits_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q$, где $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_0$ для каждого $q \in \Delta$. Ясно, что

$$\tau(\{T_q\}_{q\in\Delta}) = \sum_{q\in\Delta} \tau_0(T_q)$$

есть точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$.

Выберем положительный неограниченный оператор T_0 из $S(\mathcal{M}_0,\tau_0) = S(\mathcal{M}_0) = LS(\mathcal{M}_0)$, и рассмотрим оператор

$$T = \{T_q\}_{q\in\Delta} \in LS(\mathcal{M}) = \prod_{q\in\Delta} S(\mathcal{M}_0,\tau_0)$$

для которого $T_q = T$ для всех $q \in \Delta$.

Пусть $Z = \{Z_q\}_{q\in\Delta}$ — не σ-конечный центральный проектор из $Z(\mathcal{M})$, т.е. $Z_q = I_{\mathcal{M}_q}$ для всех q из некоторого несчетного множества $\Delta' \subset \Delta$ и $Z_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \Delta'$.

Если $ZT \in S(\mathcal{M},\tau)$, то существует такое $\lambda_0 > 0$, что $\tau(E^\perp_{\lambda_0}(ZT)) < \infty$, где $\{E_\lambda(ZT)\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора ZT (см. [10], §2.6). Поскольку

$$E^\perp_{\lambda_0}(ZT) = ZE^\perp_{\lambda_0}(T) = \{E_q\}_{q\in\Delta},$$

где $E_q = E^\perp_{\lambda_0}(T_0) \neq 0$ для всех $q \in \Delta'$ и $E_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \Delta'$, то $E^\perp_{\lambda_0}$ — не σ-конечный проектор в $\mathcal{M}$, что противоречит неравенству $\tau(E^\perp_{\lambda_0}(ZT)) < \infty$.

Следовательно, ZT не принадлежит $S(\mathcal{M},\tau)$ для любого не σ-конечного проектора $Z \in P(Z(\mathcal{M}))$. Осталось заметить, что из сходимости $Z_n \uparrow I_\mathcal{M}$, $Z_n \in P(Z(\mathcal{M}))$ и не σ-конечности $I_\mathcal{M}$ в $Z(\mathcal{M})$ следует не σ-конечность Z_n в $Z(\mathcal{M})$ начиная с некоторого номера. Следовательно, оператор T не является τ-локально измеримым.

Замечание 1. Если $\mathcal{M}_0$ — фактор типа II_1, то $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана и $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$. Таким образом, в этом случае, $LS(\mathcal{M},\tau) \subsetneqq S(\mathcal{M})$.

Замечание 2. Если Δ — счетное множество, то $Z(\mathcal{M})$ — σ-конечная атомическая алгебра фон Неймана, и, в этом случае, $LS(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M})$ (см. теорему 2).

Замечание 3. Поскольку

$$LS(\mathcal{M}_q) = S(\mathcal{M}_0,\tau_0) = LS(\mathcal{M}_0,\tau_0) = LS(\mathcal{M}_q,\tau_q),$$

где τ_q — сужение следа τ на $\mathcal{M}_q$, то

$$\prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q,\tau_q) = \prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q) = LS(\mathcal{M}) \neq LS(\mathcal{M},\tau),$$

т.е., в отличии от конструкции $*$-алгебр локально измеримых операторов, конструкция $*$-алгебр τ-локально измеримых операторов не выдерживает взятие C^*-произведения алгебр фон Неймана.

Список цитируемых источников

1. *Nelson E.* Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal. — 1974. —Vol. 15. — P. 103–116.
2. *Segal Irving E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. — 1953. — Vol. 57. — P. 401–457.
3. *Dixon P. G.* Generalized B^*-algebras // Proc. London Math. Soc. — 1970. — Vol. 21, — No. 3. — P. 693–715.
4. *Dixon P. G.* Unbounded operator algebras // Proc. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 23, — No. 3. — P. 53–59.
5. *Sankaran S.* The $*$-algebra of unbounded operators // J. London Math. Soc. — 1959. — Vol. 34, — P. 337–344.
6. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1974. — No. 74. — P. 257–268.
7. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Абстрактная характеризация EW^* - алгебр // Функциональный анализ и его приложения. — 1991. — Т. 25. — Вып. 1. — С. 76–78.
8. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras. — England Abacus Press. — 1975. — 478 p.
9. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I. — New York: Springer, 1979. — 415 p.
10. *Муратов М.А., Чилин И.И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. — Праці Ін-та математики НАН України. — Київ: 2007. — 389 с.

Получена 03.12.2007