Динамические системы, вып. 25 (2008), 65–70

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.925

Інтегрування крайових задач для систем диференціально-операторних рівнянь

І. І. Король

Ужгородський національний університет,
Ужгород 88014. *E-mail: korol_ihor@ukr.net*

Анотація. Запропоновано чисельно-аналітичний метод послідовних наближень для дослідження існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних систем диференціально-операторних рівнянь як у критичному, так і в некритичному випадках. Встановлено конструктивні необхідні та достатні умови існування розв'язків, знайдено оцінки похибки побудованих наближених розв'язків.

Ключові слова: чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, крайова задача, диференціально-операторне рівняння.

1. Вступ

Чисельно-аналітичний метод А.М.Самойленка [5] знайшов застосування при дослідженні розв'язків різного роду крайових задач, зокрема для інтегро-диференціальних та функціонально-диференціальних рівнянь [1, 4, 6, 7]. У даній роботі модифікацію чисельно-аналітичного методу, розроблену в [2], застосовано до дослідження розв'язків систем диференціально-операторних рівнянь, підпорядкованих лінійним крайовим обмеженням.

2. Постановка задачі

Розглянемо систему нелінійних диференціально-операторних рівнянь з виділеною лінійною частиною

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, (Bx)(t)), \tag{1}$$

та лінійними функціональними обмеженнями загального вигляду

$$\ell x = \alpha, \tag{2}$$

де $t \in [a, b]$, $A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$, $A(t) \in C[a, b]$, $x : [a, b] \to D_1 \subset \mathbb{R}^n$, $Bx : ([a, b], D_1) \to ([a, b], D_2)$, $f : [a, b] \times D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^n$, де $D_1 \subset \mathbb{R}^n$, $D_2 \subset \mathbb{R}^p$ — деякі замкнені обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ та в $\mathbb{R}^p$. При $p < \infty$ D_2 є областю скінчено-вимірного простору, а якщо $p = \infty$, то D_2 – область нескінченно-вимірного простору. ℓ – лінійний вектор-функціонал, $\ell : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \in R^n$ – сталий вектор.

Оскільки за теоремою Ф. Рісса [3] завжди можна знайти матрично-значну функцію $C(t)$ обмеженої варіації таку, що лінійний функціонал l можна представити за допомогою інтеграла Рімана-Стілтєса, то крайові умови (2) можемо записати у вигляді

$$\int_a^b \big[dC(t)\big]x(t) = \alpha. \tag{3}$$

3. Критичний випадок

Розглянемо критичний [7] випадок — коли відповідна (1), (2) лінійна однорідна крайова задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \ell x = 0, \tag{4}$$

має k, $1 \le k \le n$ лінійно незалежних розв'язків.

Введемо до розгляду наступні позначення

$$Z(s) = \int_s^b \big[dC(t)\big]\Omega_s^t, \quad G = Z(a) = \ell\Omega_a^{\bullet} = \int_a^b \big[dC(t)\big]\Omega_a^t,$$

де Ω_a^t — матрицант відповідної (1) лінійної однорідної системи. Через G^+ позначимо єдину псевдообернену до G по Муру-Пенроузу [8] $(n \times n)$-матрицю, а через P_{G_k} і $P_{G_k^*}$ — $(n \times k)$ і $(k \times n)$-вимірні матриці, які є ортопроекторами з простору R^n на нуль простори $Ker(G)$ і $Ker(G^*)$ матриць G і G^* відповідно, причому стовпці матриці P_{G_k} є лінійно незалежними і утворюють повний базис ядра $Ker(G)$ матриці G, а рядки матриці $P_{G_k^*}$ утворюють повний базис ядра матриці G^*:

$$P_{G_k} : R^k \to Ker(G),\ Ker(G) = P_{G_k}R^n, \quad P_{G_k^*} : R^n \to Ker(G^*),\ Ker(G^*) = P_{G_k^*}R^n,$$
$$rank(P_{G_k}) = rank(P_{G_k^*}) = k = n - rank(G).$$

Нехай в області $(t,x,y) \in [a,b] \times D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{n+p+1}$ виконуються наступні умови:

A) вектор-функція $f(t,x,y)$ неперервна і задовольняє умови обмеженості і Ліпшіца:

$$\begin{gathered} |f(t,x,y)| \le m(t), \quad |f(t,x',y') - f(t,x'',y'')| \le K_1(t)|x'-x''| + K_2(t)|y'-y''|, \\ |(Bx')(t) - (Bx'')(t)| \le N(t)|x'-x''|, \end{gathered} \tag{5}$$

де $m(t)$ — вектор-функція з невід'ємними інтегровними елементами, $K_1(t)$, $K_2(t)$, $N(t)$ — матриці-функції з невід'ємними інтегровними компонентами порядків відповідно $(n \times n)$, $(n \times p)$ та $(p \times n)$. Для $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$ через $|\cdot|$ завжди будемо позначати абсолютну величину вектора, тобто $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^\top$, $|y| = (|y_1|, \ldots, |y_p|)^\top$ і, відповідно, для матриць $|K_1| = (|K_{ij}^{(1)}|)$, $|K_2| = (|K_{ik}^{(2)}|)$, $|N| = (|N_{kj}|)$, $i,j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,p}$, а всі нерівності розуміємо покомпонентно;

B) $D_\beta \equiv \left\{\xi \in R^k \mid B\left(x_0\left(t,\xi\right),\beta\right) \subseteq D_1\right\} \neq \emptyset$, де $B(y,\varrho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-y| \le \varrho\}$,

$$x_0(t,\xi) = \Omega_a^t P_{G_k}\xi + \Omega_a^t \Big(G^+ + \big(R(t) - G^+R_2\big) P_{G_k}^* R_1^{-1} P_{G_k^*}\Big)\alpha,$$

$$L(t,s) = \begin{cases} \Omega_s^t - \Omega_a^t \left(G^+ + (R(t) - G^+R_2)\, P_{G_k^*}^* R_1^{-1} P_{G_k^*}\right) Z(s), & 0 \le s \le t \le b, \\ -\Omega_a^t \left(G^+ + (R(t) - G^+R_2)\, P_{G_k^*}^* R_1^{-1} P_{G_k^*}\right) Z(s), & 0 \le t < s \le b, \end{cases}$$

$$R(t) = \int_a^t \Omega_s^a Z^*(s)ds,\ R_1 = P_{G_k^*} R_2 P_{G_k^*}^*,\ R_2 = \int_a^b Z(\tau)Z^*(\tau)d\tau,\ \beta = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |L(t,s)| m(s)ds;$$

C) найбільше додатне власне значення матриці Q менше за одиницю,

$$Q = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |L(t,s)| \big(K_1(s) + K_2(s)N(s)\big)ds.$$

Розглянемо оператор $\mathcal{Q}x : C([a,b],R^n) \to C([a,b],R^n)$, сім'ю k-параметричних відображень $\mathcal{L}_\xi x : C([a,b],R^n) \to C([a,b],R^n)$ і вектор-функціонал $\mu : C([a,b],R^n) \to R^n$:

$$(\mathcal{Q}x)(t) = \int_a^b |L(t,s)|\, x(s)ds,$$

$$(\mathcal{L}_\xi x)(t) = \Omega_a^t\big(P_{G_k}\xi + G^+\alpha\big) + \Omega_a^t\big(R(t) - G^+R_2\big) P_{G_k^*}^* R_1^{-1} P_{G_k^*}\alpha + \int_a^b L(t,s) f(s,x(s),(Bx)(s))ds,$$

$$\mu(x) = P_{G_k^*}\Big(\alpha - \int_a^b Z(\tau) f(\tau, x(\tau), (Bx)(\tau))d\tau\Big).$$

Необхідні та достатні умови існування розв'язків крайової задачі (1), (2) містять наступні твердження.

Лема 1. *Нехай виконується умова* ***A*** *і* $\varphi(t) = \varphi(t,\xi^*)$ *є розв'язком крайової задачі (1), (2). Тоді існує* ξ^* *таке, що* $\varphi(t)$ *є розв'язком системи рівнянь*

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathcal{L}_\xi \varphi, \\ \mu(\varphi) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

і при цьому його початкове значення визначається за формулою

$$\varphi(a) = \varphi_0 \equiv P_{G_k}\xi + G^+\Big(\alpha - \int_a^b Z(s) f(s,\varphi(s),(B\varphi)(s))ds\Big). \tag{7}$$

Лема 2. *Нехай виконується умова* ***A****. Якщо при деякому значенні параметра* $\xi = \xi^* \in \mathbb{R}^k$ *функція* $\varphi(t) = \varphi(t,\xi^*)$ *є розв'язком системи рівнянь (6), то* $\varphi(t)$ *є розв'язком крайової задачі (1), (2) і приймає початкове значення (7).*

Доведення. Проводиться за схемою доведення теорем 1,2 [1]. □

Для знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) побудуємо рекурентну k-параметричну послідовність функцій

$$x_0(t,\xi) = \Omega_a^t P_{G_k}\xi + \Omega_a^t\Big(G^+ + \big(R(t) - G^+R_2\big)P_{G_k}^* R_1^{-1} P_{G_k^*}\Big)\alpha,$$

$$x_m(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \int_a^b L(t,s) f(s, x_{m-1}(s,\xi), (Bx_{m-1})(\cdot,\xi)(s))ds, \ \xi \in R^k, \ m = 1, 2, \ldots, \quad (8)$$

які задовольняють крайові умови (2) при довільних значеннях параметра ξ.

Справедливі наступні оцінки відхилень:

$$|(\mathcal{L}_\xi x)(t) - x_0(t,\xi)| \le \int_0^T |L(t,s)|\, |f(s, x(s), (Bx(\cdot,\xi))(s))ds| \le \int_0^T |L(t,s)|\, m(s)ds \le \beta, \quad (9)$$

$$|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| = |(\mathcal{L}_\xi(x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)))(t)| \le$$
$$\le (\mathcal{Q}\,|x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)|)(t) \le \big(\mathcal{Q}^2\,|x_{m-1}(\cdot,\xi) - x_{m-2}(\cdot,\xi)|\big)(t) \le$$
$$\le \ldots \le (\mathcal{Q}^m\,|x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|)(t) \le Q^m\beta,$$

$$|x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \le \sum_{i=0}^{j-1} |x_{m+i+1}(t,\xi) - x_{m+i}(t,\xi)| \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{j-1} \big(\mathcal{Q}^{m+i}\,|x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|\big)(t) \le \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\beta\,. \quad (10)$$

З (9) і умов **A, C** випливає, що $(\mathcal{L}_\xi x)(t) \in D_1$ при всіх $\xi \in D_\beta$, $t \in [a,b]$, $x \in C([a,b], D_1)$. Крім того, з умови **D** випливає, що послідовність (8) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t,\xi) \in [a,b] \times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$, яка співпадає з нерухомою точкою $x = x^*(t,\xi)$ оператора $\mathcal{L}_\xi$. Оскільки $\sum_{=0}^{\infty} Q^i = (I_n - Q)^{-1}$, то переходячи в (10) до границі при $j \to \infty$ одержимо, що

$$|x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \le (I_n - Q)^{-1} Q^m \beta. \quad (11)$$

Беручи до уваги леми 1, 2 можемо сформулювати основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай для крайової задачі (1), (2) справедливі припущення* ***A**–**D**. Тоді:*

1) *при всіх $\xi \in D_\beta \subset R^k$ оператор $\mathcal{L}_\xi$ має нерухому точку $x^*(\cdot,\xi) \in C([a,b], D_1)$, яка співпадає з граничною функцією $x^*(t,\xi) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,\xi)$ послідовності (8). Для збіжності послідовних наближень при всіх натуральних m виконуються оцінки (11);*

2) *функція $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi^*$ є розв'язком визначального рівняння $\Delta(\xi) = 0$:*

$$\Delta(\xi) \overset{def}{=} \mu(x^*(\cdot,\xi)) = P_{G_k^*}\Big(\alpha - \int_a^b Z(\tau) f(\tau, x^*(\tau,\xi), (Bx^*(\cdot,\xi))(\tau))\,d\tau\Big). \quad (12)$$

При цьому $x^*(a,\xi) = P_{G_k}\xi + G^+\Big(\alpha - \int\limits_a^b Z(\tau) f\left(\tau, x^*(\tau,\xi), (Bx^*(\cdot,\xi))(\tau)\right) d\tau\Big).$

Наступне твердження містить достатні умови, для перевірки яких не потрібно знаходити граничну функцію послідовності (8).

Теорема 2. *Нехай для крайової задачі (1), (2) справедливі припущення* ***A**–**D*** *і, крім того:*

1) *існує опукла, замкнена область* $D' \subset D_\beta \subset R^k$ *така, що при деякому фіксованому натуральному* m *відображення* $\Delta_m(\xi):\ D_\beta \to R^k$*:*

$$\Delta_m(\xi) \overset{def}{=} \mu\left(x_m(\cdot,\xi)\right) = P_{G_k^*}\Big(\alpha - \int\limits_a^b Z(\tau) f\left(\tau, x_m(\tau,\xi)\right) d\tau\Big)$$

містить в області D' *єдину особливу точку* $\xi_{\,0m}$ *ненульового індексу;*

2) *на границі* $\partial D'$ *області* D' *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi\in\partial D'} \left|\Delta_m(\xi)\right| > Q_1 \left(I_n - Q\right)^{-1} Q^m \beta, \tag{13}$$

де $Q_1 = \int\limits_a^T \left|P_{G_k^*} Z(s)\right| \cdot \Big(K_1(s) + K_2(s)N(s)\Big) ds.$

Тоді існує розв'язок $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, $x^*(a) = P_{G_k}\xi + G^+\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(\tau) f(\tau, x^*(\tau)) d\tau\right)$ *крайової задачі (1), (2), де* $\xi^* \in D'$.

Доведення. Проводиться аналогічно до доведення теореми 3 [2]. □

4. Некритичний випадок

У некритичному випадку — коли $det(G) \neq 0$, тобто відповідна лінійна однорідна крайова задача (4) має тільки тривіальний розв'язок, то маємо, що $P_{G_k} = 0$ і $\Delta(\xi) \equiv 0$, а тому при застосуванні запропонованого варіанту чисельно-аналітичного методу не потрібно розв'язувати визначальне рівняння. При цьому справедливим є наступне твердження, доведення якого близьке до доведення теореми 1.

Теорема 3. *Нехай однорідна крайова задача* (4) *не має нетривіальних розв'язків і для крайової задачі* (1), (2) *справедливі припущення* ***A*** *і*

B1) $\widetilde{x}_0(t,\xi) = \Omega_a^t G^{-1}\alpha$ *лежить в області* D_1 *разом із своїм* $\widetilde{\beta}$*- околом, де*

$$\widetilde{\beta} = \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |\widetilde{L}(t,s)|\, m(s) ds, \quad \widetilde{L}(t,s) = \begin{cases} \Omega_s^t - \Omega_a^t G^{-1} Z(s), & 0 \le s \le t \le b, \\ -\Omega_a^t G^{-1} Z(s), & 0 \le t < s \le b, \end{cases}$$

тоді крайова задача (1), (2) *має хоча б один розв'язок.*

Якщо, крім того, виконується також і умова

C1) *найбільше додатне власне значення матриці* $\widetilde{Q}$ *менше за одиницю,*

$$\widetilde{Q} = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b \left|\widetilde{L}(t,s)\right| \cdot \Big(K_1(s) + K_2(s)N(s)\Big)x(s)ds,$$

то в області D_1 *крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок* $\widetilde{x}^*(t) = \lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{x}_m(t)$, *який є границею послідовності функцій*

$$\widetilde{x}_m(t) = \widetilde{x}_0(t) + \int_a^b \widetilde{L}(t,s)f(s,\widetilde{x}_{m-1}(s,\xi))ds, \quad \widetilde{x}_0(t) = \Omega_a^t G^{-1}\alpha, \quad m = 1,2,\ldots,$$

При цьому виконуються оцінки збіжності

$$|\widetilde{x}^*(t) - \widetilde{x}_m(t)| \leq \Big(I_n - \widetilde{Q}\Big)^{-1} \widetilde{Q}^m \widetilde{\beta}.$$

Перелік цитованих джерел

1. *Король І.І.* Дослідження періодичних розв'язків нелінійних автономних диференціальних систем у критичному випадку//Укр.мат.журн.—2008. —Т.60, №3. —С. 332–339.
2. *Король І.І., Перестюк М.О.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М.Самойленка //Укр.мат.журн. — 2006. — Т. 58, № 4. — С. 472–488.
3. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа: Учеб. пос. — М.: Высш. школа, 1982. — 271 с.
4. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений //Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №. 1, — С. 102–107.
5. *С*амойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр.мат. журн. – 1965.–**17**, №4.– С. 82-93.
6. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.:Наук.думка, 1992. —279 с.
7. *A.A.Boichuk, A.M.Samoilenko* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. — VSP Utrecht Boston, 2004. — 320 p.
8. *Penrose R.* A Generalized Inverse for Matrices // Proc.Cambridge Philos.Soc., — 1955. — V. 55, № 3, — P. 406–413.

Получена 12.10.2008