Динамические системы, вып. 20 (2006), 43–49

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 681.5.015.42

О проблематике построения корреляционной модели нелинейной непрерывно-дискретной системы управления

В. В. Захаров

Севастопольский национальный технический университет,
Севастополь

Аннотация. Рассмотрены два способа построения корреляционной модели нелинейной непрерывно-дискретной системы управления. Сформулированы условия эквивалентности уравнения соответствующих вариантов корреляционной модели.

Метод корреляционного анализа в классическом понимании [1,2] — суть один из методов статистической теории линейных динамических систем управления в пространстве состояний. Метод позволяет свести задачу статистического анализа многомерной нестационарной линейной динамической системы к решению несвязанных детерминированных, в общем случае дифференциальных и конечно-разностных, уравнений математического ожидания (МО), дисперсионной матрицы (ДМ) и корреляционной матрицы (КМ) [1] вектора состояния ее стохастической модели. Представляется естественным совокупность уравнений МО, ДМ и КМ назвать корреляционной моделью динамической системы, а уравнений МО и ДМ — ее дисперсионной моделью. Таким образом, дисперсионная модель определена нами как неотъемлемая составляющая корреляционной модели динамической системы.

Корреляционный анализ нелинейных динамических систем основывается на известной [2] идее обобщения. При этом обобщение может состоять либо в построении корреляционной модели нелинейной динамической системы на основе ее линеаризованной стохастической модели, либо — на основе ее нелинейной стохастической модели и гауссовского [2] (или полигауссовского) приближения плотности вектора состояния. Рассмотрим эти два способа реализации идеи обобщения на класс нелинейных динамических систем.

Из [3] следует, что модель любой стохастической многомерной нестационарной нелинейной многотактной непрерывно-дискретной системы можно привести к обобщенной модели состояния вида

$$\frac{d}{dx}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_{\text{н}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}_{\text{н}}(t)\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{B}_{\text{н}}(t)\mathbf{w}_{\text{н}}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{A}_{\text{д}}(k)\mathbf{x}(t_k-0) + \mathbf{R}_{\text{д}}(k)\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)] + \mathbf{B}_{\text{д}}(k)\mathbf{w}_{\text{д}}(k), \tag{2}$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0-0) = \mathbf{x}_0,\ t_{k-1} \le t < t_k,\ k = 1, 2, \ldots, t_k \in T.$$

Здесь и далее индексы "н" и "д" означают принадлежность элемента модели (1)–(2) к непрерывной и дискретной частям соответственно; символы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}$ — матричные коэффициенты соответствующих размеров, а $\mathbf{w}$ — случайный векторный процесс с нулевым средним типа гауссовского белого шума [2]. Компоненты блочного вектора состояния $\mathbf{x}(t) = colon\{\mathbf{x}_{\text{н}}(t), \mathbf{x}_{\text{д}}(k(t))\}$ являются функциями, либо дифференцируемыми на полуинтервалах $t_{k-1} \le t < t_k,\ k = 1, 2, \ldots$, либо в моменты времени $t_k \in T$ терпящими разрывы первого рода, причем $k(t) = \max\{k | t_k \le t, t_k \in T\}$. Величины разрывов в точках $t_k \in T$ определяются конечно-разностным уравнением (2), причем $\mathbf{x}_{\text{н}}(t_k) = \mathbf{x}_{\text{н}}(t_k-0)$ и $\mathbf{x}_{\text{д}}(t_k-0) = \mathbf{x}_{\text{д}}(t_{k-1})$.

Первый способ предполагает предварительную линеаризацию

$$\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)] \cong \bar{\mathbf{f}}_{\text{н}} + \mathbf{K}_{\text{н}}\mathbf{x}^0(t),\ \mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)] \cong \bar{\mathbf{f}}_{\text{д}} + \mathbf{K}_{\text{д}}\mathbf{x}^0(t_k-0) \tag{3}$$

нелинейных функций $\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)]$ и $\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)]$ обобщенной модели (1)–(2) на основе метода статистической линеаризации [2], где верхний индекс 0 означает центрирование случайного процесса математическим ожиданием, а $\bar{\mathbf{f}}_{\text{н}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{д}}$ и $\mathbf{K}_{\text{н}}, \mathbf{K}_{\text{д}}$ — соответственно векторные и матричные коэффициенты статистической линеаризации [2]. Подставив (3) в (1)–(2), получим линеаризованную обобщенную модель в виде

$$\frac{d}{dx}\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t, \mathbf{K}_{\text{н}})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_{\text{н}}(t)\mathbf{w}_{\text{н}}(t) + \mathbf{R}_{\text{н}}(t)\{\bar{\mathbf{f}}_{\text{н}} - \mathbf{K}_{\text{н}}\tilde{\mathbf{m}}_x(t)\}, \tag{4}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{д}}(k, \mathbf{K}_{\text{д}})\tilde{\mathbf{x}}(t_k-0) + \mathbf{B}_{\text{д}}(k)\mathbf{w}_{\text{д}}(k) + \mathbf{R}_{\text{д}}(k)\{\bar{\mathbf{f}}_{\text{д}} - \mathbf{K}_{\text{д}}\tilde{\mathbf{m}}_x(t_k-0)\}, \tag{5}$$
$$\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}(t_0-0) = \tilde{\mathbf{x}}_0,\ t_{k-1} \le t < t_k, t_k \in T,\ k = 1, 2, \ldots$$

где $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t, \mathbf{K}_{\text{н}}) = \mathbf{A}_{\text{н}}(t) + \mathbf{R}_{\text{н}}(t)\mathbf{K}_{\text{н}}$ и $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{д}}(k, \mathbf{K}_{\text{д}}) = \mathbf{A}_{\text{д}}(k) + \mathbf{R}_{\text{д}}(k)\mathbf{K}_{\text{д}}$, а соответствующие уравнения МО $\tilde{\mathbf{m}}_x(t) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\}$ ее вектора состояния — в виде

$$\frac{d}{dx}\tilde{\mathbf{m}}_x(t) = \mathbf{A}_{\text{н}}(t)\tilde{\mathbf{m}}_x(t) + \mathbf{R}_{\text{н}}(t)\bar{\mathbf{f}}_{\text{н}} + \mathbf{B}_{\text{н}}(t)E\{\mathbf{w}_{\text{н}}(t)\}, \tag{6}$$

$$\tilde{\mathbf{m}}(t_k) = \mathbf{A}_{\text{д}}(k)\tilde{\mathbf{m}}(t_k-0) + \mathbf{R}_{\text{д}}(k)\bar{\mathbf{f}}_{\text{д}} + \mathbf{B}_{\text{д}}(k)E\{\mathbf{w}_{\text{д}}(k)\}, \tag{7}$$
$$\tilde{\mathbf{m}}_x(t_0) = \tilde{\mathbf{m}}_x(t_0-0) = \tilde{\mathbf{m}}_{x0},\ t_{k-1} \le t < t_k,\ k = 1, 2, \ldots, t_k \in T.$$

Здесь и далее символ E означает математическое ожидание. Заметим, что благодаря нелинейной зависимости коэффициентов статистической линеаризации $\bar{\mathbf{f}}_{\text{н}}$, $\bar{\mathbf{f}}_{\text{д}}$ и $\mathbf{K}_{\text{н}}$, $\mathbf{K}_{\text{д}}$ от $\tilde{\mathbf{m}}_x$ и ДМ $\tilde{\mathbf{D}}_x(t) = E\{\tilde{\mathbf{x}}^0(t)[\tilde{\mathbf{x}}^0(t)]^T\}$, такой способ вероятностной аппроксимации нелинейных функций модели (1)–(2) позволяет в значительной степени сохранить в (4)–(5) и (6)–(7) нелинейные свойства динамической системы.

Уравнения ДМ получим на основе линеаризованной обобщенной модели (4)–(5), МО ее вектора состояния (6)–(7) и подхода, аналогичного предложенному в [2] для вывода уравнения ДМ статистически линеаризованных непрерывной и дискретной моделей состояния. В результате дифференциальное уравнение ДМ запишется так

$$\frac{d}{dx}\tilde{\mathbf{D}}_x(t) = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t,\mathbf{K}_{\text{н}})\tilde{\mathbf{D}}_x(t) + \tilde{\mathbf{D}}_x(t)\tilde{\mathbf{A}}^T_{\text{н}}(t,\mathbf{K}_{\text{н}}) + \mathbf{B}_{\text{н}}(t)\mathbf{Q}_{\text{н}}(t)\mathbf{B}^T_{\text{н}}(t),$$
$$\tilde{\mathbf{D}}_x(t_0) = \tilde{\mathbf{D}}_{x0}, t_{k-1} \le t < t_k,\ t_k \in T,\ k = 1,2,\ldots, \quad (8)$$

а конечно-разностное уравнение ДМ — как

$$\tilde{\mathbf{D}}_x(t_k) = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{д}}(k,\mathbf{K}_{\text{д}})\tilde{\mathbf{D}}_x(t_k-0)\tilde{\mathbf{A}}^T_{\text{д}}(k,\mathbf{K}_{\text{д}}) + \mathbf{B}_{\text{д}}(k)\mathbf{Q}_{\text{д}}(k)\mathbf{B}^T_{\text{д}}(k),$$
$$\tilde{\mathbf{D}}_x(t_0-0) = \tilde{\mathbf{D}}_{x0}, k = k(t_k),\ t_k \in T,\ k = 1,2,\ldots, \quad (9)$$

где $\mathbf{Q}_{\text{н}}(t) = E\{\mathbf{w}^0_{\text{н}}(t)[\mathbf{w}^0_{\text{н}}(t)]^T\}$, $\mathbf{Q}_{\text{д}}(k) = E\{\mathbf{w}^0_{\text{д}}(k)[\mathbf{w}^0_{\text{д}}(k)]^T\}$, а верхний индекс T означает транспонирование матрицы.

Дифференциальное уравнение КМ $\tilde{\mathbf{C}}_x(t,t^*) = E\{\tilde{\mathbf{x}}^0(t)[\tilde{\mathbf{x}}^0(t^*)]^T\}$ и конечно-разностное уравнение КМ $\tilde{\mathbf{C}}_x(t_k,t^*_k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}^0(t_k)[\tilde{\mathbf{x}}^0(t^*_k)]^T\}$ при реализации первого способа построения корреляционной модели легко получаются из соответствующих уравнений ДМ (8) и (9) с учетом очевидных при условии $t > t^*$ и $t_k > t^*_k$ равенств

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{C}}_x(t,t^*) = E\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{x}}^0(t)[\tilde{\mathbf{x}}^0(t^*)]^T\Big\},$$
$$E\{\mathbf{w}^0_{\text{н}}(t)[\mathbf{w}^0_{\text{н}}(t^*)]^T\} = \mathbf{O}_{\text{н}} \text{ и } E\{\mathbf{w}^0_{\text{д}}(k)[\mathbf{w}^0_{\text{д}}(k^*)]^T\} = \mathbf{O}_{\text{д}},$$

где $\mathbf{O}_{\text{н}}$ и $\mathbf{O}_{\text{д}}$ — нулевые матрицы сооответствующих размеров.

В случае дифференциального уравнения КМ, для этого достаточно приравнять к нулю второе и третье слагаемые в правой части уравнения (8) и, затем, выполнить формальную замену обозначения ДМ на соответствующее обозначение КМ. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{C}}_x(t,t^*) = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t,\mathbf{K}_{\text{н}})\tilde{\mathbf{C}}_x(t,t^*),$$
$$\tilde{\mathbf{C}}_x(t^*,t^*) = \tilde{\mathbf{D}}_x(t^*),\ t > t^*, t_{k-1} \le t < t_k,\ t_k \in T,\ k = 1,2,\ldots \quad (10)$$

Конечно-разностное уравнение КМ при реализации первого способа также легко получается из соответствующего уравнения ДМ (9). Для этого достаточно приравнять к нулю второе слагаемое в правой части уравнения (9), устранить в представлении оставшегося матричного произведения сомножитель $\tilde{\mathbf{A}}^T_{\text{д}}(k,\mathbf{K}_{\text{д}})$ и выполнить формальную замену обозначения ДМ на соответствующее обозначение КМ. В результате получим

$$\tilde{\mathbf{C}}_x(t_k,t^*_k) = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{д}}(k,\mathbf{K}_{\text{д}})\tilde{\mathbf{C}}_x(t_k-0,t^*_k),$$
$$\tilde{\mathbf{C}}_x(t^*_k-0,t^*_k) = \tilde{\mathbf{D}}_x(t^*_k),\ t_k > t^*_k, k = k(t_k),\ t_k \in T,\ k = 1,2,\ldots \quad (11)$$

Уравнения МО (6)–(7), ДМ (8)–(9), КМ (10)–(11) линеаризованной корреляционной модели нелинейной динамической системы, в отличие от линейной системы, образуют систему взаимосвязанных детерминированных дифференциальных и конечно-разностных уравнений. Взаимосвязь уравнений (6)–(7), (8)–(9), (10)–(11) обусловлена зависимостью коэффициентов статистической линеаризации $\bar{\mathbf{f}}_{\text{н}}$, $\mathbf{K}_{\text{н}}$ и $\bar{\mathbf{f}}_{\text{д}}$, $\mathbf{K}_{\text{д}}$ нелинейных функций непрерывной и дискретной подсистем от $\tilde{\mathbf{m}}_x(t)$ и $\tilde{\mathbf{D}}_x(t)$ вектора состояния $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ линеаризованной обобщенной модели (4)–(5). Кроме того, уравнения ДМ (8)–(9) определяют начальные условия решения задачи Коши для уравнений КМ (10)–(11). При этом решения дифференциальных уравнений (6), (8), (10) линеаризованной корреляционной модели определяют $\tilde{\mathbf{m}}_x(t)$, $\tilde{\mathbf{D}}_x(t)$ и $\tilde{\mathbf{C}}_x(t_k, t_k^*)$ соответственно на интервалах непрерывности $t_{k-1} \le t < t_k$, $k = 1, 2, \ldots$, а решения разностных уравнений (7), (9), (11) — скачкообразные изменения $\tilde{\mathbf{m}}_x(t)$, $\tilde{\mathbf{D}}_x(t)$ и $\tilde{\mathbf{C}}_x(t_k, t_k^*)$ соответственно в моменты $t_k \in T$, $k = 1, 2, \ldots$

Второй способ, в отличие от первого, позволяет получить принципиально точную корреляционную модель на основе не линеаризованной (4)–(5), а обобщенной модели состояния (1)–(2). В [3] показано, что в этом случае дифференциальное и конечно-разностное уравнения МО $\mathbf{m}_x(t)$ корреляционной модели определяется так

$$\frac{d}{dx}\mathbf{m}_x(t) = \mathbf{A}_{\text{н}}(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{R}_{\text{н}}(t)E\{\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)]\} + \mathbf{B}_{\text{н}}(t)E\{\mathbf{w}_{\text{н}}(t)\}, \tag{12}$$

$$\mathbf{m}_x(t_k) = \mathbf{A}_{\text{д}}(k)\mathbf{m}_x(t_k - 0) + \mathbf{R}_{\text{д}}(k)E\{\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k - 0)]\} + \mathbf{B}_{\text{д}}(k)E\{\mathbf{w}_{\text{д}}(k)\}, \tag{13}$$

$$\mathbf{m}_x(t_0) = \mathbf{m}_x(t_0 - 0) = \mathbf{m}_{x0},\ t_{k-1} \le t < t_k,\ k = 1, 2, \ldots, t_k \in T,$$

а дифференциальное уравнение ДМ корреляционной модели — в виде

$$\frac{d}{dx}\mathbf{D}_x(t) = \bar{\mathbf{R}}_{\text{н}} + \bar{\mathbf{R}}_{\text{н}}^T + \mathbf{B}_{\text{н}}(t)\mathbf{Q}_{\text{н}}(t)\mathbf{B}_{\text{н}}^T(t), \tag{14}$$

где $\bar{\mathbf{R}}_{\text{н}} = \mathbf{A}_{\text{н}}(t)\mathbf{D}_x(t) + \mathbf{R}_{\text{н}}(t)E\{\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)][\mathbf{x}^0(t)]^T\}$.

Из определения матричных коэффициентов [2] вероятностной аппроксимации нелинейной функции на основе метода статистической линеаризации следует, что для МО в представлении $\bar{\mathbf{R}}_{\text{н}}$ справедливо равенство

$$E\{\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)][\mathbf{x}^0(t)]^T\} = \mathbf{K}_{\text{н}}^*\mathbf{D}_x(t), \tag{15}$$

где $\mathbf{K}_{\text{н}}^*$ — матричный коэффициент вероятностной аппроксимации (3) нелинейной функции $\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)]$, соответствующий критерию минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации [2]. Тогда, с учетом (15), уравнение (14) перепишем в более удобном для дальнейшего сравнительного анализа виде

$$\frac{d}{dx}\mathbf{D}_x(t) = \bar{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t, \mathbf{m}_x, \mathbf{D}_x)\mathbf{D}_x(t) + \mathbf{D}_x(t)\bar{\mathbf{A}}_{\text{н}}^T(t, \mathbf{m}_x, \mathbf{D}_x) + \mathbf{B}_{\text{н}}(t)\mathbf{Q}_{\text{н}}(t)\mathbf{B}_{\text{н}}^T(t), \tag{16}$$

$$\mathbf{D}_x(t_0) = \mathbf{D}_{x0},\ t_{k-1} \le t < t_k,\ t_k \in T,\ k = 1, 2, \ldots,$$

где $\bar{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t, \mathbf{K}_{\text{н}}^*) = \mathbf{A}_{\text{н}}(t) + \mathbf{R}_{\text{н}}(t)\mathbf{K}_{\text{н}}^*$.

Конечно-разностное уравнение ДМ корреляционной модели, как показано в [3], представляется в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_x(t_k)=\mathbf{A}_{\text{д}}(k)\mathbf{D}_x(t_k-0)\mathbf{A}^T_{\text{д}}(k)+\bar{\mathbf{R}}_{\text{д}}+\bar{\mathbf{R}}^T_{\text{д}}+\\ +\mathbf{R}_{\text{д}}(k)E\{\mathbf{f}^0_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)][\mathbf{f}^0_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)]]^T\}\mathbf{R}^T_{\text{д}}(k)+\mathbf{B}_{\text{д}}(k)\mathbf{Q}_{\text{д}}(k)\mathbf{B}^T_{\text{д}}(k)\\ \mathbf{D}_x(t_0-0)=\mathbf{D}_{x0},\ k=k(t_k),\ t_k\in T,\ k=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{17}$$

где

$$\bar{\mathbf{R}}_{\text{д}}=\mathbf{R}_{\text{д}}(k)E\{\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)][\mathbf{x}^0(t_k-0)]^T\}\mathbf{A}^T_{\text{д}}(k).\tag{18}$$

Из определения матричных коэффициентов [2] статистической линеаризации следует, что для МО в (17) и (18) справедливы равенства

$$E\{\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)][\mathbf{x}^0(t_k-0)]^T\}=\mathbf{K}^*_{\text{д}}\mathbf{D}_x(t_k-0),\tag{19}$$

$$E\{\mathbf{f}^0_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)][\mathbf{f}^0_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)]]^T\}=\mathbf{K}^=_{\text{д}}\mathbf{D}_x(t_k-0)[\mathbf{K}^=_{\text{д}}]^T,\tag{20}$$

где $\mathbf{K}^*_{\text{д}}$ и $\mathbf{K}^=_{\text{д}}$ — матричные коэффициенты вероятностной аппроксимации (3) нелинейной функции $\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k-0)]$, соответствующие критерию минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации и критерию равенства МО и ДМ [2] соответственно. Тогда, с учетом (19) и (20), уравнение (17) и равенство (18) перепишем в более удобном виде

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_x(t_k)=\mathbf{A}_{\text{д}}(k)\mathbf{D}_x(t_k-0)\mathbf{A}^T_{\text{д}}(k)+\bar{\mathbf{R}}_{\text{д}}(k,\mathbf{m}_x\mathbf{D}_x)+\bar{\mathbf{R}}^T_{\text{д}}(k,\mathbf{m}_x\mathbf{D}_x)+\\ +\mathbf{R}_{\text{д}}(k)\mathbf{K}^=_{\delta}\mathbf{D}_x(t_k-0)[\mathbf{R}_{\text{д}}(k)\mathbf{K}^=_{\delta}]^T+\mathbf{B}_{\text{д}}(k)\mathbf{Q}_{\text{д}}(k)\mathbf{B}^T_{\text{д}}(k),\\ \mathbf{D}_x(t_0-0)=\mathbf{D}_{x0},\ k=k(t_k),\ t_k\in T,\ k=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{21}$$

где $\bar{\mathbf{R}}_{\text{д}}(k,\mathbf{K}^*_{\text{д}})=\mathbf{R}_{\text{д}}(k)\mathbf{K}^*_{\text{д}}\mathbf{D}_x(t_k-0)\mathbf{A}^T_{\text{д}}(k)$.

Дифференциальное уравнение КМ $\mathbf{C}_x(t,t^*)=E\{\mathbf{x}^0(t)[\mathbf{x}^0(t^*)]^T\}$ для второго способа построения корреляционной модели легко получается из соответствующего уравнения ДМ (14). Для этого достаточно, с учетом очевидных при условии $t>t^*$ равенств

$$\frac{d}{dt}\mathbf{C}_x(t,t^*)=E\Big\{\frac{d}{dt}\mathbf{x}^0(t)[\mathbf{x}^0(t^*)]^T\Big\},\quad E\{\mathbf{w}^0_{\text{н}}(t)[\mathbf{w}^0_{\text{н}}(t^*)]^T\}=\mathbf{O}_{\text{н}},$$

обнулить второе и третье слагаемые в правой части уравнения (14) и выполнить формальную замену обозначения ДМ на соответствующее обозначение КМ. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C}_x(t,t^*)=\mathbf{A}_{\text{н}}(t)\mathbf{C}_x(t,t^*)+\mathbf{R}_{\text{н}}(t)E\{\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)][\mathbf{x}^0(t^*)]^T\},\tag{22}$$

$$\mathbf{C}_x(t^*,t^*)=\mathbf{D}_x(t^*),\ t>t^*,\ t_{k-1}\le t<t_k,\ t_k\in T,\ k=1,2,\ldots$$

Конечно-разностное уравнение КМ $\mathbf{C}_x(t,t^*)=E\{\mathbf{x}^0(t)[\mathbf{x}^0(t^*)]^T\}$ для второго способа построения корреляционной модели также легко получаются из соответствующего уравнения ДМ (17) и равенства (18). Для этого достаточно приравнять к нулю все слагаемые в правой части уравнения (17), начиная с третьего, устранить в представлении оставшихся двух матричных произведений сомножитель $\mathbf{A}_{\text{д}}^T(k)$ и выполнить формальную замену обозначения ДМ на соответствующее обозначение КМ. В результате получим

$$\mathbf{C}_x(t_k, t_k^*) = \mathbf{A}_{\text{д}}(k)\mathbf{C}_x(t_k - 0, t_k^*) + \mathbf{R}_{\text{д}}(k)E\{\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k - 0)][\mathbf{x}^0(t_k^*)]^T\}, \tag{23}$$

$$\mathbf{C}_x(t_k^* - 0, t_k^*) = \mathbf{D}_x(t_k^*),\ t_k > t_k^*,\ k = k(t_k),\ t_k \in T,\ k = 1, 2, \ldots$$

Сформулируем условия эквивалентности дифференциальных и конечно-разностных уравнений МО, ДМ и КМ корреляционной и линеаризованной корреляционной моделей. В случае представления уравнений МО, ДМ и КМ в форме Коши, для эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы правые части соответствующих уравнений МО, ДМ и КМ были тоже тождественно равны.

Очевидно, что дифференциальное (12) и конечно-разностное (13) уравнения МО $\mathbf{m}_x(t)$ корреляционной модели в точности совпадают с соответствующими уравнениями (6) и (7) МО $\tilde{\mathbf{m}}_x(t)$ линеаризованной корреляционной модели. Это обусловлено тем, что, по определению [2], векторные коэффициенты статистической линеаризации $\bar{\mathbf{f}}_{\text{н}}$ и $\bar{\mathbf{f}}_{\text{д}}$ — суть математические ожидания $E\{\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)]\}$ и $E\{\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k - 0)]\}$ линейных функций $\mathbf{f}_{\text{н}}[\mathbf{x}(t)]$ и $\mathbf{f}_{\text{д}}[\mathbf{x}(t_k - 0)]$ соответственно.

Из (8) и (16) легко увидеть, что правые части дифференциальных уравнений ДМ линеаризованной корреляционной и корреляционной моделей совпадают, если $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t, \mathbf{K}_{\text{н}}) = \bar{\mathbf{A}}_{\text{н}}(t, \mathbf{K}_{\text{н}}^*)$. Окончательно, с учетом представления этих матричных коэффициентов, условие эквивалентности определится как равенство $\mathbf{K}_{\text{н}} = \mathbf{K}_{\text{н}}^*$. Отсюда следует, что условием эквивалентности дифференциальных уравнений ДМ линеаризованной корреляционной (8) и корреляционной (16) моделей является требование статистической линеаризации многомерной нелинейной функции непрерывной подсистемы линеаризованной обобщенной модели состояния (4)–(5) на основе критерия минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации.

В общем случае, конечно-разностные уравнения ДМ (9) и (21) не эквивалентны. Это обусловлено тем, что не представляется возможным однозначно определить соответствующий эквивалентный критерий статистической линеаризации многомерной нелинейной функции дискретной подсистемы линеаризованной обобщенной модели состояния (4)–(5).

В частном случае,если линейная составляющая правой части конечно-разностные уравнения (5) равняется нулю, однозначное определение эквивалентного критерия статистической линеаризации оказывается возможным. В этом случае условие эквивалентности уравнений ДМ (9) и (21) определится как требование статистической линеаризации нелинейной функции дискретной подсистемы на основе критерия равенства МО и ДМ функции и вероятностной аппроксимации функции соответственно.

Из (10), (11) и (22), (23) очевидно, что дифференциальные и конечно-разностные уравнения КМ линеаризованной корреляционной и корреляционной моделей нелинейной динамической системы всегда не эквивалентны.

В завершении заметим, что уравнения (12)–(13) и (16), (21) верны для произвольного способа аппроксимации плотности вектора состояния обобщенной модели (1)–(2). Поэтому, эти уравнения в точности совпадут с соответствующими уравнениями МО и ДМ модели моментов — суть обобщения корреляционной модели нелинейной непрерывно-дискретной системы на случай произвольного негауссовского приближения плотности.

Список цитируемых источников

1. *Лившиц Н. А.* Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами. — М.: Советское радио, 1974. — 328 с.
2. *Казаков И. Е.* Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
3. *Захаров В. В.* Корреляционный анализ нелинейных непрерывно-дискретных систем. // Автоматизация процессов и управление: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1997. — № 7. — С. 32–36.

Получено 02.10.2006