Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 53–56

УДК 517.968.7

Нормальные колебания частично-диссипативной системы

Б. М. Вронский

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: bmw1960@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрена задача о нормальных колебаниях частично диссипативной системы, состоящей из идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей. Исследована структура спектра, получены формулы асимптотического поведения собственных значений, доказаны утверждения о полноте собственных элементов.

Ключевые слова: частичная диссипация, асимптотика, полнота.

1. Постановка задачи

Пусть неподвижный контейнер, занимающий область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, заполнен двумя жидкостями: вязкой несжимаемой и идеальной сжимаемой. Обозначим через Ω_1 область, занятую вязкой жидкостью, через Ω_2 — область, занятую идеальной жидкостью, Γ — границу раздела жидкостей (идеальная находится выше вязкой), S_1 и S_2 — соответствующие твердые стенки. Предполагается, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz.

В работе [1] показано, что соответсвующая спектральная задача может быть приведена к следующей системе операторных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (\mu\lambda I - \lambda^2\rho_1 P^{-1} - g\Delta\rho B)\vec{\psi} + c^2 HY\varphi = 0, \\ (c^2 I + \lambda^2 A^{-1})\varphi = \lambda^2 Y^* H^* \vec{\psi}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\rho_i > 0$ — плотности жидкостей, $\mu > 0$ — коэффициент вязкости, g — ускорение свободного падения, c — скорость звука, λ — собственная частота нормальных колебаний, ϕ и ψ — компоненты моды нормальных колебаний.

Входящие в систему операторы обладают свойствами:

Лемма 1. *1. Операторы H и H^* взаимно сопряженные компактные конечного порядка, при этом:*

$$H\colon H_0 \to H_1, \qquad H^*\colon H_1 \to H_0.$$

2. Операторы Y и Y^* взаимно сопряженные компактные конечного порядка, при этом:

$$Y : \mathcal{L}_2(\Omega_2) \to H_0, \qquad Y^* : H_0 \to \mathcal{L}_2(\Omega_2).$$

3. Оператор P^{-1} вполне непрерывен и положителен, оператор $B = HH^*$ вполне непрерывен и неотрицателен .

Здесь H_1 — пространство соленоидальных векторных полей, равных нулю на границе раздела Γ и области S, занятой вязкой жидкостью, а H_0 — пространство следов функций $H^1(\Omega_2)$на границе раздела Γ.

2. Исследование спектра

Поскольку в системе (1) кроме единичных все остальные операторы компактны то по известной теореме М.В.Келдыша спектр задачи состоит из счетного множества конечнократных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Пользуясь взаимной сопряженностью операторов H и H^*, Y и Y^* легко показать, что эти собственные значения расположены симметрично относительно вещественной оси в правой полуплоскости.

Дальнейшее изложение касается более детальных свойств спектра.

Рассмотрим систему (1) при $|\lambda| < c\sqrt{\lambda_1(A)}$, где $\lambda_1(A)$ — первое (наименьшее) собственное значение оператора A . В этом случае оператор-функция $R(\lambda) := (c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1}$ аналитична и принимает значения на множестве самосопряженных ограниченных операторов. Исключая при этих λ из уравнений системы φ, получим:

$$l(\lambda)\vec{\psi} := (\lambda\mu I - g\Delta\rho B + \lambda^2 F(\lambda))\vec{\psi} = 0, \qquad (2)$$

где $B := HH^*$, а оператор-функция $F(\lambda)$ определена равенством

$$F(\lambda) = \rho_1 P^{-1} + \rho_2 c^2 HYR(\lambda)Y^* H^*,$$

при этом $F(\lambda)$ принимает значения на множестве самосопряженных вполне непрерывных операторов и аналитична в окрестности нуля. Как показано в [1], оператор B имеет степенную асмиптотику собственных значений, поэтому на основании теоремы Маркуса (см. [3]) можно сделать вывод:

Теорема 1. *Существует последовательность собственных значений задачи (1) $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:*

$$\lambda_k^0 = c_0\lambda_k(B)(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty),$$

Отвечающие им собственные векторы $\{\vec{\psi}_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ после проектирования на $H_1 \ominus KerB$ образуют в пространстве $H_1 \ominus KerB$ дефектный базис Рисса.

Далее исследуем свойства спектра задачи (1) при $\lambda \to \infty$. для этого введем в рассмотрение две области комплексной плоскости

$$\Theta_1(\varepsilon, R) = \{\lambda : |\lambda| > R, \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\}$$

и

$$\Theta_2(\varepsilon, R) = \{\lambda : |\lambda| > R, \quad \varepsilon > |\arg\lambda|, \quad \pi - \varepsilon < |\arg\lambda| < \pi + \varepsilon\}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число, а $R = R(\varepsilon)$ достаточно большое число, зависящее от выбора ε .

В работе [2] доказано, что имеет место оценка:

Теорема 2. *Оператор-функция $T(\lambda)$ обладает свойством:*

$$T(\lambda) = o(1), \quad \text{при } \lambda \to \infty, \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R). \tag{3}$$

здесь оператор-функция задается формулой

$$T(\lambda) := \lambda HY(c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^*,$$

а область $\Lambda(\varepsilon, R)$ определена следующим образом:

$$\Lambda(\varepsilon, R) = \left\{ \lambda \in C : \varepsilon < |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad |\lambda| > R \right\}.$$

Далее нам понадобится утверждение, принадлежащее М. Б. Оразову [5]:

Теорема 3. *Пусть оператор-функция $l(\lambda)$ имеет вид:*

$$l(\lambda) = I + \lambda^2 C + G(\lambda),$$

где $\lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R)$ и выполнены условия:

$$1) 0 < C \in \mathfrak{S}_p, \text{при } p > 0,$$

2) Оператор-функция $G(\lambda)$ при $\lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R)$ принимает значения на множестве ограниченных операторов; 3)$(I - i\lambda C^{-1/2})^{-1} G(\lambda)(I + i\lambda C^{-1/2})^{-1} = o(1)$, при $\lambda \to 0$. Тогда собственные значения $l(\lambda)$ имеют асимптотическое поведение, описываемые формулой:

$$\lambda_k = \pm i(\sqrt{\lambda_k(C)})^{-1}(1 + o(1)), \quad k \to \infty.$$

Последовательно исключая из системы (1) элементы $\vec{\psi}$ и φ, и применяя к получающимся при этом теорему 2 и теорему М.Б. Оразова, получим следующие утверждения о характере асимптотике спектра исследуемой задачи:

Теорема 4. *Собственные значения спектральной задачи (1) имеют следующее асимптотическое поведение:*

$$\lambda_k^+ = \frac{\mu}{\rho_1} \lambda_k(P)(1 + o(1)) \quad k \to \infty.$$

и

$$\lambda_k^{\pm i} = \pm ic\sqrt{\lambda_k(A)}(1 + o(1)) \quad k \to \infty.$$

3. Выводы

В предложенной работе исследован спектр нормальных колебаний частично-диссипативной гидросистемы. Показано, что спектр дискретный, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично вещественной оси. Доказано, что спектр состоит из четырех последовательностей с предельными точками в нуле и на бесконечности. Получены асимптотические формулы для всех ветвей спектра. Доказана двукратная полнота системы мод нормальных колебаний. С физической точки зрения собственные значения, локализованные вдоль положительной полуоси, отвечают поверхностным и внутренним волнам в вязкой жидкости. Собственные значения, локализованные вдоль мнимой оси, отвечают акустическим колебаниям сжимаемой жидкости.

Список цитируемых источников

1. *Вронский Б. М.* О спектре одной гидродинамической задачи // Ученые записки Симферопольского государственного университета им. М.В. Фрунзе — 1998. — №7(46), — с. 60-65.
2. *Б. М. Вронский, Н. Д. Копачевский* Об одной оценке оператор-функции // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского Серия Физико-математические науки — 2010. — Т. 23 (62) № 1, — с. 1–4.
3. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. - Кишинев: Штиница, 1986. — 260 с.
4. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов спектральной теории оператор - функций // УМН. — 1982. — Т. 37, вып. 2, — с. 81-145.
5. *Оразов М. Б.* О локализации спектра в задаче о нормальных колебаниях упругой оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью // ЖВМ и МФ. — 1985. — Т. 25, № 3. — с. 403 - 412.

Получена 30.09.2011