Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 53–68

УДК 532.59

Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью

И. Т. Селезов*, О. В. Авраменко, В. В. Нарадовый****

*Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев

**Государственный педагогический университет, Кировоград

Аннотация. Рассмотрена новая нелинейная задача распространения волновых пакетов в системе «жидкий слой с твердым дном – жидкий слой со свободной поверхностью». Методом многомасштабных разложений получены первые три линейных приближения нелинейной задачи. Получены решения первых двух линейных приближений, а также условия разрешимости второго и третьего линейных приближений. Выведены эволюционные уравнения для огибающих волновых пакетов на поверхности контакта и на свободной поверхности. Представлен анализ форм волновых пакетов на поверхности контакта и на свободной поверхности.

Ключевые слова: нелинейные волны, двухслойная жидкость, свободная поверхность

Введение

Большинство теоретических исследований внутренних волн конечной амплитуды связано с анализом волновых движений в системах, где внутренние волны слабо нелинейны и являются длинными по отношению к глубине жидкости [14, 15, 16, 19, 21, 25, 29, 33, 34]. Уравнение Кортевега-де Вриза, описывающее эволюцию волнового движения при балансе между нелинейностью и дисперсией, достаточно хорошо изучено, а также развиты методы, позволяющие находить точные решения для произвольно заданных начальных условий [37]. Впервые распространение и устойчивость волновых пакетов на поверхности раздела полубесконечных жидкостей исследовал Найфе [27]. Эта проблема получила развитие и в более поздних работах [12, 17, 30, 37, 38]. В (Zhou et al., 1992) [39] анализируется устойчивость внутренних волн Стокса в двухслойной жидкости методом многомасштабных асимптотических разложений. Распространение нелинейных волн в двух- и трехслойных жидкостях исследовалось в [31, 32], а возбуждение нелинейных волн при наличии препятствия на поверхности раздела в [33].

В статьях [1, 2, 4, 5, 7, 8, 10] исследованы двухслойные системы вида «полупространство – полупространство», «слой – полупространство», «слой – слой», а также представлено обоснование методологических нюансов метода многомасштабных разложений.

Особый интерес представляют исследования не только распространения отдельных волновых пакетов, но и взаимодействия внутренних и поверхностных волн. В работе (Watson, 1990) [35] проведено исследование генерации внутренних волн поверхностными. В работе (Matsuno, 1993) [26] исследуется распространение нелинейных волн в двухслойной жидкости с верхней свободной границей. Выведено нелинейное эволюционное уравнение асимптотическим разложением по малому параметру отклонения без введения таких понятий как длина волны и мелкая вода. В (Jamali et al., 2003) [24] проводится асимптотический анализ интерфейсных волн в двухслойной жидкости с выбором в качестве малого параметра разности плотностей нижней и верхней жидкостей. В работе (Wen Feng, 1995) [36] при распространении волн на свободной поверхности исследуется резонансное возбуждение слабонелинейных волн на границе раздела слоев методом многомасштабных разложений. В случае двухслойной жидкости с верхней свободной границей исследуется распространение солитонных интерфейсных волн и резонанс между короткими волнами и медленными волнами (Dias Il'ichev, 2001) [20]. В работе (Choi, 1996) [18] исследуются капиллярно-гравитационные волны при течении в двухслойной жидкости со свободной поверхностью над донным препятствием и определяется критическая скорость.

Распространение гравитационно-капиллярных поверхностных волн при наличии генерации внутренних волн большой амплитуды рассмотрено в коротковолновом приближении в [13]. Исследованы также нелинейные внутренние волны и солитоны в шельфовой зоне Японского моря [9]. В работе [22] взаимодействие между короткими поверхностными и длинными внутренними волнами в двухслойной жидкости исследовано методом многомасштабных разложений. При равенстве групповой скорости поверхностных волн и фазовой скорости внутренних волн получено стационарное решение для огибающей. В работе [3] исследованы закономерности гравитационного нелинейного волнового движения в двухслойной стратифицированной по плотности жидкости для конечной толщины верхнего более легкого слоя, а также рассмотрены особенности нелинейного внутреннего резонансного взаимодействия гравитационных волн, порождаемых свободной поверхностью верхнего слоя и поверхностью раздела сред. В [6] рассмотрена новая нелинейная модель распространения волновых пакетов в системе «жидкий слой с твердым дном – жидкий слой со свободной поверхностью». Методом многомасштабных разложений получены первые три линейных приближения нелинейной задачи и анализируются решения задачи первого приближения.

В данной статье представлены основные особенности распространения волновых пакетов в системе «жидкий слой с твердым дном – жидкий слой со свободной поверхностью» во втором и третьем приближениях. Отметим, что в работах [10, 37] при исследовании движения легкой частицы в волнлвом потоке теоретически и экспериментально была показана незамкнутость траектории частицы, откуда следует перенос массы, обусловленный нелинейными эффектами. В данной работе появляются неосциллирующие члены во втором приближении, что находится в соответствии с работами [4, 23].

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается распространение волновых пакетов в гидродинамической системе «слой с твердым дном – слой со свободной поверхностью». Верхняя и нижняя жидкости являются идеальными и несжимаемыми. Учитывается сила поверхностного натяжения на поверхности контакта и на свободной поверхности. Волновые движения являются потенциальными и характеризируются малой, но конечной амплитудой (рис. 1).

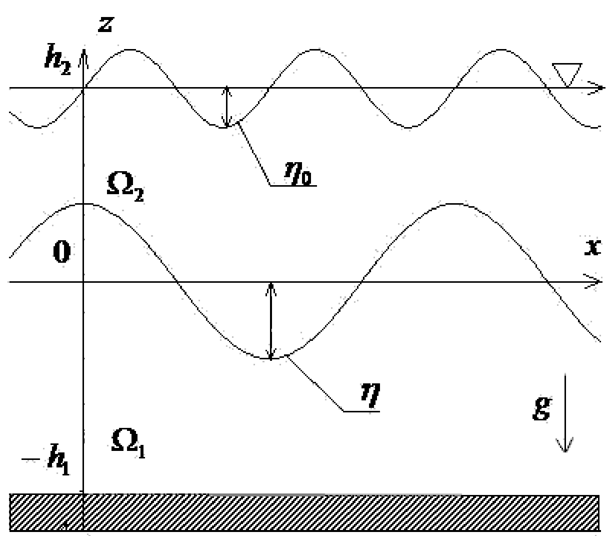

Рис. 1. Постановка задачи

Математическая модель задачи о распространении волновых пакетов вдоль поверхности контакта двух жидких слоев $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h \le z < 0\}$ и $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \le z \le h_2\}$ с плотностями ρ_1 и ρ_2 определяется системой, состоящей из уравнений Лапласа для потенциалов скоростей φ_1 и φ_2 в каждом из слоев, кинематических и динамических условий на поверхности контакта и на свободной поверхности, а также граничного условия на дне.

Здесь введены безразмерные величины при помощи характерной длины L, максимального отклонения свободной поверхности a, характерного времени $(L/g)^{1/2}$, плотности нижней жидкости ρ_1, где g — ускорение свободного падения. Безразмерные коэффициенты поверхностного натяжения на свободной поверхности T_0 и на поверхности контакта T при этом имеют вид $(T^*, T_0^*) = (T, T_0)/(L^2 \rho g)$.

Представим математическую постановку задачи (звездочки опущены)

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j, \tag{1}$$

$$\eta_t - \varphi_{jz} = -\alpha \varphi_{jx} \eta_x \quad \text{на} \quad z = \alpha \eta(x,t), \tag{2}$$

$$\eta_{0t} - \varphi_{2z} = -\alpha \varphi_{2x} \eta_{0x} \quad \text{на} \quad z = \alpha \eta_0(x,t), \tag{3}$$

$$\varphi_{1t} - \rho \varphi_{2t} + (1-\rho)\eta + 0.5\alpha[(\nabla\varphi_1)^2 - \rho(\nabla\varphi_2)^2] - T(1+\alpha^2\eta_x^2)^{-3/2}\eta_{xx} = 0$$
$$\text{на } z = \alpha\eta(x,t), \tag{4}$$

$$\varphi_{2t} + \eta_0 + 0.5\alpha(\nabla\varphi_2)^2 - T_0(1+\alpha^2\eta_{0x}^2)^{-3/2}\eta_{0xx} = 0 \text{ на } z = \alpha\eta_0(x,t), \tag{5}$$

$$\varphi_{1z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1, \tag{6}$$

где $j = 1, 2, \rho = \rho_2/\rho_1$ — отношение плотностей верхнего и нижнего слоев, $\alpha = \alpha/L$ — коэффициент нелинейности, $\eta(x,t)$ — отклонение поверхности контакта, $\eta_0(x,t)$ — отклонение свободной поверхности.

Для определения приближенного решения задачи для малых, но конечных амплитуд, применяется метод многомасштабных разложений

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{3} \alpha^{n-1}\eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \tag{7}$$

$$\eta_0(x,t) = \sum_{n=1}^{3} \alpha^{n-1}\eta_{0n}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \tag{8}$$

$$\varphi_j(x,z,t) = \sum_{n=1}^{3} \alpha^{n-1}\varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, \tag{9}$$

где $x_n = \alpha^n x, t_n = \alpha^n t$ — масштабные переменные.

2. Решение линейных приближений

Подстановка разложений (7)–(9) в (1)–(6) приводит к трем линейным задачам относительно неизвестных функций η_1, η_{01}, φ_{11}, φ_{21}, η_2, η_{02}, φ_{12}, φ_{22}, η_3, η_{03}, φ_{31}, φ_{32}, которые представляют собой слагаемые в многомасштабных разложениях потенциалов φ_1, φ_2 и в разложениях отклонения поверхности контакта η и свободной поверхности η_0.

Постановка первого линейного приближения задачи (1)–(6) имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_{j1x_0x_0} + \varphi_{j1zz} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j,\\
\eta_{1t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \quad \text{на} \quad z = 0,\\
\eta_{01t_0} - \varphi_{21z} &= 0 \quad \text{на} \quad z = h_2,\\
\varphi_{11t_0} - \rho\varphi_{21t_0} + (1-\rho)\eta_1 - T\eta_{1x_0x_0} &= 0 \quad \text{на} \quad z = 0,\\
\varphi_{21t_0} + \eta_{01} - T_0\eta_{01x_0x_0} &= 0 \quad \text{на} \quad z = h_2,\\
\varphi_{11z} &= 0 \quad \text{на} \quad z = -h_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Решение первого приближения (10) найдено в виде

$$\eta_1 = Ae^{i\Theta} + \overline{A}e^{-i\Theta},$$
$$\varphi_{11} = -\frac{i\omega}{k}(Ae^{i\Theta} - \overline{A}e^{-i\Theta})\frac{ch(k(h_1+z))}{sh(kh_1)},$$
$$\varphi_{21} = \frac{i\omega}{k}\left(\frac{\omega^2 sh(k(h_2-z)) - (k+T_0k^3)ch(k(h_2-z))}{\omega^2 ch(kh_2) - (k+T_0k^3)sh(kh_2)}\right)(Ae^{i\Theta} - \overline{A}e^{-i\Theta}), \tag{11}$$
$$\eta_{01} = \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 ch(kh_2) - (k+T_0k^3)sh(kh_2)}\right)(Ae^{i\Theta} - \overline{A}e^{-i\Theta}),$$

где k — волновое число центра волнового пакета, ω — частота центра волнового пакета, $\overline{A}$ — величина, комплексно сопряженная огибающей внутреннего волнового пакета A; $\Theta = kx_0 - \omega t_0$.

Дисперсионное уравнение

$$\omega^2 cth(kh_1) + \rho\omega^2\left(\frac{\omega^2 - (k+T_0k^3)cth(kh_2)}{\omega^2 cth(kh_2) - (k+T_0k^3)}\right) = (1-\rho)k + Tk^3.$$

Из формул (11) несложно увидеть связь между огибающей внутреннего волнового пакета A и огибающей поверхностного волнового пакета A^0

$$A^0 = \frac{\omega^2}{\lambda}A, \tag{12}$$

где $\lambda = \omega^2 ch(kh_2) - (k+T_0k^3)sh(kh_2)$.

Итак, как и в случае распространения волн вдоль поверхности контакта двух полупространств, а также в системах «слой – полупространство» и «слой – слой», в рассматриваемой системе «слой с твердым дном – слой со свободной поверхностью» поверхность контакта линейно устойчива или неустойчива в зависимости от того, является ли k больше или меньше критического волнового числа $k_c = [(1-\rho)/T]^{1/2}$. Более детально анализ решения первого приближения приведен в [6].

Постановка второго линейного приближения задачи (1)–(6) имеет вид

$$\varphi_{j2x_0x_0} + \varphi_{j2zz} = -2\varphi_{j1x_0x_1} \quad \text{в} \quad \Omega_j,$$
$$\eta_{2t_0} - \varphi_{j2z} = -\eta_{1t_1} - \eta_{1x_0}\varphi_{j1x_0} + \eta_1\varphi_{j1zz} \quad \text{на} \quad z=0,$$
$$\eta_{02t_0} - \varphi_{22z} = -\eta_{01t_1} - \eta_{01x_0}\varphi_{21x_0} + \eta_{01}\varphi_{21zz} \quad \text{на} \quad z=h_2,$$
$$\begin{aligned}\varphi_{12t_0} - \rho\varphi_{22t_0} + (1-\rho)\eta_2 - T\eta_{2x_0x_0} = -\varphi_{11t_1} - \eta_1\varphi_{11t_0z} +\\ +\rho(\varphi_{21t_1} + \eta_1\varphi_{21t_0z}) - 0.5(\varphi^2_{11x_0} + \varphi^2_{11z}) +\\ +0.5\rho(\varphi^2_{21x_0} + \varphi^2_{21z}) + 2T\eta_{1x_0x_1} \quad \text{на} \quad z=0,\end{aligned} \tag{13}$$
$$\begin{aligned}\varphi_{22t_0} + \eta_{02} - T_0\eta_{02x_0x_0} = -\varphi_{21t_1} - \eta_{01}\varphi_{21t_0z} - 0.5(\varphi^2_{21x_0} + \varphi^2_{21z}) +\\ +2T_0\eta_{01x_0x_1} \quad \text{на} \quad z=h_2,\end{aligned}$$
$$\varphi_{12z} = 0 \quad \text{на} \quad z=-h_1.$$

Решение задачи второго приближения (13) имеет вид

$$\begin{gathered}\varphi_{12} = B_{11}(z+h_1)sh(k(z+h_1))e^{i\Theta} + B_{21}ch(k(z+h_1))e^{i\Theta} + \\ +B_{22}ch(2k(z+h_1))e^{2i\Theta} + cc, \\ \varphi_{22} = (C_{10} + C_{11}z)e^{i\Theta + k(h_2 - z)} + C_{20}e^{2i\Theta + 2k(h_2 - z)} + \\ +(E_{10} + E_{11}z)e^{i\Theta - k(h_2 - z)} + E_{20}e^{2i\Theta - 2k(h_2 - z)} + cc, \\ \eta_2 = D_0 + D_1 e^{i\Theta} + D_2 e^{2i\Theta} + cc, \\ \eta_{02} = F_0 + F_1 e^{i\Theta} + F_2 e^{2i\Theta} + cc,\end{gathered} \tag{14}$$

где B_{ij}, C_{ij}, E_{ij}, D_i, F_i — неопределенные коэффициенты, cc обозначает комплексно сопряженную к предыдущим членам.

Подстановка выражений для неизвестных функций (14), а также найденные ранее решения (11) первого линейного приближения в первые два уравнения (13) дают следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} B_{11} &= -\frac{\omega}{ksh(kh_1)} A_{x_1}, \\ C_{11} &= -\frac{\omega}{2k}\left(\frac{\omega^2 - (k + T_0 k^3)}{\lambda}\right) A_{x_1}, \\ E_{11} &= -\frac{\omega}{2k}\left(\frac{\omega^2 + (k + T_0 k^3)}{\lambda}\right) A_{x_1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя далее (11), а также (14) в (13) и приравнивая выражения при одинаковых функциях, приходим к двум независимым системам уравнений относительно остальных неизвестных коэффициентов.

Система относительно коэффициентов B_{10}, C_{10}, E_{10}, D_1, F_1, полученная после приравнивания выражений при функции $e^{i\Theta}$, несовместна, причем ее условие разрешимости имеет вид

$$\begin{gathered}\left(\frac{(k+T_0k^3)ch(kh_2) - \omega^2 sh(kh_2)}{k\omega} - \frac{2(k+T_0k^3)\omega}{k\lambda}\right) A_{t_1} - \\ - \lambda\frac{\omega cth(kh_1) + (k + k\rho + Tk^3)}{k\rho\omega^3} A_{t_1} + \frac{(1+T_0k)ch^2(kh_2)}{k} A_{x_1} - \\ - ch(kh_2)\left(\frac{cth(kh_1)(1 - kh_1 cth(kh_1)) + 2k^3T - \omega^2 kh_1}{k^2\rho}\right) A_{x_1} + \\ + (1+T_0k^2)\left(\frac{cth(kh_1)sh(kh_2)(1 - kh_1 cth(kh_1))}{k\omega\rho}\right) A_{x_1} - \\ - \left(\frac{\omega^2 sh(kh_2)}{k^2} + \frac{2T_0k\omega^2}{\lambda} + (1+T_0k^2)\frac{\omega^2 + kh_2(k+T_0k^3)}{k\lambda}\right) A_{x_1} + \\ + (1+T_0k^2)\frac{sh(kh_2)(2k^2T - \omega^2 h_1)}{\rho\omega^2} A_{x_1} = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Если условие (16) выполняется, а также константа $D_1 = 0$, то система относительно неизвестных коэффициентов примет вид

$$ksh(kh_1)B_{10} = A_{t_1} + \frac{\omega(1 - kh_1 cth(kh_1))}{k} A_{x_1},$$
$$ke^{kh_2}C_{10} - ke^{-kh_2}E_{10} = -A_{t_1} - \frac{\omega}{k}A_{x_1},$$
$$kC_{10} - kE_{10} - i\omega F_1 = -\frac{\omega^2}{\lambda}A_{t_1} - \frac{\omega}{k\lambda}(\omega^2 + kh_2(k + T_0k^3))A_{x_1} -$$
$$-\omega ch(kh_1)B_{10} + \rho\omega e^{kh_2}C_{10} + \rho\omega e^{-kh_2}E_{10} = \frac{1 - \rho + Tk^2}{\omega}A_{t_1} + \left(2kT - \frac{\omega^2 h_1}{k}\right)A_{x_1}.$$

Система относительно коэффициентов B_{20}, C_{20}, E_{20}, D_2, F_2, полученная после приравнивания выражений при $e^{2i\Theta}$, совместна и имеет вид

$$-2i\omega D_2 - 2ksh(2kh_1)B_{20} = -2ik\omega cth(kh_1)A^2,$$
$$-2i\omega D_2 + 2ke^{2kh_2}C_{20} - 2ke^{-2kh_2}E_{20} = 2ik\frac{(1-\rho)k + Tk^3 - \omega^2 cth(kh_1)}{\rho\omega}A^2,$$
$$-2i\omega F_2 + 2kC_{20} - 2kE_{20} = -\frac{2i\omega^3(k + T_0k^3)}{\lambda^2}A^2,$$
$$(1 + 4T_0k^2)F_2 - 2i\omega C_{20} - 2i\omega E_{20} = \frac{1.5\omega^6 - 0.5\omega^2(k + T_0k^3)^2}{\lambda^2}A^2,$$
$$(1 - \rho + 2Tk^2)D_2 - 2i\omega ch(2kh_1)B_{20} + 2i\rho\omega e^{2kh_2}C_{20} + 2i\rho\omega e^{-2kh_2}E_{20} = 1.5\omega^2A^2 +$$
$$+(1.5\rho\omega^2 - 0.5\omega cth^2(kh_1))A^2 + \left(0.5\rho\omega\frac{(\omega^2 sh(kh_2) - (k + T_0k^3)ch(kh_2))^2}{\lambda^2}\right)A^2.$$

Решение указанных систем получено с помощью математических пакетов символьных преобразований и имеет громоздкий вид, поэтому здесь не приводится.

Подставляя решения первой и второй задачи в линейное приближение третьего порядка [6] задачи (1)–(6), получаем условие разрешимости для последней. Как и во втором приближении, поскольку однородная часть задачи третьего порядка имеет нетривиальное решение, постольку неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$W_1A_{t_2} + W_2A_{x_2} + W_3A_{x_1x_1} + W_4A^2\overline{A} = 0, \tag{17}$$

где $W_i(i = \overline{1,4})$ коэффициенты, зависящие от $(k, \rho, \omega, h_1, h_2, T, T_0)$.

Для упрощения условий разрешимости задач второго и третьего порядка (16) и (17) найдем выражения $\omega' = d\omega/dk$ и перепишем их в виде

$$A_{t_1} + \omega' A_{x_1} = 0, \tag{18}$$

$$A_{t_2} + \omega' A_{x_2} - 0.5\omega'' A_{x_1x_1} = IA^2\overline{A}. \tag{19}$$

Частные производные $A_{,t}$, $A_{,x}$, $A_{,xx}$ можно записать в виде сумм

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{n=1}^{2} \alpha^n A_{t_n} + O(\alpha^3), \\ A_x &= \sum_{n=1}^{2} \alpha^n A_{x_n} + O(\alpha^3), \\ A_{xx} &= \alpha^2 A_{x_1 x_1} + O(\alpha^3). \end{aligned} \tag{20}$$

Умножим (18) на α^2 и прибавим к нему (19), умноженное на α, а также учитывая (20), получим искомое эволюционное уравнение огибающей волнового пакета на поверхности контакта

$$A_t + \omega' A_x - 0.5\omega'' A_{xx} = \alpha^2 I A^2 \overline{A} \tag{21}$$

в виде нелинейного уравнения Шредингера, что аналогично ранее полученным результатам для других гидродинамических систем [4, 7, 9].

Из соотношения (12) и уравнения (21) легко получить уравнение для огибающей волнового пакета на свободной поверхности

$$A_t^0 + \omega' A_x^0 - 0.5\omega'' A_{xx}^0 = \alpha^2 I_0 (A^0)^2 \overline{A}^0, \tag{22}$$

где $I_0 = \frac{\lambda^2}{\omega^4} I$.

Как и в предыдущих работах [4, 7, 26], уравнение (21) имеет решение, которое зависит только от времени

$$A = a\, exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I t). \tag{23}$$

Аналогично, для уравнения (22) имеем

$$A = a\, exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I_0 t). \tag{24}$$

Таким образом, рассматривая нелинейную задачу (1)–(6), при применении метода многих масштабов до третьего порядка (7)–(9), мы получили три линейных приближения исходной задачи. Найдены частные решения для первых двух, а также получены дисперсионное уравнение и условия разрешимости для второй и третьей задач. Условия разрешимости (18) и (19) приводят к эволюционным уравнениям огибающих на поверхности контакта (21) и на свободной поверхности (22).

3. Форма волновых пакетов

3.1. Форма волнового пакета на поверхности контакта

Форма волнового пакета во втором приближении на поверхности контакта определяется формулой (7), откуда

$$\eta(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + \alpha A^2 \Lambda \cos(2kx - 2\omega t) + O(\alpha^2), \tag{25}$$

где A — решение, которое задается формулой (23).

Для нахождения формы поверхности контакта $\eta(x,t)$ важно определить знак $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) = L_1/L_2$, который меняется при переходе через кривую $L_1 = 0$, вдоль которой $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) = 0$, а также при переходе через кривую $L_2 = 0$, в окрестности которой $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) \to 0$.

Графики кривых $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ изображены ниже для фиксированного значения толщины верхнего слоя $h_2 = 1$ и значения толщины нижнего слоя $h_1 = 10$ (рис. 2).

Кривые разбивают плоскость (ρ, k) на четыре области S_1, S_2, S_3, S_4. В областях S_2, S_3, S_4 — $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) > 0$, а в области S_1 — $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) < 0$. На рис. 3 представлено область S_2 для фиксированного значения $h_2 = 1$ и разных значений $h_1 \in \{10, 2.23, 1.73\}$.

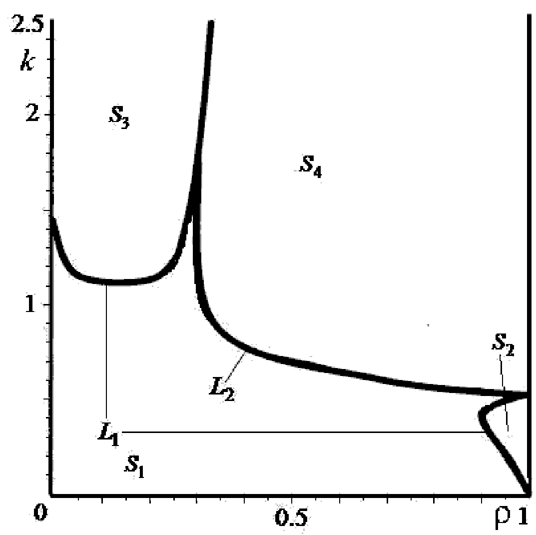

Рис. 2. Области знакопостоянства Λ

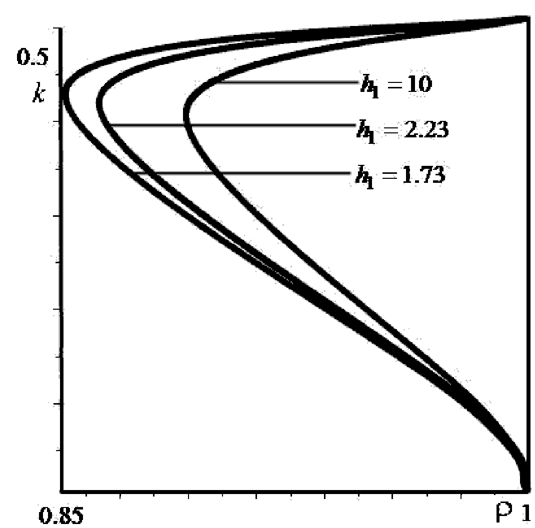

Рис. 3. Области S_2 при различных h_1 и $h_2 = 1$

Первые две гармоники $\eta_1(x,t)$ и $\eta_2(x,t)$, а также отклонение поверхности контакта $\eta(x,t)$ при значениях параметров $\alpha = 0.1$, $h_1 = 10$, $h_2 = 1$, $T_0 = 0.001$, $T = 0$, $t = 0$, $a = 1$ представлены на рис. 4 для $\rho = 0.96$, $k = 1.96$ ($\Lambda = 0.4103$) и на рис. 5 для $\rho = 0.1$, $k = 1$ ($\Lambda = -0.1954$).

Если рассматривать решение (23) при условии модуляционной устойчивости в момент, когда уже состоялся баланс линейности и дисперсии, тогда отклонение поверхности контакта $\eta(x,t)$ является сумой двух косинусоид (25), одна из которых сжата в два раза относительно другой, при этом амплитуда первой гармоники значительно больше амплитуды второй. Если $\Lambda > 0$, тогда максимум $\eta_1(x,t)$ совпадает со максимумом $\eta_2(x,t)$, а минимум $\eta_1(x,t)$ совпадает со следующим максимумом $\eta_2(x,t)$ (рис. 4 а). Таким образом в областях S_2, S_3, S_4 поверхность контакта $\eta(x,t)$ имеет $\cup$-образную форму (рис. 4 б).

Если $\Lambda < 0$, минимумы $\eta_1(x,t)$ и $\eta_2(x,t)$ совпадают, а максимум $\eta_1(x,t)$ совпадает со следующим минимумом $\eta_2(x,t)$, (рис. 5 а). Таким образом, в области S_1, поверхность контакта $\eta(x,t)$ имеет $\cap$-образную форму, как на рис. 5 б.

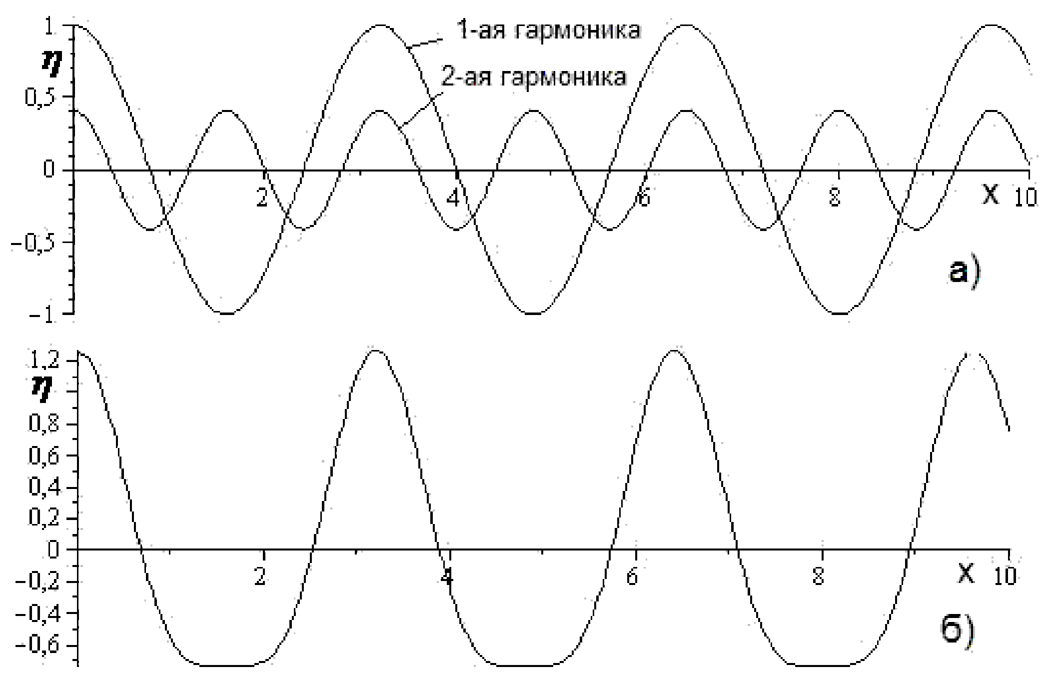

Рис. 4. Отклонение поверхности контакта при $\Lambda > 0$: а) первые две гармоники $\eta_1(x,t)$ и $\eta_2(x,t)$; б) $\eta(x,t) = \eta_1(x,t) + \alpha\eta_2(x,t)$

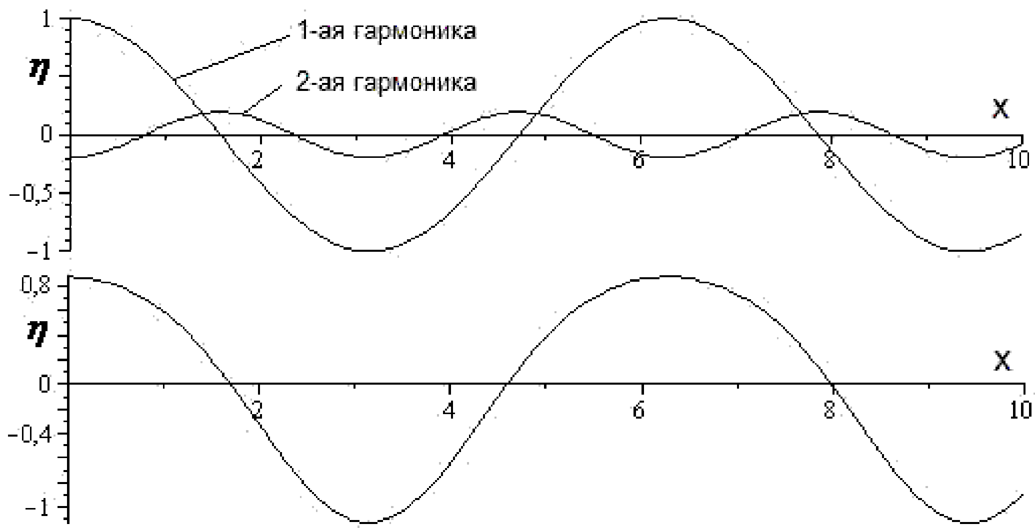

Рис. 5. Отклонение поверхности контакта при $\Lambda < 0$: а) первые две гармоники $\eta_1(x,t)$ и $\eta_2(x,t)$; б) $\eta(x,t) = \eta_1(x,t) + \alpha\eta_2(x,t)$

3.2. Форма волнового пакета на свободной поверхности

Форма волнового пакета во втором приближении на свободной поверхности определяется формулой

$$\eta_0(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t) + \alpha A_0^2 \Lambda_0 \cos(2kx - 2\omega t) + O(\alpha^2),$$

где A^0 задается формулой (24).

Как и в случае поверхности контакта, для определения формы $\eta_0(x,t)$ важен знак $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) = M_1/M_2$, который меняется при переходе через кривую $M_1 = 0$, вдоль которой $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) = 0$, а также при переходе через кривую $M_2 = 0$, в окрестности которой $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) \to \infty$. Ниже представлены графики указанных кривых (рис. 6).

Кривые разбивают плоскость (ρ, k) на шесть областей: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6. В областях S_1, S_3, S_5 величина $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) > 0$, а в областях S_2, S_4, S_6 — $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) < 0$.

Первые две гармоники $\eta_{01}(x,t)$ и $\eta_{02}(x,t)$, а также отклонение свободной поверхности $\eta_0(x,t)$ при значениях параметров $\alpha = 0.1$, $h_2 = 1$, $T_0 = 0.001$, $T = 0$, $t = 0$, $h_1 = 10$, $a = 1$ представлены на рис. 7 для $\rho = 0.2$, $k = 2.1$ ($\Lambda_0 = 0.3862$), а на рис. 8 для $\rho = 0.96$, $k = 1.1$ ($\Lambda_0 = -0.665$).

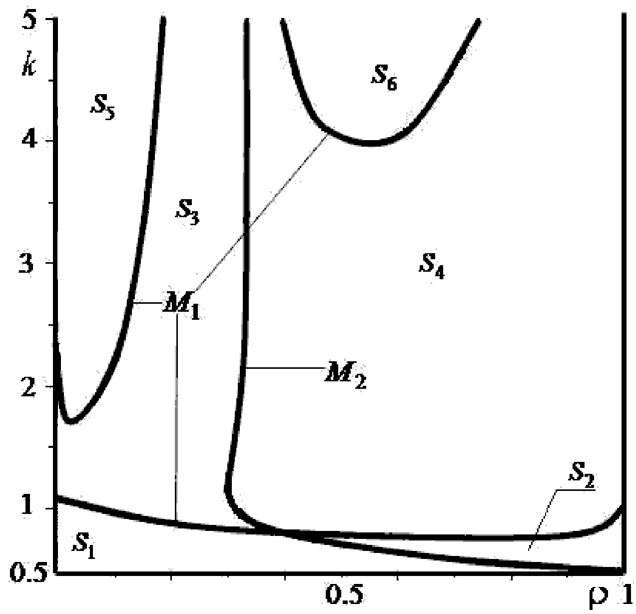

Рис. 6. Области знакопостоянства $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k)$

Если рассматривать решение (24) при условии модуляционной устойчивости в момент когда уже состоялся баланс нелинейности и дисперсии, то отклонение поверхности контакта $\eta_0(x,t)$ является сумой двух косинусоид. Если $\Lambda_0 < 0$, то минимумы $\eta_{01}(x,t)$ и $\eta_{02}(x,t)$ совпадают, а максимум $\eta_{01}(x,t)$ совпадает со следующим минимумом $\eta_{02}(x,t)$ (рис. 6 а). Таким образом в области S_1, поверхность контакта $\eta_0(x,t)$, имеет $\cap$-образную форму, как на рис. 7 б.

Если $\Lambda_0 > 0$, то максимум $\eta_{01}(x,t)$ совпадает с максимумом $\eta_{02}(x,t)$, а минимум $\eta_{01}(x,t)$ совпадает со следующим максимумом $\eta_{02}(x,t)$ (рис. 7 а). Таким образом, в областях S_2, S_3, S_4 поверхность контакта $\eta_0(x,t)$, имеет $\cup$-образную форму (рис. 8 б).

Итак, при учете второго приближения мы получаем асимметрию гребней и подошв волнового пакета.

Выводы

Рассмотрена новая нелинейная задача о распространении волновых пакетов в гидродинамической системе «слой с твердым дном – слой со свободной поверхностью». Методом многих масштабов получены три линейных приближения. Найдены решения первого и второго приближений, дисперсионное уравнение, а также условия разрешимости второго и третьего приближений.

Получены эволюционные уравнения огибающих волновых пакетов на свободной поверхности и на поверхности контакта. Учет второго приближения для от-

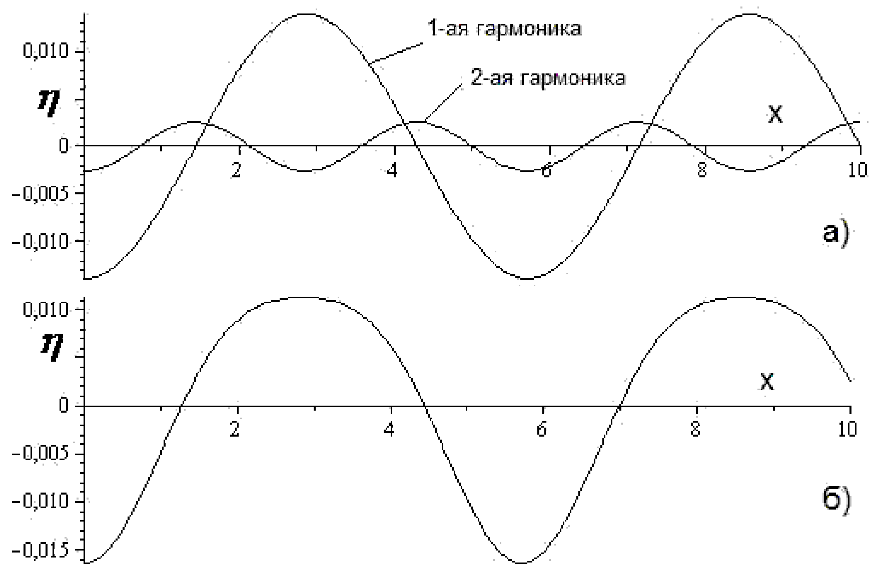

Рис. 7. Отклонение поверхности контакта при $\Lambda_0 < 0$: а) первые две гармоники $\eta_{01}(x,t)$ и $\eta_{02}(x,t)$; б) $\eta_0(x,t) = \eta_{01}(x,t) + \alpha\eta_{02}(x,t)$

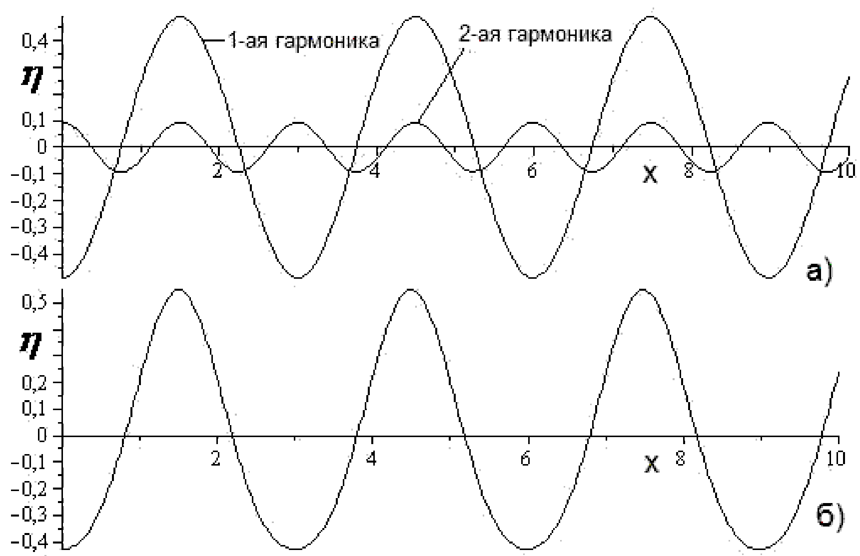

Рис. 8. Отклонение поверхности контакта при $\Lambda_0 > 0$: а) первые две гармоники $\eta_{01}(x,t)$ и $\eta_{02}(x,t)$; б) $\eta_0(x,t) = \eta_{01}(x,t) + \alpha\eta_{02}(x,t)$

клонения свободной поверхности и поверхности контакта приводит к возникновению асимметрии гребней и подошв волнового пакета.

Приведенное аналитическое построение включает влияние нелинейных эффектов на появление неосциллирующих составляющих (14) и сил поверхностного натяжения, и может быть исследована расчетами.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания.

Список цитируемых источников

1. *Авраменко О. В.* Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред // Вісник ХНУ, сер. «Математика,прикл. математика і механіка». — 2001. — Вип.50. — С. 122-128.
2. *Авраменко О. В., Гуртовый Ю. В., Селезов И. Т.* Характерные свойства распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // Прикладная гидромеханика. — 2009. — 11, № 4. — С. 3-8.
3. *Григорьев А. И., Федоров М. С., Ширяева С. О.* Волновое движение в поле силы тяжести на свободной поверхности и на границе стратификации слоисто-неоднородной жидкости. Нелинейный анализ // Изв. РАН. МЖГ. — 2010. — № 5. — С. 130-140.
4. *Езерский А. Б., Папко В. В.* Лабораторное исследование крупномасштабных течений, индуцированных пакетом поверхностных волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1986. — Т. 22, № 9. – С. 979-986.
5. *Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовый Ю. В.* Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладная гидромеханика. — 2005. — 7(79), № 1. — С. 80-89.
6. *Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовый Ю. В.* Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // Прикладная гидромеханика. — 2006, — 8(80), № 4. — С. 60-65
7. *Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовый Ю. В., Нарадовый В. В.* Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методы и физико-мех. поля. — 2009. — 52, № 1. — С. 72-83.
8. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методы и физико-мех. поля. — 2000. — 44, № 2. — С. 113-122.
9. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динамические системы. — 2001. — Вып. 17. — С. 58-67.
10. *Селезов И. Т., Волынский Р. И., Суздальцев А. И.* Численное моделирование динамики твердой частицы в поверхностных гравитационных волнах // Гидромеханика. — 1993. — Вып. 67. — С. 67-71.
11. *Серебряный А. Н., Фурдуев А. В., Аредов А. А., Охрименко Н. Н.* Шум внутренней волны большой амплитуды в океане // Докл. РАН. — 2005. — 402, № 4. — С. 543-547.
12. *Avramenko O., Naradovy V., Selezov I.* Multiscale modelling of the wave interaction in two-layer fluid with free surface // Proc. Int. Conf. «Analytic Methods of Mechanics and Complex Analysis». Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2010. — С. 9-16.

13. *Avramenko O., Selezov I.* Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on a semi-infinite fluid // Доп. НАН України. — 1997. — № 10. — С. 61-66.
14. *Ablowitz M. J., Segur H.* Long internal waves in fluids of great depth // Stud. Appl. Maths. — 1980. — № 62. — P. 249-262.
15. *Bakhanov V. V, Kropfli R. A., Ostrovsky L. A.* On the effect of strong internal waves on surface waves // Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1999. IGARSS apos; 99 Proceedings. IEEE 1999 International Volume 1, Issue , 1999, vol. 1. — pp. 170-172.
16. *Benjamin T. B.* Internal waves of finite amplitude and permanent form // J. Fluid Mech. — 1966. — № 25. — P. 241-270.
17. *Benjamin T. B.* Internal waves of permanent form of great dept // J. Fluid Mech. — 1967. — 29. — P. 559-592.
18. *Benney C. J.* Long nonlinear waves in fluid flows // J.Maths. Phys. — 1966. — 45. — P. 52.
19. *Bhatnagar P. L.* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. — Oxford: Clarendon Press, 1979.
20. *Choi J. W., Sun S. M., Shen M. C.* Internal capillary-gravity waves of a two-layer fluid with free surface over on obstruction - Forced extended KdV equation // Phys. Fluids [Phys. Fluids. A]. — 1996. — 8, N 2. — P. 397-404.
21. *Davis R. E., Acrivos A.* Solitary internal waves in deep water // J. Fluid Mech. — 1967. — 29. — P. 593-607.
22. *Dias F., Il'ichev A.* Interfacial waves with free-surface boundary conditions: an approach via model equation // Physica D. — 2001. — 150. — P. 278-300.
23. *Grimshaw R. H. J.* The modulation of an internal gravity-wave packet, and the resonance with the mean motion // Studies in Applied Mathematics. — 1977. — Vol. 56. — P. 241-266.
24. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Poloukhina O.* Highen-order Korteweg - de Vries models for internal solitary wave in a stratified shear flow with a free surface // Nonlinear Processes Geophys. — 2002. — 9. — P. 221-235.
25. *Hashizume Y.* Interaction between Short Surface Waves and Long Internal Waves // Journal of the Physical Society of Japan.— Vol.48, No.2(19800215) — pp. 631-638.
26. *Jamali M., Seymour B., Lawrence G. A.* Asymptotic analysis of a surface-interfacial wave interaction // Phys. Fluids. — 2003. — 15, № 1. — P. 47-55.
27. *Kubota T., Ko D. R. S., Dobbs L. D.* Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth // AIAA. J. Hydrodyn. —- 1978. — 12. — P. 157-165.
28. *Matsuno Y. A.* Unified theory of nonlinear wave propagation in two-layer fluid system // J. Phys. Soc. Japan. — 1993. — 62, № 6. — P. 1902-1916.
29. *Nayfeh A. H.* Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E. — 1976. — 43, № 4. — P. 584-588.
30. *Nayfeh A. H.* Second-harmonic resonance in the interaction of an air stream with capillary-gravity waves // J.Fluid Mech. — 1973. — 59. — P. 803-816.
31. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluids //J. Phys. Soc. Japan. — 1975. — 39. — P. 1082
32. *Segur H.* The Korteweg-de Vries equation and water waves. Solutions of the equations. Part 1 // J. Fluid Mech. — 1973. — 59. — P. 721.

33. *Selezov I., Avramenko O., Nayfeh A., Huq P., Zeegers N.* Propagation of water wave-packets at the interface of layer and half-space fluid // Proc. 2nd Int. Conference «Asymptotics in Mechanics». St-Petersburg State Marine Technical University, St-Petersburg, Russia, 13-16 October 1996. Ed. by A.Nayfeh and K.Rozhdestvensky. St-Petersburg. 1997. — P. 245-252.
34. *Selezov I., Huq P.* Asymptotic-heuristic analysis of nonlinear water wave propagation in two- and three-layer fluids // Proc. 2nd Int. Conf. «Asymptotics in Mechanics» (St-Petersburg, Russia, 13-16 October 1996) / Ed. by A. Nayfeh and K. Rozhdestvensky. — St-Petersburg: St-Petersburg State Marine Techn. Univ., 1997. — P. 237-244.
35. *Selezov I. T., Korsunsky S. V.* Wave propagation along the interface between the liquid metal and electrolyte // Proc. Int. Conference «MHD Processes to Protection of Environment». Part 1. — 1992. — P. 111-117.
36. *Selezov I. T., Mironchuk M. V., Huq P.* Evolution equation for waves forced by a slender obstacle in a two-layer fluid // Доп. НАН України. — 1999. — № 4. — С. 77-82.
37. *Volynski R., Azmon E., Selezov I., Suzdaltsev A.* Computer simulation of small particles transport in waves // Proc. 26th Israel Conf. on Mechanical Eng., Technion City, Haifa, May 21-22 1996. — P. 234-236.
38. *Watson K. M.* The coupling of surface and internal gravity waves revised // Phis. Oceanography. — 1990, Vol. 20. — Pp.1233-1248.
39. *Wen Feng.* Resonent generation of internal waves on the soft sea bed by a surface water wave // Phys. Fluids. — 1995. — 7, N 8. — P. 1915-1922.
40. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves, New York. — 1980.
41. *Yuen H. C., Lake B. M.* Nonlinear dynamics of deep-water waves // Advances in Appl. Mech. — New York, London. — 1982. — 22. — P. 33-45.
42. *Zhou C. P., Lee J. H. W., Cheung Y. K.* Instabilities and bifurcations of interfacial water waves // Phys. Fluids. A. — 1992. — 4, N 7. — P. 1428-1438.

Получена 18.11.2010 Переработана 18.03.2011